1. VD Prüfung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Frühjahr 2004

Prof. Dr. M.H. Faber
Prof. Dr. P. Burlando

ETH Zürich

Freitag, 5. März 2004
10:15 – 12:15

Name: ....

Vorname: ....

Institut für Hydromechanik und Wasserwirtschaft - Prof. P. Burlando
Institut für Baustatik und Konstruktion - Prof. M.H. Faber

1. VD Prüfung: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

Datum und Dauer:

Freitag, 05. März 2004
Beginn: 10:15
Zeitdauer: 2 Stunden

Hilfsmittel:

Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
Taschenrechner erlaubt.

Administratives:

- Bitte legen Sie ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- **Alle** Lösungsblätter müssen mit Namen, Vornamen und Studiengang versehen werden. **Nur** die zur Verfügung gestellten Blätter verwenden.
- Lösen Sie Aufgabe 1 auf dem Aufgabenblatt.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe einen eigenen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.
- Essen und Trinken sind während der Prüfung am Platz erlaubt.

Hinweis:

- Die Prüfung ist vom Umfang her so konzipiert, dass alle Aufgaben gelöst werden sollen.
- Hinter jeder Aufgabe steht eine Angabe über die Punktverteilung.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich.

Couvertinhalt:

- Allgemeine Informationen und Aufgabenstellungen (10 Seiten)
- 4 Doppelbögen kariert

Tips:

- Kontrollieren Sie, ob die Aufgabenblätter vollständig sind.
- Lesen Sie alle Aufgaben am Anfang in Ruhe durch.
- Denken Sie eine Aufgabe in Ruhe durch, bevor Sie anfangen zu rechnen.
- Kommentieren Sie kurz, was Sie tun wollen, bevor Sie rechnen (z.B.:„Annahme, dass ...“).

Aufgabe 1: (20 Punkte):

1.1 Ein Ingenieurbüro ist beauftragt die Sicherheit eines Damms zu beurteilen. Dabei stellt das Ingenieurbüro folgende Nullhypothese auf:

H_0: Der Damm hat eine Sicherheit von 99,90 %

Wenn das Ingenieurbüro fälschlicherweise die Nullhypothese H_0 akzeptiert, macht sie einen…

Fehler vom Type I. ☐ Fehler vom Type II. ☐

1.2 Gegeben sei ein Ereignis E mit einer Eintretenswahrscheinlichkeit P und den mit dem Eintreten des Ereignisses verbundenen Konsequenzen C. Geben Sie die Formel zur Berechnung des Risikos R an: ______________________

1.3 Vervollständigen Sie folgenden Ausdruck für ein einseitiges Konfidenzintervall für eine Signifikanzzahl α:

$$P\left[-\boxed{} < \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}}\right] = 1 - \boxed{}$$

1.4 Bei normalverteilten Zufallsvariablen wird die Differenz zwischen dem Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ und dem Mittelwert der Grundgesamtheit μ bei wachsender Stichprobengrösse…

grösser ☐ kleiner ☐

1.5 Für statistische Schätzer können engere Konfidenzintervalle erreicht werden, wenn die Anzahl der Experimente…

grösser wird ☐ kleiner wird ☐

1.6 Welche Darstellungsweisen ermöglichen eine Aussage über die Schiefe einer Datenreihe? (Mehrfachnennung möglich).

☐ Quantil-Plots

☐ Histogramme

☐ Tukey-(Box)-Plots

1.7 Weisen Sie folgenden Aussagezielen den geeignetesten Verteilungstyp zu:

Aussageziel	**Verteilungstyp**
Die Verteilung der Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Erdbebenereignissen, wobei die Erdbebenereignisse einem Poisson Prozess folgen.	☐ Exponential Verteilung ☐ Gleichverteilung ☐ Binomial Verteilung
Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines von zwei möglichen Zuständen, wobei beide Zustände sich gegenseitig ausschliessen.	☐ Bernoulli Verteilung ☐ Normal Verteilung ☐ Geometrische Verteilung
Die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anzahl an Autos durch einen einspurigen Tunnel, wobei die Durchfahrt der Autos voneinander unabhängig angenommen wird.	☐ Poisson Verteilung ☐ Gamma Verteilung ☐ Binomial Verteilung
Die Verteilung des täglichen Abflusses, wobei die hydrologische Variabilität aus einer multiplikativen Wirkung vieler unterschiedlicher hydrologischer, meteorologischer und geographischer Einflüsse angenommen wird.	☐ Gamma Verteilung ☐ Lognormal Verteilung ☐ Binomial Verteilung
Die Wahrscheinlichkeit, dass n aus m Autos an einer Autobahnverzweigung eine bestimmte Richtung wählen, bei gleichbleibenden Verkehrsbedingungen. Es wird angenommen, dass die Wahl der Fahrer unabhängig voneinander ist.	☐ Normal Verteilung ☐ Lognormal Verteilung ☐ Binomial Verteilung
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ingenieurbüro erst bei seinem 5. Projektvorschlag Erfolg hat.	☐ Exponential Verteilung ☐ Geometrische Verteilung ☐ Poisson Verteilung
Die Verteilung der Zeit zum n'ten Auftreten von Stürmen, gegeben dass die Sturmereignisse voneinander unabhängig und gleichverteilt sind.	☐ Binomial Verteilung ☐ Lognormal Verteilung ☐ Gamma Verteilung
Die Verteilung von einer Zufallsvariable, die sich aus der Summe von vielen unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen zusammensetzt, von denen keine die Summe dominiert.	☐ Exponential Verteilung ☐ Normal Verteilung ☐ Binomial Verteilung

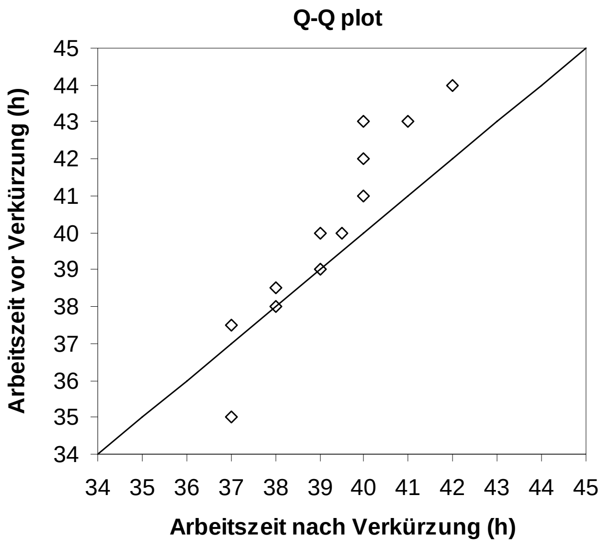
1.8 Welche Verfahren eignen sich für das jeweils angegebene Ziel? (Mehrfachnennungen möglich):

Ziel	**Verfahren**
Die Eignung eines gewählten Verteilungstyps wird überprüft.	☐ Maximum Likelihood Methode ☐ Momentenmethode ☐ Wahrscheinlichkeitspapier
Die Parameter eines gewählten Verteilungstyps werden geschätzt.	☐ Maximum Likelihood Methode ☐ Momentenmethode ☐ Kolmogoroff-Smirnow-Test
Der Verteilungstyp mit ihren gegebenen Parametern, also das Wahrscheinlichkeitsmodell wird auf seine Eignung hin untersucht.	☐ Kolmogoroff-Smirnow-Test ☐ Momentenmethode ☐ Chi-Quadrat-Test

1.9 Die wöchentliche tarifliche Arbeitszeit in der Bauindustrie wurde um 2 Stunden reduziert. Die Baugewerkschaft behauptet, dass sich die tatsächliche Arbeitszeit nicht reduziert hat. Die Behauptung wird mit einem Test überprüft, indem zufällig 12 Arbeiter ausgewählt und deren Arbeitszeiten vor und nach der Arbeitszeitverkürzung festgestellt werden. Das Ergebnis des Tests liegt in Form eines Q-Q-Plots vor. Was können Sie anhand des Q-Q-Plots über die Behauptung der Gewerkschaft aussagen?

Die Behauptung ist tendenziell richtig. ☐

Die Behauptung ist tendenziell falsch. ☐



1.10 Geben Sie eine Schätzung für die Korrelationskoeffizienten der abgebildeten Datenpaare.

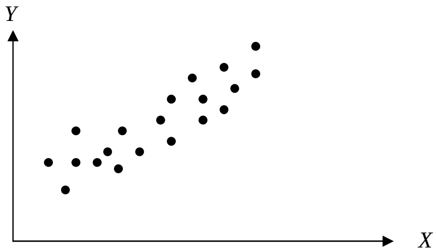
A $r_{XY} \approx$

B $r_{XY} \approx$

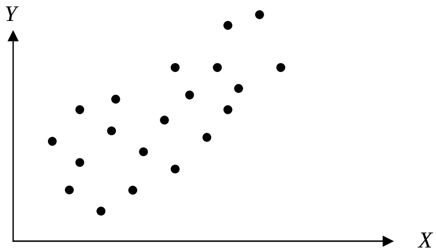
C $r_{XY} \approx$

D $r_{XY} \approx$

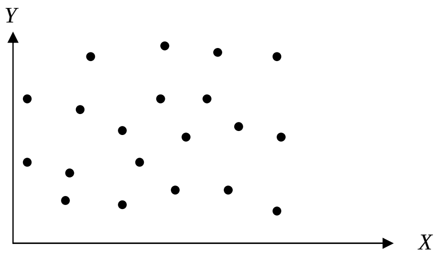
A



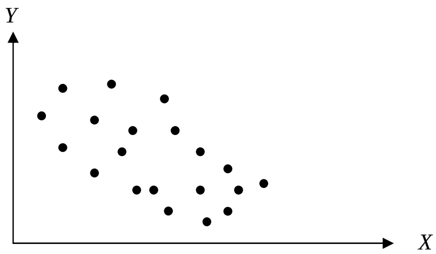
B



C



D



Aufgabe 2 (25 Punkte):

Die Beckenentleerungszeit T eines Abwasserrückhaltebeckens einer städtischen Kanalisation soll untersucht werden. Für die Beckenentleerungszeit T wird folgende empirischen Formel vorgeschlagen:

$$T = \frac{V}{c \cdot Q}$$

mit,

T	:	Beckenentleerungszeit [min]
V	:	Beckenvolumen [m^3]
Q	:	Beckenabfluss [l/s]
c	:	Konstante 0.06 [$m^3 s / min\ l$]

Die gleichverteilte Dichtefunktion des Beckenabflusses Q ist mit $f_Q(q) = 1/40$ und der Erwartungswert von Q mit $E[Q] = 30\ l/s$ gegeben.

2.1 Zeichnen Sie die Dichtefunktion von Q.

2.2 Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung von Q.

2.3 Berechnen Sie die Beckenentleerungszeit T für ein Becken mit $300\ m^3$ für den Erwartungswert von Q nach der empirischen Formel.

2.4 Bestimmen Sie die Dichtefunktion von T mit ihrem Definitionsbereich.

2.5 Skizzieren Sie die Dichtefunktion von T.

2.6 Berechnen Sie den Erwartungswert von T nun über die Dichtefunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil 2.3.

Aufgabe 3 (30 Punkte):

Zur Dimensionierung eines Parkhauses wurden die Ankunftszeiten von Fahrzeugen aufgenommen. Die Zeitdifferenz der Ankünfte sind in Tabelle 3.1 gegeben. Der Mittelwert der 12 Daten beträgt 29.75 Sekunden.

Tabelle 3.1: Zeitdifferenz der Ankünfte

No.	Zeitdifferenz [s]
1	2
2	5
3	9
4	13
5	17
6	29
7	35
8	37
9	40
10	45
11	56
12	69

3.1 Überprüfen Sie graphisch, ob die Daten einer Exponentialverteilung folgen.

3.2 Gegeben, dass die Daten exponentialverteilt sind, bestimmen Sie den Erwartungswert der Zeitdifferenz aus der in Aufgabenteil 3.1 zu erzeugenden Graphik.

3.3 Überprüfen Sie die Eignung der Exponentialverteilung für die Datenreihe mit einem Kolmogoroff-Smirnow Test auf ein Signifikanzniveau von 5 %. Vergleichen Sie mit Aufgabenteil 3.1.

Bemerkung: Verwenden Sie für die beobachtete kumulative Verteilungsfunktion

$$F_o(x_i) = \frac{i}{n}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte):

Der Schmutzwasseranfall aus Industriebetrieben darf laut Vorschriften des Umweltministeriums geklärt in Naturgewässer zugeführt werden. Die Wasserqualität der Gewässer wird über Messungen der Sauerstoffkonzentrationen festgestellt. Nach den Vorschriften muss der Tagesmittelwert der Sauerstoffkonzentration 2 mg/l betragen. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass die Sauerstoffkonzentration normalverteilt ist mit einer Varianz von 0.3 mg^2/l^2.

Umweltschützer reichen eine Klage gegen ein Industriebetrieb ein und behaupten, dass der Betrieb gegen die Vorschriften verstösst und die Verschmutzung des nahegelegenen Gewässers zu verantworten hat. Ein Ingenieur ist beauftragt als Gutachter die Klage zu untersuchen. Er entnimmt an einem Tag 10 Proben aus dem Gewässer und ermittelt die Sauerstoffkonzentration. Der Mittelwert dieser 10 Werte beträgt 2.44 mg/l.

4.1 Überprüfen Sie die Nullhypothese, dass der Tagesmittelwert gleich dem vorgeschriebenen Tagesmittelwert ist. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Test auf ein Signifikanzniveau von 10 %, ob der Mittelwert signifikant abweicht.

4.2 Auf welche Stichprobengrösse müsste sich der Tagesmittelwert von 2.44 mg/l beziehen, damit die Nullhypothese in Aufgabenteil 4.1 gerade noch akzeptiert wird?

4.3 Führen Sie den Test aus Aufgabenteil 4.1 für ein Signifikanzniveau von 1 % durch.

   a. Vergleichen Sie ihre Antwort mit derjenigen aus Aufgabenteil 4.1?
   b. Was passiert mit den Grenzen des Konfidenzintervalls, wenn das Signifikanzniveau verkleinert wird? Welchen Effekt hat die Verwendung von kleineren Signifikanzniveaus auf den Fehler vom Typ I beim Testen von Hypothesen?

4.4 Vervollständigen Sie die Zeichnung in Abbildung 4.1 für den Test aus Aufgabenteil 4.3:

   a. Kennzeichnen Sie die Akzeptanz- und Verwerfungsbereiche der Nullhypothese.
   b. Geben Sie die Werte der oberen und unteren Grenzen des Konfidenzintervalls für den Tagesmittelwert an.
   c. Zeichnen Sie den Mittelwert ein.

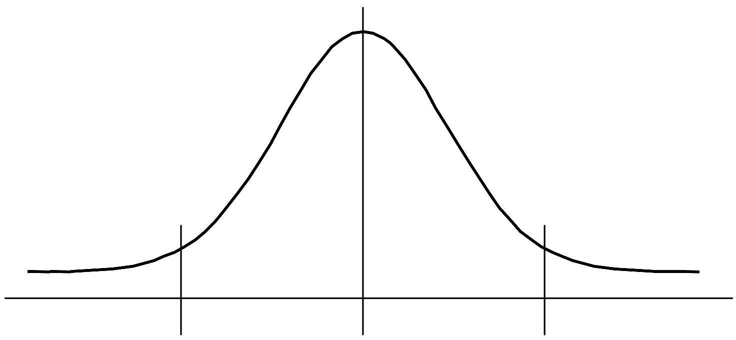


Abbildung 4.1: Akzeptanz- und Verwerfungsbereiche

Aufgabe 5 (25 Punkte):

Das Versagen eines bestimmten Gebäudes im Stadtgebiet von Tokyo kann aus zwei unterschiedlichen und voneinander unabhängigen Ursachen resultieren.

A: Versagen infolge Bodenabsenkung
B: Versagen infolge eines Erdbebens

Die jährlichen Versagenswahrscheinlichkeiten betragen $P(A) = 0.02$ und $P(B) = 0.03$.

5.1 Berechnen Sie die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit für das Bauwerk.

5.2 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauwerk innerhalb von 100 Jahren nicht versagt?

5.3 Aufgrund des steigenden Bedarfs an Trink- und Brauchwasser muss die Fördermenge von Grundwasser gesteigert werden. Aus diesem Grund werden Untersuchungen zur Bestimmung der Gefahr, die von langfristigen Bodenabsenkungen ausgeht, vorgenommen. Es wird angenommen, dass die Bodenabsenkung von der Mächtigkeit der Tonschicht im Untergrund abhängt. Tonböden werden je nach Mächtigkeit in folgende Bodenklassen eingestuft:

C_1: $0 \le h_{Ton} \le 20\,cm$
C_2: $20\,cm < h_{Ton} \le 40\,cm$
C_3: $40\,cm < h_{Ton}$

Basierend auf Erfahrungen schätzt ein Geologe folgende a-priori Wahrscheinlichkeiten für das Vorliegen einer bestimmten Bodenklasse:

$P(C_1) = 0.25$ $P(C_2) = 0.40$ $P(C_3) = 0.35$

Zusätzliche Informationen über die Mächtigkeit der Tonschichten können mit geoelektrischen Messungen gewonnen werden.
Aus vorangehenden geoelektrischen Testmessungen an Böden mit bekannter Bodenklasse liegt folgende unvollständige Tabelle über die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Indikationen vor.

Bodenklasse	Indikation auf Bodenklasse		
C_i	$P(I = C_1 \mid C_i)$	$P(I = C_2 \mid C_i)$	$P(I = C_3 \mid C_i)$
C_1	0.92		0.03
C_2	0.04	0.74	
C_3		0.02	0.81

a. Vervollständigen Sie die Tabelle.
b. Für den vorliegenden Fall wird eine geoelektrische Messung durchgeführt und die Indikation erhalten, dass der Boden zur Bodenklasse C_3 gehört. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich die Bodenklasse C_3 vorliegt?
c. Aktualisieren Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Vorliegen einer bestimmten Bodenklasse C_1, C_2 und C_3, wenn eine zweite geoelektrische Messung durchgeführt und eine Indikation erhalten wird, dass der Tonboden zur Bodenklasse C_2 gehört.