

**Basisprüfung B. Sc.
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Frühjahr 2007**

Prof. Dr. M.H. Faber

ETH Zürich

**09. März 2007
14:00 – 16:00**

Name:

Vorname:

Stud. Nr.:

Studiengang:

Basisprüfung B. Sc. : Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

Datum und Dauer:

Freitag, 09. März 2007
Beginn: 14:00 Uhr
Zeitdauer: 120 Minuten

Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrücke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (nicht programmierbar, ohne Kommunikationsmittel) erlaubt.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Natel) erlaubt.

Administratives:

- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- **Alle** Lösungsblätter müssen mit Namen, Vornamen und Studiengang versehen werden.
- **Nur** die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.

Inhalt der Prüfung:

Inhalt	Aufgaben	Seite	Punkte
Aufgabe 1	Beschreibende Statistik	3	25
Aufgabe 2	Testen von Hypothesen	7	20
Aufgabe 3	Erwartungswertoperator	8	25
Aufgabe 4	Entscheidungsfindung	9	30
Aufgabe 5	Wiederkehrperiode	11	20
Anhang	Tabellen	12	-
	Glossary	13	-
			120

Hinweise:

- Die Prüfung ist so konzipiert, dass alle Aufgaben 1 bis 5 gelöst werden sollen.
- Geben Sie **alle** 13 Aufgabenblätter und **alle** Lösungsbögen ab.
- Bitte kontrollieren Sie zu Beginn der Prüfung, ob Ihre Unterlagen vollständig sind. Konzeptpapier ist nicht mit abzugeben und wird bei der Korrektur nicht berücksichtigt.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, **treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich**. Sie können die Aufgabe mit Ihrer Annahme zu Ende lösen.
- Während der 15-minütigen Einlesezeit dürfen die Lösungsbögen nicht beschrieben werden.

Couvertinhalt:

- Allgemeine Informationen, Aufgabenstellungen, Glossary und Anhänge zur Klausur (**12** Seiten).
- **5** Papierbögen (kariert, gestempelt) und Konzeptpapier (weiss).

Aufgabe 1:

Beschreibende Statistik

(25 Punkte)

In der Birmensdorferstrasse soll eine Geschwindigkeitsbegrenzung eingeführt werden. Da es sich nicht um eine sicherheitsrelevante Begrenzung handelt, kann die Geschwindigkeitsbegrenzung mit Hilfe der derzeitigen Verkehrssituation ermittelt werden. Es wurden zunächst Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1.1. zusammengestellt.

- A)** Zeichnen Sie das Histogramm für die beobachteten Geschwindigkeiten der Fahrzeuge in der Birmensdorferstrasse in Abbildungen 1.1. ein. Für die Berechnungen kann die Tabelle 1.2. verwendet werden.

- B)** Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert \bar{x} , die Varianz s^2 und den Variationskoeffizienten v für die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge auf der Birmensdorferstrasse. Für die Berechnungen darf die Tabelle 1.1. verwendet werden.

- C)** Stellen Sie die Daten aus Tabelle 1.1., unter Verwendung eines Tukey-Box-Plots, dar. Verwenden Sie für die Darstellung die Abbildung 1.2. Für die Berechnungen darf die Tabelle 1.1. verwendet werden.

- D)** Die Begrenzung der Geschwindigkeit soll anhand der Geschwindigkeit v [km/h] festgelegt werden, die 90% der Fahrzeuge unterschreiten. Welche Geschwindigkeitsbegrenzung ergibt sich auf der Birmensdorferstrasse, wenn dieses Kriterium angewendet wird?

Tabelle 1.1: Daten für die Fahrzeuge auf der Birmensdorferstrasse

$v[km/h]$	Fahrzeuge			
	Beobach- tungen			
34	0			
36	1			
38	0			
40	1			
42	1			
44	1			
46	2			
48	6			
50	7			
52	9			
54	12			
56	8			
58	7			
60	3			
62	4			
64	5			
66	2			
68	3			
70	2			
72	3			
74	0			
76	1			
78	1			
80	0			
82	0			
84	0			

Tabelle 1.2: Berechnungstabelle zur Erstellung der Histogramme

Intervall	Bereich [km/h]	Fahrzeuge	
1]0,30]		
2]30,40]		
3]40,50]		
4]50,60]		
5]60,70]		
6]70,80]		
7]80, ∞		

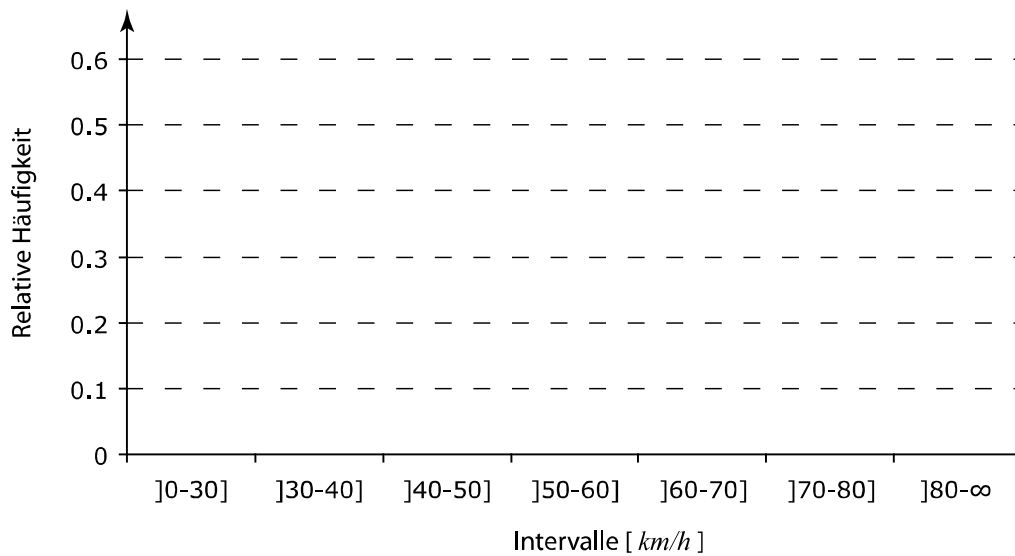


Abbildung 1.1: Histogramm der Geschwindigkeit der Fahrzeuge in der Birmensdorferstrasse

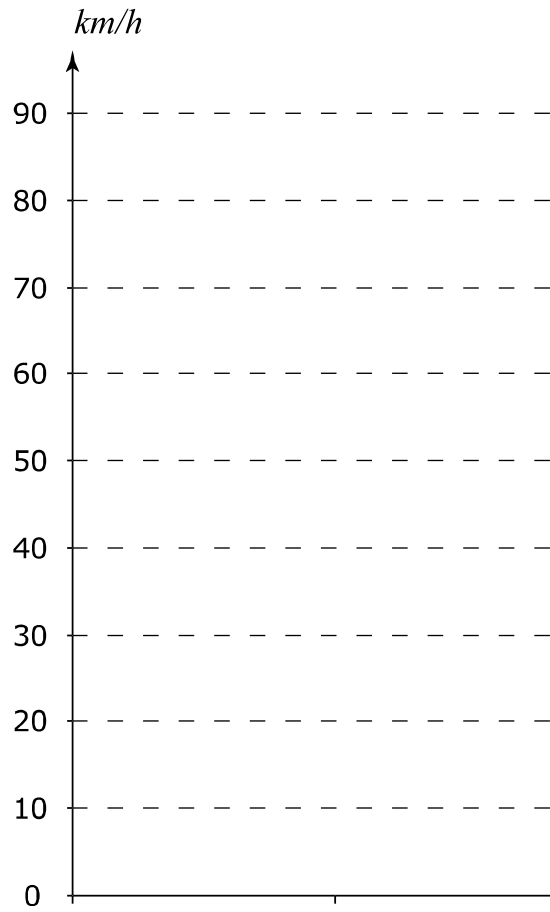


Abbildung 1.2: Tukey-Box Plot für die gemessenen Geschwindigkeiten der Fahrzeuge auf der Birmensdorferstrasse

Aufgabe 2:

Testen von Hypothesen

(20 Punkte)

Zu Zwecken der Qualitätssicherung wurden bei der Herstellung von Betonfertigbalken festgelegt, dass nur 10% der Balken eine Höhe von 15 cm unterschreiten dürfen.

Bei der Herstellung wird die Höhe direkt nach dem Betonieren gemessen. Der Hersteller formuliert eine Null-Hypothese (H_0) die besagt, dass bei seinem Herstellungsverfahren der Anteil der Balken, die eine geringere Höhe als 15 cm haben, weniger als 10% ist.

Wird die Null-Hypothese verworfen, so muss er seinen ganzen Produktionsprozess umstellen. Er wählt ein Signifikanzniveau von 10%.

Der Hersteller misst an 5 Bauteilen die Höhe. Wie viele dieser Stichproben dürfen eine geringere Höhe als 15 cm haben, um die Nullhypothese akzeptieren zu können?

Hinweis:

Verwenden Sie die Binomialverteilung zur Bestimmung des Akzeptanzbereiches.

Aufgabe 3:

Erwartungswertoperator

(25 Punkte)

Sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariable X beschrieben durch:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{a(a+2 \cdot b)}(x+a) & , -a \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{(a+2 \cdot b)} & , 0 < x \leq b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

mit $-a < 0 < b$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ ist in Abbildung 3.1 grafisch dargestellt.

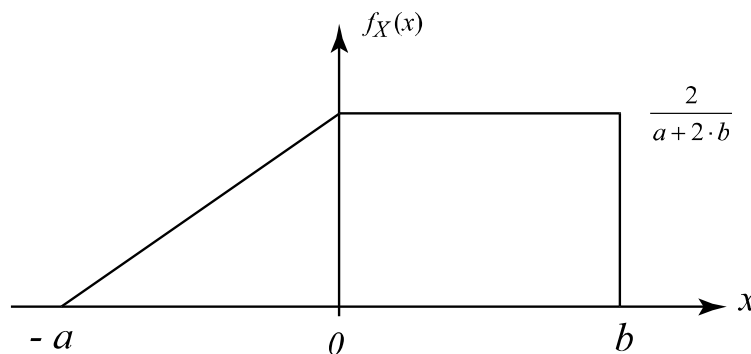


Abbildung 3.1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$

- A)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $Var[X]$ der Zufallsvariable X .
- B)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $Var[X]$ für $a=3$ und $b=5$.

Aufgabe 4:

Entscheidungsfindung

(30 Punkte)

In einem Betonwerk wird vermutet, dass einer Betoncharge zu wenig Zement beigemischt wurde. Dieser Beton wurde bereits in einer Stützmauer verbaut. Die Druckfestigkeit f_c des Betons sollte ursprünglich einen Mittelwert μ_{f_c} von $\theta_0 = 25 \text{ MPa}$ haben. Bei einem Beton mit reduzierter Zementmenge beträgt der Mittelwert der Druckfestigkeit μ_{f_c} lediglich $\theta_1 = 20 \text{ MPa}$. Die Betondruckfestigkeit kann in beiden Fällen als normalverteilt mit einer Standardabweichung σ_{f_c} von 3 MPa angenommen werden.

- A)** Zur Klärung des Problems wurden aus der Stützmauer vier Bohrkern entnommen. Die Druckfestigkeiten f_c der Bohrkern betragen $21, 23, 20, 25 \text{ MPa}$. Wie gross ist der Stichproben Likelihood für die beiden Fälle?
- B)** Nach Einschätzung der Experten beträgt die a-priori Wahrscheinlichkeit $P'[\mu_{f_c} = \theta_0]$, dass der Mittelwert der Betondruckfestigkeit 25 MPa ist, 0.4 . Die a-priori Wahrscheinlichkeit $P'[\mu_{f_c} = \theta_1]$, dass der Mittelwert der Betondruckfestigkeit 20 MPa ist, beträgt 0.6 . Wie gross ist die posterior Wahrscheinlichkeiten $P''[\mu_{f_c} = \theta_0]$ und $P''[\mu_{f_c} = \theta_1]$ für die beiden Mittelwerte der Betonfestigkeit unter Berücksichtigung der Daten?
- C)** Sie sollen Entscheiden, ob der Beton ausgetauscht werden soll oder nicht. Beide Optionen, a_0 (kein Austausch) und a_1 (Austausch des Betons), sind in Abhängigkeit von der Hypothese der Festigkeit mit Nutzen verbunden. In Tabelle 4.1. ist der Nutzen für die Optionen (a_0, a_1) in Abhängigkeit der Hypothesen $(\mu_{f_c} = \theta_0, \mu_{f_c} = \theta_1)$ gegeben. Zeichnen Sie den Entscheidungsbaum und treffen Sie die Entscheidung unter Berücksichtigung der Zusatzinformationen, die Sie durch die Bohrkern erhalten haben.
- D)** Bei welchem Nutzen $u(a_1, \theta_1)$ ist die Option a_1 gleichwertig mit Option a_0 ?

Table 4.1: Nutzen $u(a, \theta)$ der Optionen in Abhängigkeit der Hypothesen

	$\mu_{fc} = \theta_0$	$\mu_{fc} = \theta_1$
a_0	0	-10
a_1	-100	0

Aufgabe 5:

Wiederkehrperiode

(20 Punkte)

Für Hochwasserstudien ist die Modellierung des jährlichen maximalen Abflusses von Flüssen notwendig. An einem untersuchten Fluss wurde der maximale jährliche Abfluss unter Verwendung einer Gumbelverteilung, mit einem Mittelwert μ von $10.000 \text{ m}^3/\text{s}$ und einer Standardabweichung σ von $3.000 \text{ m}^3/\text{s}$, modelliert.

- A) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der maximale jährliche Abfluss $15.000 \text{ m}^3/\text{s}$ übersteigt.
- B) Welche Abflussmenge korrespondiert zu einer Wiederkehrperiode T von 100 Jahren?
- C) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion des maximalen Abflusses für ein Hochwasserschutzprojekt, welches für 20 Jahre ausgelegt ist. Nehmen Sie dafür an, dass die einzelnen jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.
- D) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 20 jährige Maximum einen Abfluss von $15.000 \text{ m}^3/\text{s}$ übersteigt?

Hinweis:

Gumbelverteilung:

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp(-\exp(-\alpha(x-u)))$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert

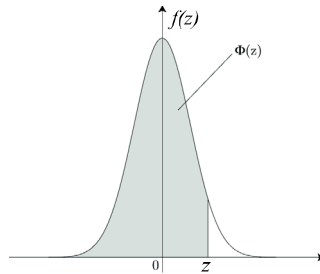
σ_X – Standardabweichung

u – Parameter der Gumbelverteilung

α – Parameter der Gumbelverteilung

Anhang: Tabellen

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(z)$



z	$f(z)$	$\Phi(z)$	z	$f(z)$	$\Phi(z)$	z	$f(z)$	$\Phi(z)$	z	$f(z)$	$\Phi(z)$
0.00	0.399	0.5000	0.50	0.352	0.6915	1.00	0.242	0.8413	1.50	0.130	0.9332
0.01	0.399	0.5040	0.51	0.350	0.6950	1.01	0.240	0.8438	1.51	0.128	0.9345
0.02	0.399	0.5080	0.52	0.348	0.6985	1.02	0.237	0.8461	1.52	0.126	0.9357
0.03	0.399	0.5120	0.53	0.347	0.7019	1.03	0.235	0.8485	1.53	0.124	0.9370
0.04	0.399	0.5160	0.54	0.345	0.7054	1.04	0.232	0.8508	1.54	0.122	0.9382
0.05	0.398	0.5199	0.55	0.343	0.7088	1.05	0.230	0.8531	1.55	0.120	0.9394
0.06	0.398	0.5239	0.56	0.341	0.7123	1.06	0.227	0.8554	1.56	0.118	0.9406
0.07	0.398	0.5279	0.57	0.339	0.7157	1.07	0.225	0.8577	1.57	0.116	0.9418
0.08	0.398	0.5319	0.58	0.337	0.7190	1.08	0.223	0.8599	1.58	0.115	0.9429
0.09	0.397	0.5359	0.59	0.335	0.7224	1.09	0.220	0.8621	1.59	0.113	0.9441
0.10	0.397	0.5398	0.60	0.333	0.7257	1.10	0.218	0.8643	1.60	0.111	0.9452
0.11	0.397	0.5438	0.61	0.331	0.7291	1.11	0.215	0.8665	1.61	0.109	0.9463
0.12	0.396	0.5478	0.62	0.329	0.7324	1.12	0.213	0.8686	1.62	0.107	0.9474
0.13	0.396	0.5517	0.63	0.327	0.7357	1.13	0.211	0.8708	1.63	0.106	0.9484
0.14	0.395	0.5557	0.64	0.325	0.7389	1.14	0.208	0.8729	1.64	0.104	0.9495
0.15	0.394	0.5596	0.65	0.323	0.7422	1.15	0.206	0.8749	1.65	0.102	0.9505
0.16	0.394	0.5636	0.66	0.321	0.7454	1.16	0.204	0.8770	1.66	0.101	0.9515
0.17	0.393	0.5675	0.67	0.319	0.7486	1.17	0.201	0.8790	1.67	0.099	0.9525
0.18	0.393	0.5714	0.68	0.317	0.7517	1.18	0.199	0.8810	1.68	0.097	0.9535
0.19	0.392	0.5753	0.69	0.314	0.7549	1.19	0.197	0.8830	1.69	0.096	0.9545
0.20	0.391	0.5793	0.70	0.312	0.7580	1.20	0.194	0.8849	1.70	0.094	0.9554
0.21	0.390	0.5832	0.71	0.310	0.7611	1.21	0.192	0.8869	1.80	0.079	0.9641
0.22	0.389	0.5871	0.72	0.308	0.7642	1.22	0.190	0.8888	1.90	0.066	0.9713
0.23	0.389	0.5910	0.73	0.306	0.7673	1.23	0.187	0.8907	2.00	0.054	0.9772
0.24	0.388	0.5948	0.74	0.303	0.7704	1.24	0.185	0.8925	2.10	0.044	0.9821
0.25	0.387	0.5987	0.75	0.301	0.7734	1.25	0.183	0.8944	2.20	0.035	0.9861
0.26	0.386	0.6026	0.76	0.299	0.7764	1.26	0.180	0.8962	2.30	0.028	0.9893
0.27	0.385	0.6064	0.77	0.297	0.7794	1.27	0.178	0.8980	2.40	0.022	0.9918
0.28	0.384	0.6103	0.78	0.294	0.7823	1.28	0.176	0.8997	2.50	0.018	0.9938
0.29	0.383	0.6141	0.79	0.292	0.7852	1.29	0.174	0.9015	2.60	0.014	0.9953
0.30	0.381	0.6179	0.80	0.290	0.7881	1.30	0.171	0.9032	2.70	0.010	0.9965
0.31	0.380	0.6217	0.81	0.287	0.7910	1.31	0.169	0.9049	2.80	0.008	0.9974
0.32	0.379	0.6255	0.82	0.285	0.7939	1.32	0.167	0.9066	2.90	0.006	0.9981
0.33	0.378	0.6293	0.83	0.283	0.7967	1.33	0.165	0.9082	3.00	0.004	0.9987
0.34	0.377	0.6331	0.84	0.280	0.7995	1.34	0.163	0.9099	3.10	0.003	0.9990
0.35	0.375	0.6368	0.85	0.278	0.8023	1.35	0.160	0.9115	3.20	0.002	0.99931
0.36	0.374	0.6406	0.86	0.276	0.8051	1.36	0.158	0.9131	3.30	0.002	0.99952
0.37	0.373	0.6443	0.87	0.273	0.8078	1.37	0.156	0.9147	3.40	0.001	0.99966
0.38	0.371	0.6480	0.88	0.271	0.8106	1.38	0.154	0.9162	3.50	0.001	0.99977
0.39	0.370	0.6517	0.89	0.268	0.8133	1.39	0.152	0.9177	3.60	0.001	0.99984
0.40	0.368	0.6554	0.90	0.266	0.8159	1.40	0.150	0.9192	3.70	0.000	0.99989
0.41	0.367	0.6591	0.91	0.264	0.8186	1.41	0.148	0.9207	3.80	0.000	0.99993
0.42	0.365	0.6628	0.92	0.261	0.8212	1.42	0.146	0.9222	3.90	0.000	0.99995
0.43	0.364	0.6664	0.93	0.259	0.8238	1.43	0.144	0.9236	4.00	0.000	0.99996
0.44	0.362	0.6700	0.94	0.256	0.8264	1.44	0.141	0.9251	4.10	0.000	0.99997
0.45	0.361	0.6736	0.95	0.254	0.8289	1.45	0.139	0.9265	4.20	0.000	0.99998
0.46	0.359	0.6772	0.96	0.252	0.8315	1.46	0.137	0.9279	4.30	0.000	0.99999
0.47	0.357	0.6808	0.97	0.249	0.8340	1.47	0.135	0.9292	4.40	0.000	0.99999
0.48	0.356	0.6844	0.98	0.247	0.8365	1.48	0.133	0.9306	4.50	0.000	0.99999
0.49	0.354	0.6879	0.99	0.244	0.8389	1.49	0.131	0.9319	5.00	0.000	0.99999

Glossary

Abfluss	Stream flow
A-priori Wahrscheinlichkeit	Prior probability
Beobachtungen	Observations
Beton	Concrete
Betonfertigbalken	Precast concrete beam
Betonwerk	Concrete factory
Bohrkern	drilling core
Charge	Charge
Druckfestigkeit	Compression strength
Entscheiden	Decide
Erwartungswert	Expected value
Fahrzeuge	Vehicles
Geschwindigkeitsbegrenzung	Speed limit
Handlungsalternative	Action alternative
Herstellung	Manufacturing / Production
Hochwasser	Flood
Hypothese	hypothesis
Jährliches Maximum	Yearly maximum
Modellierung	Modelling
Normalverteilt	Normal distributed
Null-Hypothese	Null-Hypothesis
Personenwagen	Passenger car
Posterior Wahrscheinlichkeit	Posterior probability
Produktionsprozess	Manufacturing process
Qualitätskontrolle	Quality control
Schwerlastwagen	Heavy goods vehicles
Sicherheitsrelevant	Security relevant
Signifikanzniveau	Level of significance
Standardabweichung	Standard deviation
Standardabweichung	Standard deviation
Stichprobe	Sample
Stichprobenmittelwert	Sample mean
Stützmauer	retaining wall
Unabhängig	Independent
Varianz	Varianz
Variationskoeffizient	Coefficient of variation
Verkehr	Traffic
Wahrscheinlichkeit	Probability
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	Probability density function
Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion	Probability distribution function
Wiederkehrperiode	Return period
Zufallsvariable	Random variable
