Basisprüfung / 1. VD Prüfung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Herbst 2005

Prof. Dr. M.H. Faber

ETH Zürich

Freitag, 07. Oktober 2005
14:00 – 16:00

Name: ....

Vorname: ....

Stud. Nr.: ....

Studiengang: ....

1. VD Prüfung: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

Datum und Dauer:

Freitag, 07. Oktober 2005
Beginn: 14:00 Uhr
Zeitdauer: 120 Minuten

Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (nicht programmierbar, ohne Kommunikationsmittel) erlaubt.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Natel) erlaubt.

Administratives:

- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- **Alle** Lösungsblätter müssen mit Namen, Vornamen und Studiengang versehen werden.
- **Nur** die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.

Inhalt der Prüfung:

Inhalt	Aufgaben	Seite	Punkte
Aufgabe 1	Allgemeine Fragen	3	15
Aufgabe 2	Holzsortieranlage	6	15
Aufgabe 3	Erdbebenforschung	7	20
Aufgabe 4	Erbanlagen	8	10
Aufgabe 5	Pünktlichkeit	9	20
Aufgabe 6	Wettervorhersagen	10	15
Aufgabe 7	Stahlbau	11	25
Anhang	Tabellen	14	-
			120

Hinweise:

- Die Prüfung ist so konzipiert, dass alle Aufgaben 1 bis 7 gelöst werden sollen.
- Geben Sie **alle** 16 Aufgabenblätter und **alle** Lösungsbögen ab.
- Bitte kontrollieren Sie zu Beginn der Prüfung, ob Ihre Unterlagen vollständig sind. Konzeptpapier ist nicht mit abzugeben und wird bei der Korrektur nicht berücksichtigt.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, **treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich.** Sie können die Aufgabe mit Ihrer Annahme zu Ende lösen.
- Während der 15-minütigen Einlesezeit dürfen die Lösungsbögen nicht beschrieben werden.

Couvertinhalt:

- Allgemeine Informationen, Aufgabenstellungen und Anhänge zur Klausur (16 Seiten).
- 7 Papierbögen (kariert, gestempelt) und Konzeptpapier (weiss).

Aufgabe 1:

Allgemeine Fragen zur Statistik & Wahrscheinlichkeitsrechnung (15 Punkte):

1.1 Welche der folgenden Funktionen in *Abbildung 1.1* ist eine / sind

A) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion(en)

B) Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion(en)

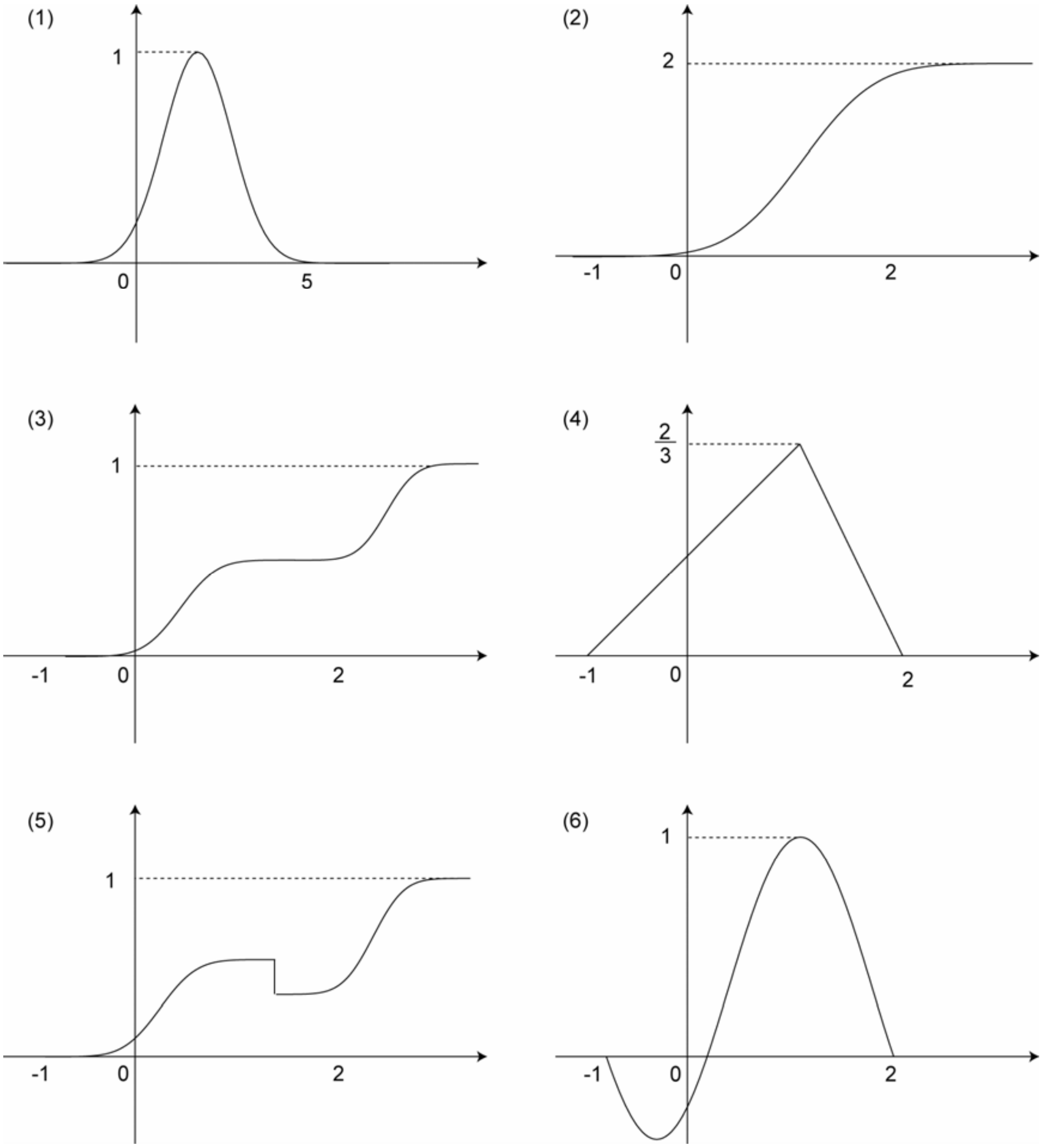


Abb. 1.1 Funktionen.

1.2 Sind die folgenden Aussagen richtig? (J für Ja und N für Nein)

A) Steigt beim Testen von Hypothesen die Wahrscheinlichkeit einen Fehler Typ 2 zu machen, wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler Typ 1 zu begehen, steigt?

B) Mit der „*Maximum Likelihood Methode*“ erhält man immer einen erwartungstreuen Schätzer.

C) Wenn die Null-Hypothese auf einem Signifikanzniveau von 5% verworfen wird, so wird sie auch immer auf einem Signifikanzniveau von 10% verworfen.

D) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion kann durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet werden.

E) Ein Schätzer kann mit der *Methode der Momente* oder mit der *Maximum Likelihood Methode* bestimmt werden. In einigen Fällen sind die Schätzer nicht gleich. In diesen Fällen muss der *Maximum Likelihood Schätzer* gewählt werden.

F) Wenn wir die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von (X,Y) kennen, können wir den Korrelationskoeffizient von X und von Y immer bestimmen.

G) Das Risiko ist als die Summe der Produkte aller Konsequenzen mit ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit definiert.

1.3 Sei *X* eine Zufallsvariable mit der dreieckigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ gegeben in *Abbildung 1.2*.

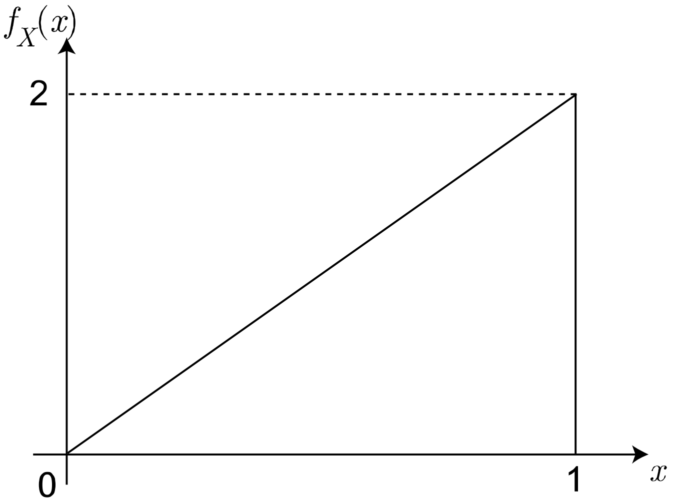


Abb. 1.2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Berechnen Sie

A) den Mittelwert,
B) den Median,
C) das 5%-Quantil
D) die Schiefe der Verteilung

der Zufallsvariable X.

1.4 Wir definieren die folgenden Ereignisse:

A: Das Ergebnis ist eine ungerade Zahl.
B: Das Ergebnis ist eine Primzahl.
C: Das Ergebnis ist eine Zahl im abgeschlossenen Intervall von 1 bis 6.

Wir werfen nun einen idealen Würfel einmal.

A) Berechnen Sie $P[A], P[C], P[A \cap B]$ und $P[A \cup \overline{B}]$.

B) Welche der Kombinationen der zufälligen Ereignisse (*A*,*B*), (*A*,*C*) und (*B*,*C*) sind voneinander unabhängig?

Aufgabe 2:

Holzsortieranlage (15 Punkte):

Um eine Sortieranlage „Golden Eyes“ auf dem Markt einzuführen, wurden von einem Hersteller Tests durchgeführt, um die Genauigkeit der Anlage festzustellen.
Die Anlage kann eingesetzt werden, um Holz in die drei Sortierklassen MS 10 (mittlere Qualität), MS 13 (gute Qualität) und MS 17 (sehr gute Qualität) einzustufen.
Zum Testen der Genauigkeit der Anlage wurden Hölzer verwendet, die zuvor mittels eines Referenzverfahrens sicher klassiert wurden.

Bei Hölzern der Sortierklasse MS 10 wurde mit „Golden Eyes“ 120-mal MS 10, 18-mal MS 13 und 15-mal MS 17 angezeigt.

Bei Test an Hölzern der Sortierklasse MS 13 wurde mit „Golden Eyes“ 15-mal MS 10, 145-mal MS 13 und 25-mal MS 17 angezeigt.

Bei Proben der Sortierklasse MS 17 wurde mit „Golden Eyes“ 19-mal MS 10, 36-mal MS 13 und 118-mal MS 17 angezeigt.

A) Geben Sie für dieses Gerät die Wahrscheinlichkeiten an, dass die Anlage eine Indikation, bedingt auf den tatsächlichen Zustand des Holzes, anzeigt. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die *Tabelle 2.1* ein.

	Zustand MS 10	Zustand MS 13	Zustand MS 17
Indikation MS 10			
Indikation MS 13			
Indikation MS 17			

Tab. 2.1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Indikatoren.

B) Ein holzverarbeitender Betrieb hat einen Lagerbestand an Hölzern von dem sicher ist, dass der gesamte Bestand einer bestimmten Sortierklasse angehört, die aber noch nicht bestimmt werden konnte. Der Besitzer begutachtet seinen Lagerbestand und kommt zu dem Ergebnis, dass das Holz allen Sortierklassen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit angehören könnte.
Er entschliesst sich zum Kauf der Sortieranlage „Golden Eyes“ und führt zwei Tests an zwei Hölzern aus seinem Bestand durch. Zweimal zeigt die Anlage MS 10 an. Beide Tests können als unabhängig voneinander betrachtet werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter Berücksichtigung beider Testergebnisse tatsächlich MS 10 vorliegt.

Aufgabe 3:

Erdbebenforschung (20 Punkte):

Forscher haben eine aktive Erdbebenzone untersucht, die schon zu einigen grossen Erdbeben geführt hat. *Tabelle 3.1* zeigt historische Aufnahmen von Erdbeben in dieser Zone seit 1361 n.Chr.

Jahr des Auftretens n.Chr.	Intervall (Jahre)
1361	-
1498	137
1605	107
1707	102
1854	147
1946	92

Tab. 3.1.: Jahr des Auftretens und Intervall der Erdbeben.

Die Forscher nehmen an, dass die Intervalle zwischen den Erdbeben einer Log-Normalverteilung folgen, deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angegeben werden kann mit:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right) \qquad (x > 0)$$

Weiterhin kann angenommen werden, dass die Auftretensintervalle jedes Erdbebens voneinander unabhängig sind.

A) Schätzen Sie die Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit Hilfe der *Methode der Momente*.

B) Schätzen Sie die Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit Hilfe der *Maximum-Likelihood-Methode*.

C) Seit dem letzten Erbeben 1946 sind 59 Jahre vergangen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 10 Jahren ein Erdbeben auftritt?

Aufgabe 4:

Erbanlagen (10 Punkte):

Johann Gregor Mendel (1822-1884) machte in seinem Leben als Forscher zahlreiche Versuche zur Vererbungslehre, um eine von ihm aufgestellten Hypothese (2. Mendelsches Gesetz*) zu bestätigen. Die Ergebnisse eines seiner Experimente sind in *Tabelle 4.1* gegeben. In der *Tabelle 4.1* sind auch die Wahrscheinlichkeiten, die er nach seiner Hypothese berechnet hat, gegeben.

Sorten der Gartenerbse		Anzahl der Beobachtungen	Berechnete Wahrscheinlichkeit nach der Hypothese von Mendel
Blütenfarbe	Samenform		
gelb	rund	315	9/16
gelb	faltig	101	3/16
grün	rund	108	3/16
grün	faltig	32	1/16
Summe		556	1

Tab. 4.1: Experimentelle Ergebnisse und theoretisch berechnete Werte.

Testen Sie das zweite Mendelsche Gesetz auf einem Signifikanzniveau von 5%. Die notwendigen Verteilungen der Testgrössen finden Sie im *Anhang* zur Klausur ab S.14.

** Die in der ersten Kindergeneration vereinigten Merkmale, können sich in der zweiten Kindergeneration wieder trennen.*

Aufgabe 5:
Pünktlichkeit (20 Punkte):

Ein Student der ETH wohnt im Niederdorf, in der Nähe der Haltestelle Central und fährt mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur ETH-Hönggerberg. Um dorthin zu fahren, nimmt er die Tram Nr. 7 vom Central bis Milchbuck und von dort den Bus Nr. 69 bis zur Haltestelle ETH-Hönggerberg.
Aus seiner Erfahrung ist die benötigte Zeit, die er mit der Tram Nr. 7 fährt, gleichverteilt und wird durch die Zufallsvariable X repräsentiert (*Abbildung 5.1 links*).
Die Zeit, die der Bus Nr. 69 von Milchbuck bis ETH-Hönggerberg benötigt, ist ebenfalls gleichverteilt und wird durch die Zufallsvariable Y repräsentiert (*Abbildung 5.1 rechts*). In beiden Verteilungsfunktionen sind die Wartezeiten an den Haltestellen berücksichtigt.
Für Umsteigezeiten, die Wege von der Wohnung zur Haltestelle und von der Haltestelle zum Vorlesungssaal werden genau fünf Minuten benötigt.
Die unscharfe Gesamtzeit Z, die der Student benötigt, um zur ETH-Hönggerberg zu kommen, beträgt somit $Z = X + Y + 5$.

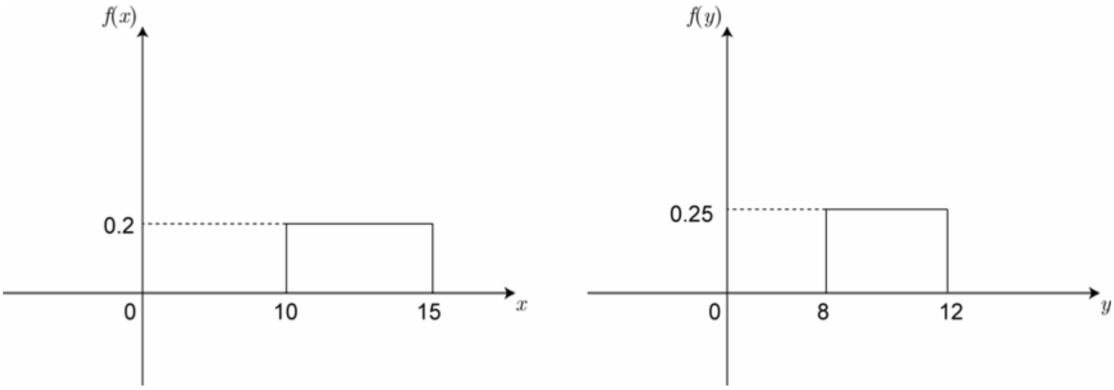


Abb. 5.1.: Dichtefunktionen der Zufallsvariablen X (links) und der Zufallsvariablen Y (rechts).

A) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion von Z.

B) Wann muss der Student seine Wohnung verlassen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% vor 8:00 Uhr im Vorlesungssaal zu sein?

Aufgabe 6:

Wettervorhersagen (15 Punkte):

Eine Studentin traut den Wettervorhersagen nicht ganz. Sie hat das Gefühl, dass die Wettervorhersage in mehr als der Hälfte aller Vorhersagen falsch ist. Eines Tages ruft sie beim Wetterdienst an und fragt, wie genau die Vorhersagen sind. Das Wetteramt gibt an, dass die Vorhersagen mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% korrekt sind.
Von diesem Tag an überprüft sie, ob die Vorhersage stimmt und notiert sich täglich das Wetter. Nach 365 Tagen zeigt sich, dass 270 von 365 Vorhersagen richtig waren. Die Resultate können als unabhängige Ereignisse eines Bernoulliversuches betrachtet werden.

A) Stellen Sie die Nullhypothese auf.

B) Geben Sie den kritischen Bereich (operating rule) unter Annahme eines Signifikanzniveaus von 5% an.

C) Kann die Aussage des Wetterdienstes auf einem Signifikanzniveau von 5% zurückgewiesen werden?

Aufgabe 7:

Stahlbau (25 Punkte):

Ein rundes Zugelement eines alten Stahltragwerkes (siehe *Abbildung 7.1*) soll auf seine Versagenswahrscheinlichkeit hin beurteilt werden. Das Zugelement ist konstant mit F=500 KN belastet. Der Durchmesser *d* des Zugstabes kann als normalverteilt angenommen werden. Er hat einen Mittelwert μ_d von 53mm und eine Standardabweichung σ_d von 4mm. Die Zugfestigkeit f_y des verwendeten Stahls ist, mit einem Mittelwert μ_{fy} von 235MPa und einer Standardabweichung σ_{fy} von 10MPa, ebenfalls normalverteilt.

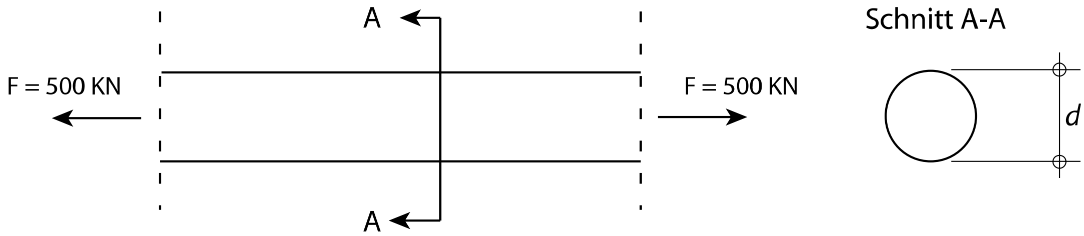


Abb. 7.1: Ansicht und Schnitt des Zugstabes (Vollquerschnitt)

A) Berechnen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit unter Verwendung der *Monte-Carlo Simulation*. Führen Sie hierzu fünf Simulationen durch. Benutzen Sie für ihre Lösung die *Tabellen 7.2* und *7.3*

Hinweise:

Die gleichverteilten Zufallszahlen für die fünf Simulationen sollen der *Tabelle 7.1* entnommen werden. Die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung ist im *Anhang (S.14)* zur Klausur zu finden.

Simulation	Zufallszahlen für *d*	Zufallszahlen für f_y
1	0.289	0.912
2	0.787	0.306
3	0.869	0.276
4	0.156	0.797
5	0.562	0.901

Tab. 7.1: Gleichverteilte Zufallszahlen für die Simulation.

Sim.	Zufallszahlen	$\Phi^{-1}(z)$	μ_d	σ_d	d_i
1	0.289				
2	0.787				
3	0.869				
4	0.156				
5	0.562				

Tab. 7.2.Realisationen Durchmesser.

Sim.	Zufallszahlen	$\Phi^{-1}(z)$	μ_{fy}	σ_{fy}	$f_{y,i}$
1	0.912				
2	0.306				
3	0.276				
4	0.797				
5	0.901				

Tab. 7.3. Realisationen Festigkeit.

B) Berechnen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit unter Verwendung der *First Order Reliability Method (FORM)*.

***Hinweis*:**

Benutzen Sie zur Lösung des Iterationsproblems folgen Algorithmus und die gegebene Grenzzustandsgleichung und tragen Sie ihre Ergebnisse in *Tabelle 7.4* ein:

$$\beta = \min_{\mathbf{u}\in\{g(\mathbf{u})=0\}} \sqrt{u_d^2 + u_{fy}^2}$$

$$\alpha_d = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_d}(\beta\cdot\boldsymbol{\alpha})}{\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_d}(\beta\cdot\boldsymbol{\alpha})\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{fy}}(\beta\cdot\boldsymbol{\alpha})\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\alpha_{fy} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_{fy}}(\beta\cdot\boldsymbol{\alpha})}{\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_d}(\beta\cdot\boldsymbol{\alpha})\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{fy}}(\beta\cdot\boldsymbol{\alpha})\right)^2\right]^{1/2}}$$

mit:

$$g(u) = \frac{\pi}{4} \cdot (u_d \cdot \sigma_d + \mu_d)^2 \cdot (u_{f_y} \cdot \sigma_{f_y} + \mu_{f_y}) - 500000$$

$u_i =$ normalisierte Zufallsvariablen

Die Iterationsformel für β ist gegeben durch:

$$\beta = -\left(\frac{\beta^3 \cdot \alpha_d^2 \cdot \alpha_{f_y} \cdot 160 + \beta^2 \cdot \alpha_d \cdot 3760 + \beta^2 \cdot \alpha_d \cdot \alpha_{f_y} \cdot 4240 + \beta \cdot \alpha_{f_y} \cdot 28090 + 23495.23}{\alpha_d \cdot 99640} \right)$$

Wählen Sie als Startwerte für die Iteration $\beta = 3$ und für die Werte von $\alpha = -0.707$. Führen Sie drei Iterationen durch.

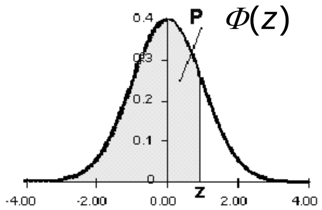
	Start	1	2	3
β	3			
α_d	-0.707			
α_{fy}	-0.707			

Tab. 7.4: Gleichverteilte Zufallszahlen für die Simulation.

C) Nehmen Sie Stellung zu beiden Verfahren und zum erzielten Ergebnis.

Anhang: Tabellen

Anhang 1: *Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der standardisierten Normalverteilung.*



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	*0.5000*	0.50	*0.6915*	1.00	*0.8413*	1.50	*0.9332*
0.01	*0.5040*	0.51	*0.6950*	1.01	*0.8438*	1.51	*0.9345*
0.02	*0.5080*	0.52	*0.6985*	1.02	*0.8461*	1.52	*0.9357*
0.03	*0.5120*	0.53	*0.7019*	1.03	*0.8485*	1.53	*0.9370*
0.04	*0.5160*	0.54	*0.7054*	1.04	*0.8508*	1.54	*0.9382*
0.05	*0.5199*	0.55	*0.7088*	1.05	*0.8531*	1.55	*0.9394*
0.06	*0.5239*	0.56	*0.7123*	1.06	*0.8554*	1.56	*0.9406*
0.07	*0.5279*	0.57	*0.7157*	1.07	*0.8577*	1.57	*0.9418*
0.08	*0.5319*	0.58	*0.7190*	1.08	*0.8599*	1.58	*0.9429*
0.09	*0.5359*	0.59	*0.7224*	1.09	*0.8621*	1.59	*0.9441*
0.10	*0.5398*	0.60	*0.7257*	1.10	*0.8643*	1.60	*0.9452*
0.11	*0.5438*	0.61	*0.7291*	1.11	*0.8665*	1.61	*0.9463*
0.12	*0.5478*	0.62	*0.7324*	1.12	*0.8686*	1.62	*0.9474*
0.13	*0.5517*	0.63	*0.7357*	1.13	*0.8708*	1.63	*0.9484*
0.14	*0.5557*	0.64	*0.7389*	1.14	*0.8729*	1.64	*0.9495*
0.15	*0.5596*	0.65	*0.7422*	1.15	*0.8749*	1.65	*0.9505*
0.16	*0.5636*	0.66	*0.7454*	1.16	*0.8770*	1.66	*0.9515*
0.17	*0.5675*	0.67	*0.7486*	1.17	*0.8790*	1.67	*0.9525*
0.18	*0.5714*	0.68	*0.7517*	1.18	*0.8810*	1.68	*0.9535*
0.19	*0.5753*	0.69	*0.7549*	1.19	*0.8830*	1.69	*0.9545*
0.20	*0.5793*	0.70	*0.7580*	1.20	*0.8849*	1.70	*0.9554*
0.21	*0.5832*	0.71	*0.7611*	1.21	*0.8869*	1.80	*0.9641*
0.22	*0.5871*	0.72	*0.7642*	1.22	*0.8888*	1.90	*0.9713*
0.23	*0.5910*	0.73	*0.7673*	1.23	*0.8907*	2.00	*0.9772*
0.24	*0.5948*	0.74	*0.7704*	1.24	*0.8925*	2.10	*0.9821*
0.25	*0.5987*	0.75	*0.7734*	1.25	*0.8944*	2.20	*0.9861*
0.26	*0.6026*	0.76	*0.7764*	1.26	*0.8962*	2.30	*0.9893*
0.27	*0.6064*	0.77	*0.7794*	1.27	*0.8980*	2.40	*0.9918*
0.28	*0.6103*	0.78	*0.7823*	1.28	*0.8997*	2.50	*0.9938*
0.29	*0.6141*	0.79	*0.7852*	1.29	*0.9015*	2.60	*0.9953*
0.30	*0.6179*	0.80	*0.7881*	1.30	*0.9032*	2.70	*0.9965*
0.31	*0.6217*	0.81	*0.7910*	1.31	*0.9049*	2.80	*0.9974*
0.32	*0.6255*	0.82	*0.7939*	1.32	*0.9066*	2.90	*0.9981*
0.33	*0.6293*	0.83	*0.7967*	1.33	*0.9082*	3.00	*0.9987*
0.34	*0.6331*	0.84	*0.7995*	1.34	*0.9099*	3.10	*0.9990*
0.35	*0.6368*	0.85	*0.8023*	1.35	*0.9115*	3.20	*0.99931*
0.36	*0.6406*	0.86	*0.8051*	1.36	*0.9131*	3.30	*0.99952*
0.37	*0.6443*	0.87	*0.8078*	1.37	*0.9147*	3.40	*0.99966*
0.38	*0.6480*	0.88	*0.8106*	1.38	*0.9162*	3.50	*0.99977*
0.39	*0.6517*	0.89	*0.8133*	1.39	*0.9177*	3.60	*0.99984*
0.40	*0.6554*	0.90	*0.8159*	1.40	*0.9192*	3.70	*0.99989*
0.41	*0.6591*	0.91	*0.8186*	1.41	*0.9207*	3.80	*0.99993*
0.42	*0.6628*	0.92	*0.8212*	1.42	*0.9222*	3.90	*0.999952*
0.43	*0.6664*	0.93	*0.8238*	1.43	*0.9236*	4.00	*0.999968*
0.44	*0.6700*	0.94	*0.8264*	1.44	*0.9251*	4.10	*0.999979*
0.45	*0.6736*	0.95	*0.8289*	1.45	*0.9265*	4.20	*0.999987*
0.46	*0.6772*	0.96	*0.8315*	1.46	*0.9279*	4.30	*0.999991*
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	4.40	0.999995
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	4.50	0.9999966
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	5.00	0.9999997

Anhang 2: *Chi-Quadrat-Verteilung, f = Freiheitsgrad (f = k-r-1).*

f	$\chi^2_{F=0.01}$	$\chi^2_{F=0.05}$	$\chi^2_{F=0.10}$	$\chi^2_{F=0.25}$	$\chi^2_{F=0.50}$	$\chi^2_{F=0.75}$	$\chi^2_{F=0.90}$ α=10%	$\chi^2_{F=0.95}$ α=5%	$\chi^2_{F=0.99}$ α=1%	$\chi^2_{F=0.995}$	$\chi^2_{F=0.999}$
1	0.0002	0.0039	0.0158	0.1015	0.4549	1.3233	2.7055	3.8415	6.6349	7.8794	10.8274
2	0.0201	0.1026	0.2107	0.5754	1.3863	2.7726	4.6052	5.9915	9.2104	10.5965	13.8150
3	0.1148	0.3518	0.5844	1.2125	2.3660	4.1083	6.2514	7.8147	11.3449	12.8381	16.2660
4	0.2971	0.7107	1.0636	1.9226	3.3567	5.3853	7.7794	9.4877	13.2767	14.8602	18.4662
5	0.5543	1.1455	1.6103	2.6746	4.3515	6.6257	9.2363	11.0705	15.0863	16.7496	20.5147
6	0.8721	1.6354	2.2041	3.4546	5.3481	7.8408	10.6446	12.5916	16.8119	18.5475	22.4575
7	1.2390	2.1673	2.8331	4.2549	6.3458	9.0371	12.0170	14.0671	18.4753	20.2777	24.3213
8	1.6465	2.7326	3.4895	5.0706	7.3441	10.2189	13.3616	15.5073	20.0902	21.9549	26.1239
9	2.0879	3.3251	4.1682	5.8988	8.3428	11.3887	14.6837	16.9190	21.6660	23.5893	27.8767
10	2.5582	3.9403	4.8652	6.7372	9.3418	12.5489	15.9872	18.3070	23.2093	25.1881	29.5879
11	3.0535	4.5748	5.5778	7.5841	10.3410	13.7007	17.2750	19.6752	24.7250	26.7569	31.2635
12	3.5706	5.2260	6.3038	8.4384	11.3403	14.8454	18.5493	21.0261	26.2170	28.2997	32.9092
13	4.1069	5.8919	7.0415	9.2991	12.3398	15.9839	19.8119	22.3620	27.6882	29.8193	34.5274
14	4.6604	6.5706	7.7895	10.1653	13.3393	17.1169	21.0641	23.6848	29.1412	31.3194	36.1239
15	5.2294	7.2609	8.5468	11.0365	14.3389	18.2451	22.3071	24.9958	30.5780	32.8015	37.6978
16	5.8122	7.9616	9.3122	11.9122	15.3385	19.3689	23.5418	26.2962	31.9999	34.2671	39.2518
17	6.4077	8.6718	10.0852	12.7919	16.3382	20.4887	24.7690	27.5871	33.4087	35.7184	40.7911
18	7.0149	9.3904	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	34.8052	37.1564	42.3119
19	7.6327	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	36.1908	38.5821	43.8194
20	8.2604	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	37.5663	39.9969	45.3142
21	8.8972	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6706	38.9322	41.4009	46.7963
22	9.5425	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9245	40.2894	42.7957	48.2676
23	10.1957	13.0905	14.8480	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	41.6383	44.1814	49.7276
24	10.8563	13.8484	15.6587	19.0373	23.3367	28.2412	33.1962	36.4150	42.9798	45.5584	51.1790
25	11.5240	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3388	34.3816	37.6525	44.3140	46.9280	52.6187
26	12.1982	15.3792	17.2919	20.8434	25.3365	30.4346	35.5632	38.8851	45.6416	48.2898	54.0511
27	12.8785	16.1514	18.1139	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	46.9628	49.6450	55.4751
28	13.5647	16.9279	18.9392	22.6572	27.3362	32.6205	37.9159	41.3372	48.2782	50.9936	56.8918
29	14.2564	17.7084	19.7677	23.5666	28.3361	33.7109	39.0875	42.5569	49.5878	52.3355	58.3006
30	14.9535	18.4927	20.5992	24.4776	29.3360	34.7997	40.2560	43.7730	50.8922	53.6719	59.7022
40	22.1642	26.5093	29.0505	33.6603	39.3353	45.6160	51.8050	55.7585	63.6908	66.7660	73.4029
50	29.7067	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	76.1538	79.4898	86.6603
60	37.4848	43.1880	46.4589	52.2938	59.3347	66.9815	74.3970	79.0820	88.3794	91.9518	99.6078
70	45.4417	51.7393	55.3289	61.6983	69.3345	77.5766	85.5270	90.5313	100.4251	104.2148	112.3167
80	53.5400	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303	96.5782	101.8795	112.3288	116.3209	124.8389
90	61.7540	69.1260	73.2911	80.6247	89.3342	98.6499	107.5650	113.1452	124.1162	128.2987	137.2082
100	70.0650	77.9294	82.3581	90.1332	99.3341	109.1412	118.4980	124.3421	135.8069	140.1697	149.4488

Anhang 3: *Kolmogorow-Smirnow-Testgrösse*

n	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.02$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$
1	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900
2	0.929	0.900	0.842	0.776	0.684
3	0.829	0.785	0.708	0.636	0.565
4	0.734	0.689	0.624	0.565	0.493
5	0.669	0.627	0.563	0.509	0.447
6	0.617	0.577	0.519	0.468	0.410
7	0.576	0.538	0.483	0.436	0.381
8	0.542	0.507	0.454	0.410	0.358
9	0.513	0.480	0.430	0.387	0.339
10	0.489	0.457	0.409	0.369	0.323
11	0.468	0.437	0.391	0.352	0.308
12	0.449	0.419	0.375	0.338	0.296
13	0.432	0.404	0.361	0.325	0.285
14	0.418	0.390	0.349	0.314	0.275
15	0.404	0.377	0.338	0.304	0.266
16	0.392	0.366	0.327	0.295	0.258
17	0.381	0.355	0.318	0.286	0.250
18	0.371	0.346	0.309	0.279	0.244
19	0.361	0.337	0.301	0.271	0.237
20	0.352	0.329	0.294	0.265	0.232
21	0.344	0.321	0.287	0.259	0.226
22	0.337	0.314	0.281	0.253	0.221
23	0.330	0.307	0.275	0.247	0.216
24	0.323	0.301	0.269	0.242	0.212
25	0.317	0.295	0.264	0.238	0.208
26	0.311	0.290	0.259	0.233	0.204
27	0.305	0.284	0.254	0.229	0.200
28	0.300	0.279	0.250	0.225	0.197
29	0.295	0.275	0.246	0.221	0.193
30	0.290	0.270	0.242	0.218	0.190
31	0.285	0.266	0.238	0.214	0.187
32	0.281	0.262	0.234	0.211	0.184
33	0.277	0.258	0.231	0.208	0.182
34	0.273	0.254	0.227	0.205	0.179
35	0.269	0.251	0.224	0.202	0.177
36	0.265	0.247	0.221	0.199	0.174
37	0.262	0.244	0.218	0.196	0.172
38	0.255	0.241	0.215	0.194	0.170
39	0.252	0.238	0.213	0.191	0.168
40	0.249	0.235	0.210	0.189	0.165
n > 40	$1.63/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.07/\sqrt{n}$