1. VD Prüfung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Herbst 2003

Prof. Dr. M.H. Faber
Prof. Dr. P. Burlando

ETH Zürich

Freitag, 10. Oktober 2003
10:15 – 12:15

Name: ....

Vorname: ....

Institut für Hydromechanik und Wasserwirtschaft - Prof. P. Burlando
Institut für Baustatik und Konstruktion - Prof. M.H. Faber

1. VD Prüfung: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften – Herbst 2003

Datum und Dauer:

Freitag, 10. Oktober 2003
Beginn: 10:15
Zeitdauer: 2 Stunden

Hilfsmittel:

Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
Taschenrechner erlaubt.

Administratives:

- Bitte legen Sie ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- **Alle** Lösungsblätter müssen mit Namen, Vornamen und Studiengang versehen werden. **Nur** die zur Verfügung gestellten Blätter verwenden.
- Lösen Sie Aufgabe 1 auf dem Aufgabenblatt.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe einen eigenen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.
- Essen und Trinken sind während der Prüfung am Platz erlaubt.

Hinweis:

- Die Prüfung ist vom Umfang her so konzipiert, dass alle Aufgaben gelöst werden sollen.
- Hinter jeder Aufgabe steht eine Angabe über die Punktverteilung.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich.

Couvertinhalt:

- Allgemeine Informationen und Aufgabenstellungen (9 Seiten)
- Tabellen (3 Seiten)
- 4 Doppelbögen kariert

Tips:

- Kontrollieren Sie, ob die Aufgabenblätter vollständig sind.
- Lesen Sie alle Aufgaben am Anfang in Ruhe durch.
- Denken Sie eine Aufgabe in Ruhe durch, bevor Sie anfangen zu rechnen.
- Kommentieren Sie kurz, was Sie tun wollen, bevor Sie rechnen (z.B.:„Annahme, dass ...“).

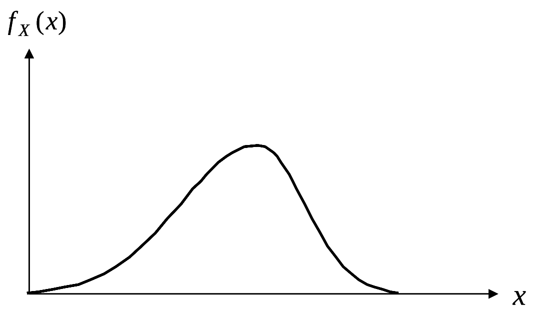
Aufgabe 1 (20 Punkte):

1.1 Ordnen sie folgenden Eigenschaften jeweils den Begriff Lageparameter (a), Streuungsparametern (b) oder nicht zuzuordnen (c) zu:

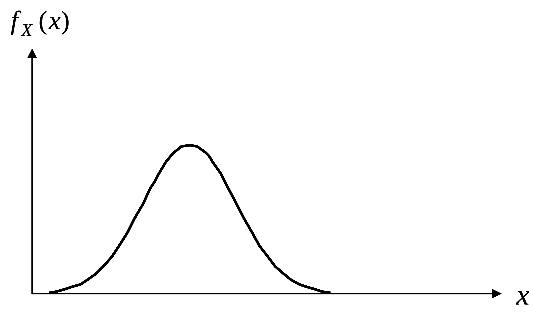
	a	b	c
Arithmetisches Mittel	☐	☐	☐
Quartilabstand	☐	☐	☐
Stichprobenumfang	☐	☐	☐
Median	☐	☐	☐
Standardabweichung	☐	☐	☐
Variationskoeffizient	☐	☐	☐

1.2 Bezeichnen Sie die Verteilungen in Abb. 1.1 hinsichtlich ihrer Schiefeeigenschaft. Markieren Sie für jede Verteilung den Medianwert und den Mittelwert.

______________ Verteilung



______________ Verteilung



______________ Verteilung

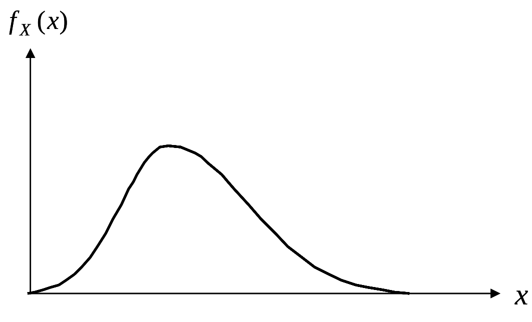


Abb. 1.1: Schiefeeigenschaften von Verteilungen

1.3 Um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen muss ausgehend vom Ziel und der Datengrundlage der entsprechende Verteilungstyp gewählt werden.

Im folgenden Beispiel soll die Auswirkung eines permanenten Schadstoffeintrages (z.B. einer Altlast) auf eine Grundwasserfassung zur Trinkwassergewinnung untersucht werden. Zur statistischen Untersuchung welche Gefahren und gegebenenfalls Restriktionen für die Trinkwassergewinnung bestehen, sollen folgende Aussagen getroffen werden.

Ordnen Sie im folgenden Beispiel die Verteilungstypen dem entsprechenden Aussageziel zu.

Verteilungstypen

Bernoulli Verteilung	Normal Verteilung
Exponential Verteilung	Poisson Verteilung
Lognormal Verteilung	Binomial Verteilung

Aussageziele

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messreihe die Anzahl von brauchbaren Grundwasserproben 3 von 5 beträgt (empirische Wahrscheinlichkeit für den Erfolg bei einer Beprobung ist bekannt).	____________________
Die Summe einer grossen Anzahl gleichartiger unabhängiger Zufallsvariablen.	____________________
Die Verteilung der Zeit zwischen 2 aufeinander folgenden Niederschlagsereignissen, die einem Poisson Prozess folgen.	____________________
Die Wahrscheinlichkeit, dass über einen sehr langen Beobachtungszeitraum ein bestimmter Belastungswert des Trinkwassers n-mal überschritten wird.	____________________

1.4 Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind folgende Axiome von entscheidender Bedeutung.

a. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Zahl zwischen

____________ und ____________ .

b. Die Wahrscheinlichkeit eines ____________ Ereignisses ist 1.

c. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung zweier Ereignissen ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser zwei Ereignisse, wenn die Ereignisse

☐ sich gegenseitig ausschliessen.

☐ voneinander unabhängig sind.

1.5 Das Integral einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über den Definitionsbereich [-∞;+∞] beträgt _____________ .

1.6 Eine standardnormalverteilte Variable besitzt ein arithmetisches Mittel von _____________ und eine Standardabweichung von _____________ . Geben sie die übliche Notation an: _____________ .

1.7 Bei der standardnormalverteilung liegen 68,3 % der Werte um den Mittelwert zwischen _____________ und 95,5 % der Werte zwischen _____________ .

1.8 Bei der Momentenmethode werden die Parameter der Verteilungsfunktion mit Hilfe der _____________ bestimmt. Verwendete statistische Masszahlen sind u.a. _____________, _____________ und _____________ .

1.9 Der χ^2-Test setzt voraus, dass die Daten in _____________ eingeteilt vorliegen.

1.10 Die Aussagekraft des χ^2-Tests wird mit zunehmendem _____________ grösser.

1.11 Wie lautet für eine gegebene umkehrbare Funktion $y = g(x)$ die Transformationsgleichung von der Dichtefunktion $f_X(x)$ zur Dichtefunktion $f_Y(y)$?

____

____

____

Aufgabe 2 (20 Punkte):

Aus den Daten der letzten 20 Jahre ergibt sich, dass das Planungsbüro für Umweltingenieurwesen über alle eingereichten Projektvorschläge gesehen eine Erfolgsrate von 10% hat.

2.1.1 Sie haben diese Firma übernommen und setzen sich mit der Wirtschaftsplanung der kommenden Jahre auseinander. In diesem Zusammenhang interessiert Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Firma spätestens beim 5. Projektvorschlag Erfolg hat. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

2.1.2 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Firma in den nächsten 20 Ausschreibungen nach ihrer Übernahme leer ausgeht?

Annahmen: - Die Erfolgsrate bleibt nach der Firmenüberahme gleich
- Die Erfolgsereignisse sind voneinander unabhängig

2.1.3 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur der letzte der nächsten 10 Projektvorschläge erfolgreich sein wird?

2.1.4 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der nächsten 10 Projektvorschläge erfolgreich sein werden?

2.2 Eine differenzierte Untersuchung der Daten hat ergeben, dass ihr Vorgänger auch dann Projektvorschläge eingereicht hat, wenn nur geringe Erfolgschancen prognostiziert wurden. Von den eingereichten Vorschlägen waren 50 % als Vorschläge mit „sehr guten Chancen", 35 % mit „guten Chancen" und 15 % mit „geringen Chancen" eingestuft.

Sie lassen die erfolgreichen Projektvorschläge untersuchen und bekommen die Tabelle 2.1 geliefert.

Tabelle 2.1 Erfolgreiche Projektvorschläge

A: Aufträge gewonnen bei angenommenen	B: geringen Chancen	P(A|B)	0.03
	C: guten Chancen	P(A|C)	0.06
	D: sehr guten Chancen	P(A|D)	0.15

Sie haben vor nach ihrer Übernahme keine Vorschläge mit „geringen Chancen" einzureichen, wenn deren Anteil unter den erfolgreichen Vorschlägen unter 5 % ist. Bestimmen Sie anhand der obigen Information, ob Sie diesbezüglich die Firmenpolitik ändern müssen.

Aufgabe 3 (25 Punkte):

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ sei im Intervall $0 \le x \le 4$ definiert. Sie besteht aus einem linearen Teil im Intervall $0 \le x \le a$ und einem parabolischen Teil im Intervall $a \le x \le 4$ mit Scheitelpunkt in $x = 4$. Sie ist in Abb. 3.1 dargestellt.

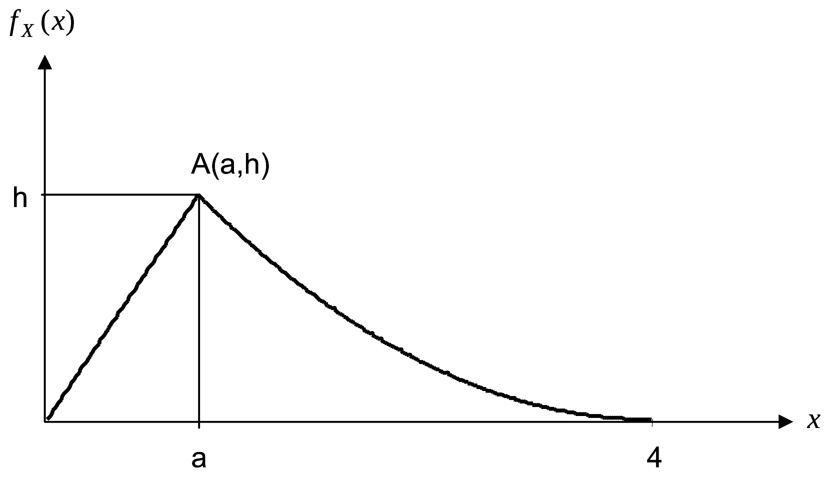


Abb. 3.1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$

3.1 Bestimmen Sie A derart, dass $f_X(x)$ eine Dichtefunktion sein kann.

3.2 Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Verteilungsfunktion mit Angabe des Polynomgrades der einzelnen Abschnitte.

3.3 Ermitteln Sie den Mittelwert μ_x der Dichtefunktion mit dem Punkt A (2, 0.6).

3.4 Berechnen Sie $P(x \ge 2)$ für die Dichtefunktion aus Aufgabenteil 3.3.

Aufgabe 4 (20 Punkte):

Um seine Messinstrumente zu eichen führt ein Labor entsprechende Eichmessungen durch. Das Labor misst täglich deswegen 30-mal einen Kalibrierstandard. Die Messergebnisse sind normalverteilt mit $\mu = 25\ ng/ml$ und $\sigma = 5\ ng/ml$.

4.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer Eichmessung ein Ergebnis von kleiner $20\ ng/ml$ erreicht? Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Messergebnis im Intervall $[20\ ng/ml; 30\ ng/ml]$?

4.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich ein Tagesmittelwert von kleiner als $22\ ng/ml$? Stellen Sie das zweiseitige 90 % Konfidenzintervall der Tagesmittelwerte auf.

4.3 Ein neues Messinstrument kommt zum Einsatz. Aus 12 Eichmessungen mit dem neuen Messinstrument erhält man einen Mittelwert von $\overline{X} = 24.7\ ng/ml$ und eine Standardabweichung von $S = 4.9\ ng/ml$. Testen Sie auf ein Signifikanzniveau von 5 %, ob die ermittelte Stichprobe zur angenommenen Gesamtheit gehört?

Aufgabe 5 (35 Punkte):

Widerstandsmessungen können zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit der Korrosion von Brücken herangezogen werden. Während einer Brückeninspektion wurden folgende Werte in zwei gegengesetzten Richtungen gemessen:

5.1 Zwei (Tukey)-Box-Plots liegen vor. Identifizieren Sie welche Graphik welche Richtung darstellt. Bestimmen Sie die Merkmale der (Tukey)-Box-Plots und fügen Sie diese an den entsprechenden Stellen in die Graphik ein. Markieren Sie ebenfalls die Ausreisser, falls vorhanden.

5.2 (Tukey)-Box-Plots eignen sich auch zur Beurteilung der Symmetrie-/Schiefe-eigenschaften von Datenreihen. Diskutieren Sie die Symmetrie/Schiefe beider Datenreihen.

5.3 Wählen Sie eine geeignete Klassenanzahl und zeichnen Sie das Histogramm für die Daten aus Richtung 1.

5.4 Überprüfen Sie die Eignung einer Normalverteilung für die Datenreihe aus Richtung 1 mit einem χ^2-Test auf ein Signifikanzniveau von 10 %.

Tabelle 5.1 Widerstandsmessungen (kOhm)

Messungen Nr.	Richtung 1 Widerstand (kOhm)	Richtung 2 Widerstand (kOhm)
1	10.4	3.8
2	12.1	5.6
3	13.2	6.5
4	13.8	7.1
5	14.3	7.9
6	14.7	8.2
7	15.3	9.1
8	15.6	9.3
9	15.7	9.6
10	15.9	9.8
11	16.2	10.3
12	16.7	10.9
13	16.9	11.1
14	17.3	11.7
15	17.6	12.2
16	17.6	12.6
17	17.8	12.9
18	17.9	13.8
19	18.3	13.9
20	18.7	14.5
21	18.9	15
22	18.9	15.4
23	19.3	17.1
24	19.4	17.8
25	19.9	23.4