

## **Basisprüfung B. Sc.**

# **Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung**

**HS 2008**

Dr. J. Köhler

Prof. Dr. M. H. Faber

*ETH Zürich*

**Freitag 6. Februar 2009**

**09:00 – 11:00**

**Vorname:** .....

**Name:** .....

**Stud. Nr.:** .....

**Studienrichtung:** .....

## Basisprüfung B. Sc.: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

### Datum und Dauer:

Freitag 6. Februar 2009

Beginn: 9:00 Uhr

Zeitdauer: 120 Minuten

---

### Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrücke, etc.) sind erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) sind erlaubt.
- Kommunikationsmittel (z.B. Telefon, Laptop) sind nicht erlaubt.

### Administratives:

- Bitte kontrollieren Sie zuerst die Vollständigkeit ihrer Unterlagen:
  - o Aufgabenstellung inkl. genereller Informationen und Anhängen 18 Seiten.
  - o Papierbogen kariert, gestempelt 5 mal.
- Während der 15-minütigen Einlesezeit dürfen die Lösungsbögen nicht beschrieben werden!
- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Vornamen versehen werden.
- Gewertet werden nur diejenigen Lösungswege und Ergebnisse, welche eindeutig gemäss Aufgabenblatt nummeriert sind, und entweder auf die Aufgabenblätter selbst, oder auf die karierten, gestempelten Bögen geschrieben werden.
- Nur die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden. Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.

### Hinweise:

- Die Prüfung ist so konzipiert, dass alle Aufgaben gelöst werden sollen.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich. Sie können die Aufgabe mit Ihrer Annahme zu Ende lösen.

### Inhalt der Prüfung:

Inhalt	Aufgaben	Seite	Punkte
Aufgabe 1	Beschreibende Statistik	3	15
Aufgabe 2	Satz von Bayes und Entscheidungsanalyse	6	30
Aufgabe 3	Zufallsvariablen und Prozesse	9	20
Aufgabe 4	Konfidenzintervalle und Hypothesentests	10	20
Aufgabe 5	Parameterschätzung, Modellevaluation und Grenzzustandsfunktion	12	35
Anhang: Tabellen	T.1: Kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung	15	-
	T.2: Quantilwerte $q$ der t-Verteilung	16	-
	T.3: Quantilwerte $q$ der Chi-Quadrat-Verteilung	17	-
	T.4: Kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, detaillierte Werte im Bereich $z=[2,5]$	18	-
		120	

**Aufgabe 1:**

**Beschreibende Statistik**

**(15 Punkte)**

Bei der Herstellung von Holzprodukten für den Baubereich wird im Rahmen der Qualitätskontrolle für jedes Brett zerstörungsfrei ein Schätzwert ( $x$ ) für dessen Elastizitätsmodul (Steifigkeit) ermittelt. Um die Genauigkeit dieser Schätzwerte zu überprüfen, werden zufällig einzelne Bretter aus der Produktion entnommen, und anhand einer Zugprüfung der tatsächliche Wert ( $y$ ) des Elastizitätsmoduls dieser Bretter gemessen.

Für  $n=6$  zufällig entnommene Bretter sind in Tabelle 1 die Schätzwerte  $x_i$  und die entsprechenden Messwerte  $y_i$  (aufsteigend geordnet,  $y_i^o$ ) des Elastizitätsmoduls aufgelistet. Zusätzlich sind für die beiden Variablen noch der Stichprobenmittelwert und die nicht erwartungstreue Stichprobenstandardabweichung angegeben.

*Tab. 1: Zerstörungsfrei ermittelte Schätzwerte und tatsächliche Messwerte des Elastizitätsmoduls für 6 zufällig aus der Produktion entnommenen Holzbretter.*

Brettnummer $i$	Schätzwert ( $x_i$ ) des Elastizitätsmoduls [N/mm <sup>2</sup> ]	Messwert ( $y_i^o$ ) des Elastizitätsmoduls [N/mm <sup>2</sup> ]
1	10181	10246
2	10888	10975
3	11956	12448
4	11511	12481
5	14671	15719
6	17604	17693
Stichproben- mittelwert	$\bar{x} = 12801.8$	$\bar{y} = 13260.3$
Nicht erwartungstreue Stichproben- standardabweichung	$s_x = 2564.8$	$s_y = 2622.7$

- a) Berechnen Sie für die Messwerte  $y_i$  des Elastizitätsmoduls (Tabelle 1) den Variationskoeffizienten.
  
- b) Stellen Sie in Abbildung 1 die Messwerte  $y_i$  des Elastizitätsmoduls aus Tabelle 1, Spalte 3 als kumulative Verteilungsfunktion dar und ermitteln Sie anhand Ihrer Zeichnung die 25%-Quantile, und den Median der Messwerte des Elastizitätsmoduls. Erstellen Sie eine sinnvolle Einteilung der Achsen.

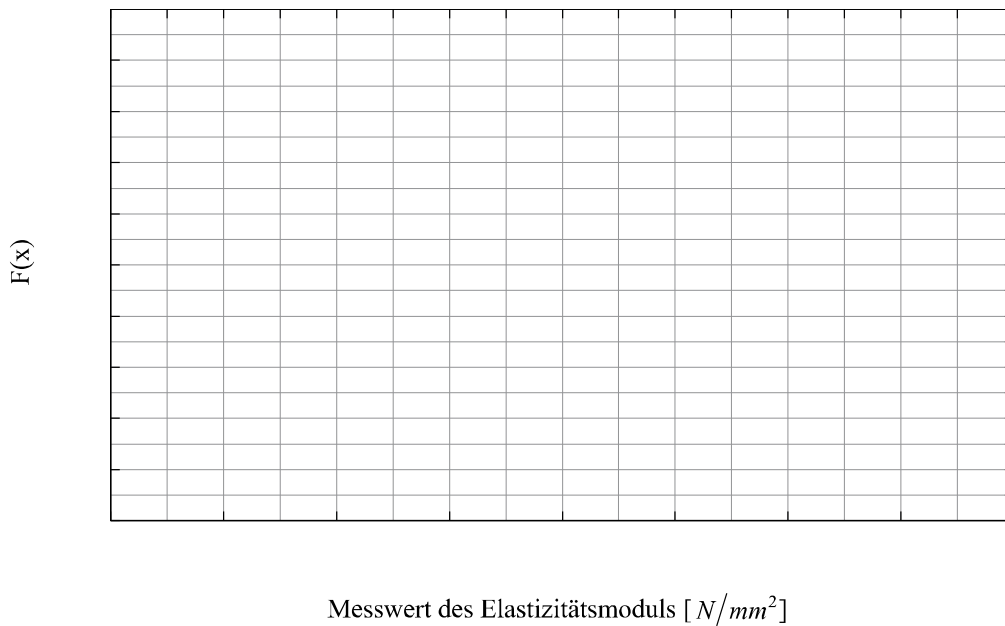


Abb. 1: Kumulative Verteilungsfunktion der tatsächlichen Messwerte  $y_i$  des Elastizitätsmoduls.

- c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen dem Schätzwert  $x_i$  und dem Messwert  $y_i$  des Elastizitätsmoduls. Benützen Sie dazu folgende Tabelle 2.

Tab. 2: Rechentabelle für den Korrelationskoeffizienten.

$i$	Schätzwert $x_i$	Messwert $y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	10181	10246			
2	10888	10975			
3	11956	12448			
4	11511	12481			
5	14671	15719			
6	17604	17693			

**Aufgabe 2:**

**Satz von Bayes und Entscheidungsanalyse**

**(30 Punkte)**

Bei der Kontrolle eines alten Holzbauwerks soll entschieden werden, ob der tragende Holzbalken zu erneuern ist.

Unter der vorliegenden Belastung hat der intakte Holzbalken eine jährliche Versagenswahrscheinlichkeit von 0.001. Ist der Holzbalken jedoch beschädigt (z.B. Insektenbefall, Fäule), steigt die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit auf 0.2. Eine mögliche Schädigung des Holzbalkens ist von aussen nicht erkennbar.

Die Kosten für eine Erneuerung des Holzbalkens betragen 400'000 CHF. Sollte der Holzbalken versagen und als Folge dessen das Holzbauwerk einstürzen, würde dies Kosten von 5 Mio CHF nach sich ziehen.

Der zuständige Gutachter weiss aufgrund von Erfahrungen, dass bei jedem 5. Holzbauwerk mit einer Schädigung des tragenden Holzbalkens zu rechnen ist.

- a) Wie sollte sich der Gutachter aufgrund der vorhandenen Information entscheiden? Führen Sie eine a-priori-Entscheidungsanalyse durch, um Ihre Einschätzung zu begründen.

**Hinweis:** Für diese und die folgenden Teilaufgaben kann der in Abbildung 2 dargestellte Entscheidungsbaum verwendet werden. Sie dürfen Ihre Ergebnisse aber auch ohne Entscheidungsbaum berechnen.

Der Gutachter möchte ein Gerät zur Ermittlung der Ultraschall-Laufzeit im Holz heranziehen, um mit dieser zerstörungsfreien Prüfmethode seine Entscheidung zu festigen. Die Untersuchungen mit diesem Gerät kosten insgesamt 30'000 CHF.

Es ist allerdings bekannt, dass das Gerät nicht immer den richtigen Zustand der Schädigung des Holzbalkens erkennt. Nur in 85% aller Messungen wird ein intakter Balken vom Gerät auch als intakt indiziert und nur in 80% aller Messungen wird ein geschädigter Balken vom Gerät auch als geschädigt indiziert.

b) Vervollständigen Sie die Tabelle 3.

Tab. 3: Indikation des Balkenzustands anhand des zerstörungsfreien Prüfverfahrens .

Indikation	Tatsächlicher Zustand	
	$\theta_0$ : Balken geschädigt	$\theta_1$ : Balken intakt
$I$ (=Test indiziert: Balken geschädigt)		
$\bar{I}$ (=Test indiziert: Balken intakt)		

Der Gutachter hat sich entschieden, zerstörungsfreie Messungen durchzuführen. Das Gerät indiziert, dass eine Schädigung des Holzbalkens vorliegt.

- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Holzbalken intakt ist, obwohl das Gerät eine Schädigung indiziert?
- d) Aktualisieren Sie die Entscheidungsanalyse aus Teilaufgabe a) mit der zusätzlichen Information aus der zerstörungsfreien Prüfung, dass eine Schädigung des Holzbalkens vorliegt. Sollte sich der Gutachter aufgrund der neuen Information nun für eine Erneuerung des Holzbalkens entscheiden oder den bisherigen Holzbalken belassen?
- e) Beurteilen Sie anhand einer pre-posteriori-Entscheidungsanalyse, ob sich die Untersuchungen mit der zerstörungsfreien Prüfmethode für dieses Entscheidungsproblem überhaupt lohnen.

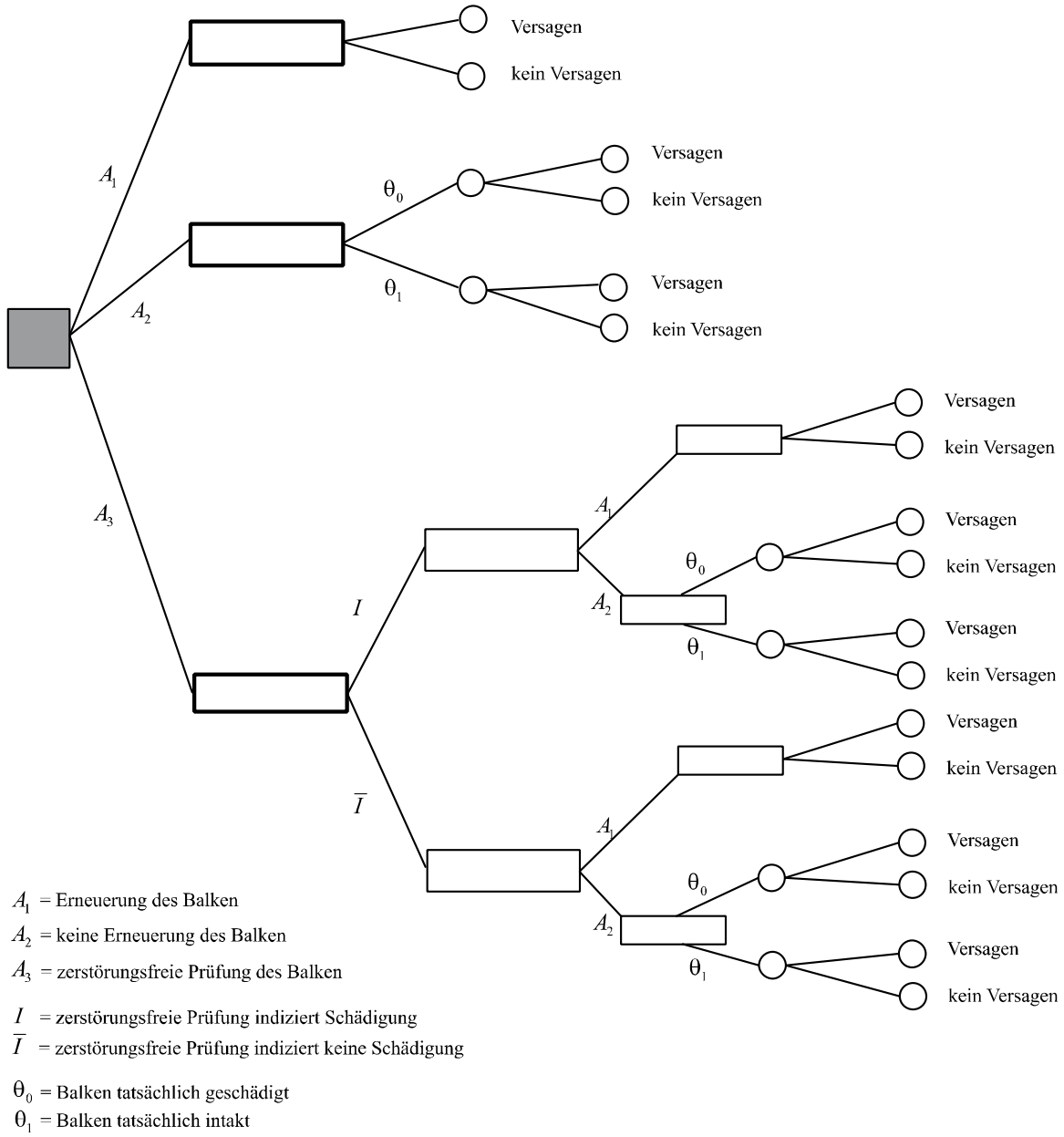


Abb. 2: Skizze des Entscheidungsbaumes als Hilfestellung.



**Aufgabe 3:**

**Zufallsvariablen und Prozesse**

**(20 Punkte)**

Die Firma M produziert eine Folie für die undurchlässige Abdichtung von Baugrund, beispielsweise von Deponien. Aus fabrikationstechnischen Gründen werden  $5 \cdot 20 \text{ [m}^2\text{]}$  grosse Folienbahnen hergestellt, und diese dann vor Ort zur erforderlichen Grösse zusammengeschnitten.

Durch den Transport und die Installation vor Ort können in der Folie kleine Risse entstehen. Die Folie wird deshalb nach dem Einbau durch die Firma eingehend auf diese Fehler kontrolliert. Im Durchschnitt werden fünf Risse auf  $100 \text{ [m}^2\text{]}$  entdeckt und sofort repariert. Aus Erfahrung weiss man aber, dass mit der üblicherweise benutzten Kontrollmethode durchschnittlich 20% aller Risse nicht entdeckt werden.

- a) Bestimmen Sie die Fehlerrate ( $\frac{\text{Anzahl nicht entdeckter Risse}}{\text{[m}^2\text{]}}$ ) nach der Inspektion.
- b) Das Auftreten nicht entdeckter Risse kann als einem Poissonprozess folgend modelliert werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass:
  - i. auf  $1 \text{ [m}^2\text{]}$  mehr als 1 Riss unentdeckt bleibt?
  - ii. auf  $100 \text{ [m}^2\text{]}$  kein Riss unentdeckt bleiben?
- c) In einem Projekt, bei dem unentdeckte Risse schwerwiegende Konsequenzen hätten, soll die Kontrolle so weit verbessert werden, dass eine Folie von  $100 \text{ [m}^2\text{]}$  nach der Inspektion mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $P=0.95$  fehlerfrei ist. Welches ist die maximal tolerierbare Fehlerrate für diese verbesserte Kontrolle?

Die erforderliche Zeit für die Kontrolle einer Folie à  $100 \text{ [m}^2\text{]}$  kann als normalverteilte Zufallsvariable  $T$  modelliert werden, mit  $\mu_T = 60 \text{ [Minuten]}$  und  $\sigma_T = 15 \text{ [Minuten]}$ .

- d) Sei  $Y$  die Summe der einzelnen Zeiten  $T_i$ ;  $i=1,2,\dots,7$  für die Kontrolle von insgesamt 7 Folienbahnen à je  $100 \text{ [m}^2\text{]}$ . Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mu_Y$  und die Standardabweichung  $\sigma_Y$  der Summe der einzelnen Zeiten  $T_i$ . Die Kontrollen der einzelnen Folienbahnen sind als unabhängige Ereignisse zu betrachten.
- e) Da Qualitätssicherung zur Firmenphilosophie gehört, soll dies auch bei der Umsetzung der Anstellungsbedingungen und den Arbeitszeiten verwirklicht werden. So sollen die Mitarbeiter mit einer Wahrscheinlichkeit von  $P=0.95$  nicht mehr als 8 Stunden täglich

arbeiten. Ist dies für jeden beliebigen Tag erfüllt, wenn die Firma von jedem einzelnen Mitarbeiter die Kontrolle von mindestens 7 Folienbahnen täglich verlangt?

**Aufgabe 4:**

**Konfidenzintervalle und Hypothesentests**

**(20 Punkte)**

Zu einer gesamtbetrieblichen Qualitätssicherung gehört unter anderem der Einbezug von Qualitätskriterien bezüglich der Umwelt.

Ein Betrieb, welcher sein Abwasser in einen Fluss leitet, überprüft kontinuierlich die Wasserqualität. Um den Wärme- bzw. Kälteeintrag durch die Abwassereinleitung zu prüfen, misst die zuständige Ingenieurin wöchentlich die Wassertemperatur an festgelegten Stellen des Flusses unterhalb des Betriebes. Im Monat Dezember misst die Ingenieurin  $n=10$  Stichproben und erhält einen Stichprobenmittelwert  $\bar{x}_B = 4.9^\circ\text{C}$  (Grad Celsius) sowie eine erwartungstreue Stichprobenvarianz  $s^2 = 0.71^\circ\text{C}^2$  für die Wassertemperatur.

Die Wassertemperatur kann mit einer Normalverteilung modelliert werden. Sei  $X_B$  die Zufallsvariable für die durch die Abwassereinleitung beeinflusste,  $X_U$  die Zufallsvariable für die unbeeinflusste Wassertemperatur.

- a) Bestimmen Sie das Intervall, in dem der wahre Mittelwert  $\mu_{X_B}$  der beeinflussten Wassertemperatur mit 95% Konfidenz zu erwarten ist. Beachten Sie, dass die Standardabweichung  $\sigma_{X_B}$  nicht bekannt ist.

Wenn der Wärme- bzw. Kälteeintrag des Abwassers die ursprüngliche, unbeeinflusste Wassertemperatur um mehr als  $2^\circ\text{C}$  verändert, werden weitergehende Untersuchungen eingeleitet.

- b) Im unbeeinflussten Zustand würde die Wassertemperatur  $\mu_{X_U} = 2.7^\circ\text{C}$  betragen. Führen Sie einen Hypothesentest durch, um zu prüfen, ob der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}_B = 4.9^\circ\text{C}$  auf einem Signifikanzniveau von 10% dem „wahren Mittelwert“  $\mu_{X_{U+2}} = (2.7^\circ\text{C} + 2^\circ\text{C})$  entspricht. Die Standardabweichung sei gegeben als  $\sigma_{X_U} = \sigma_{X_{U+2}} = 1^\circ\text{C}$ .

**Aufgabe 5:**

**Parameterschätzung, Modellevaluation und Grenzzustandsfunktion (35 Punkte)**

An der deutschen Nordseeküste wird ein alter Schutzdamm auf seine Qualität überprüft. Dabei soll sichergestellt werden, dass er den neuesten Sicherheitsbestimmungen genügt.

Sie sind der Experte und mit der Beurteilung dieses Schutzdamms beauftragt. Sie sollen überprüfen, ob die Höhe des Damms ausreichend ist, und ob der Damm stabil genug ist oder verstärkt werden muss.

Um die benötigte Höhe des Damms bestimmen zu können, soll anhand von Messwerten der letzten 10 Jahre ein Modell für den maximalen jährlichen Wasserstand erstellt werden.

*Tab. 4: Messdaten des maximalen jährlichen Wasserstandes.*

Jahr	Maximaler Wasserstand [ $m$ ]
2008	2.3226
2007	3.9168
2006	2.4014
2005	2.5521
2004	1.6895
2003	2.7953
2002	2.7456
2001	2.1101
2000	2.3062
1999	2.1617

Da Sie während ihres Studiums gelernt haben, dass sich maximale Wasserstände gut mit einer Gumbel-Max-Verteilung repräsentieren lassen, beschliessen sie eine Gumbel-Max-Verteilung an die Messdaten der letzten 10 Jahren anzupassen.

- a) Schätzen Sie die Parameter  $\alpha$  und  $u$  der Gumbel-Max-Verteilung mit der Methode der Momente. Verwenden Sie dazu die Werte aus Tabelle 4 auf der vorangehenden Seite.

Gumbel-Max-Verteilung: 
$$f_x(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha(x-u)} \cdot e^{-e^{-\alpha(x-u)}} \quad (5.1)$$

- b) Führen Sie nun für Ihre ermittelte Verteilung einen Chi-Quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von 10% durch, um beurteilen zu können, ob Ihr Modell verwendet werden kann um die Messdaten zu repräsentieren. Benutzen Sie dazu folgende Tabelle 5.

Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie für diese Aufgabe folgende Parameter: Gumbel-Max-Verteilung mit  $\alpha = 2.5$  und  $u = 2.3$ .

Tab. 5: Tabelle für Chi-Quadrat-Test.

Intervall	Häufigkeit $N_i$	Wahrscheinlichkeit $p_i$ [der Stichprobe in diesem Intervall]	Erwartete Häufigkeit $np_i$	Normalisierte Quadrate der Differenzen
0-2.3				
2.3-2.5				
2.5-2.7				
2.7- $\infty$				
Summe				

- c) Der Schutzdamm hat eine Höhe von 5 Metern. Falls der jährliche maximale Wasserstand höher ist als der Schutzdamm, so wird von einem Versagen des Dammes gesprochen. Es wurde festgelegt, dass die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit des Dammes nicht grösser als  $10^{-5}$  sein darf. Berechnen Sie die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit und entscheiden Sie, ob der Damm erhöht werden muss oder so belassen werden kann.

Verwenden Sie die Gumbel-Max-Verteilung mit den Parametern aus Aufgabe a) um die jährlichen maximalen Wasserstände zu repräsentieren.

Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie für diese Aufgabe folgende Parameter: Gumbel-Max-Verteilung mit  $\alpha = 2.5$  und  $u = 2.3$ .

d) Nebst der Dammhöhe soll auch die Stabilität des Dammes evaluiert werden.

Es wird angenommen, dass die jährliche maximale Belastung  $L$  mit einer normalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden kann. Der Mittelwert ist  $\mu_L = 6'000 \frac{kN}{m^2}$  und die Standardabweichung ist  $\sigma_L = 1'500 \frac{kN}{m^2}$ .

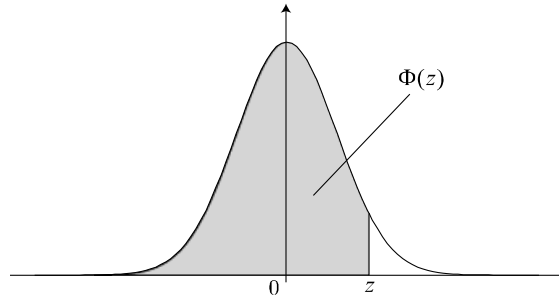
Die Belastbarkeit des Dammes  $R$  kann ebenfalls mit einer normalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden. Der Mittelwert ist  $\mu_R = 30'000 \frac{kN}{m^2}$  und die Standardabweichung ist  $\sigma_R = 6'000 \frac{kN}{m^2}$ .

Die Grenzzustandsfunktion der Stabilität des Dammes ist folgendermassen definiert:  $M = R - L$ , das heisst der Damm bricht (versagt) bei  $M < 0$ .

Es wurde ebenfalls festgelegt, dass die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit des Dammes nicht grösser als  $10^{-5}$  sein darf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Damm im Zeitraum von einem Jahr versagt und entscheiden Sie, ob der Damm verstärkt werden muss oder nicht. Verwenden Sie Tabelle T.4 im Anhang.

**Anhang: Tabellen**

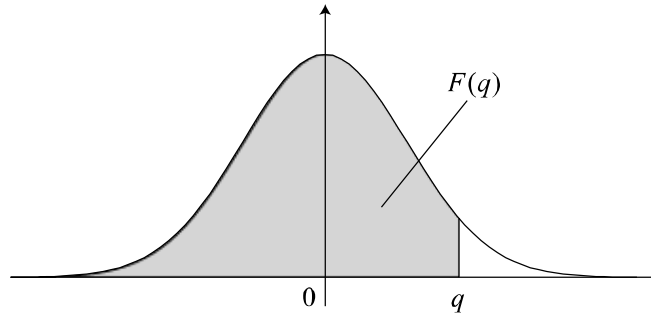
**Tabelle T.1: Kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung**



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	4.20	0.9999867
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	4.30	0.9999915
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	4.40	0.9999946
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	4.50	0.9999966
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	4.60	0.9999979
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	4.70	0.9999987
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	4.80	0.9999992
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	4.90	0.9999995
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	5.00	0.9999997
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		

**Tabelle T.2:** Quantilwerte  $q$  der  $t$ -Verteilung.



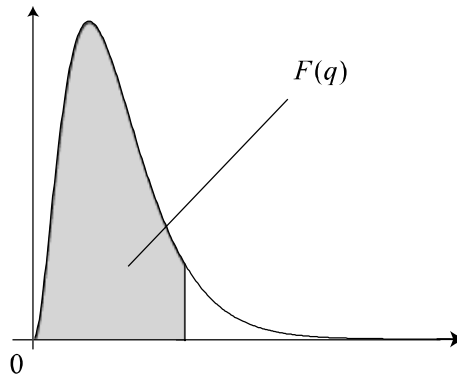
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der  $t$ -Verteilung

$\nu \backslash F(q)$	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
$\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$\nu$ : Freiheitsgrade



**Tabelle T.3:** Quantilwerte  $q$  der Chi-Quadrat-Verteilung

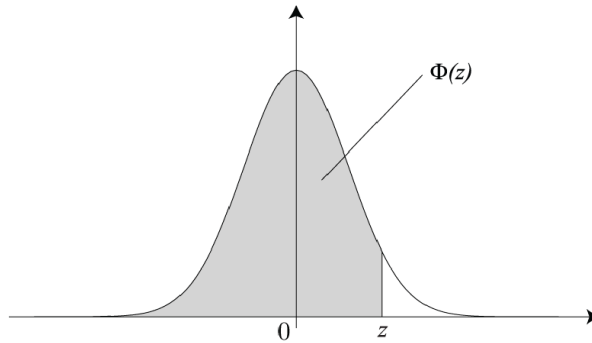


Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Chi-Quadrat-Verteilung

$\nu \backslash F(q)$	0.75	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.999
1	1.3233	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	2.7726	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	4.1083	6.2514	7.8147	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	5.3853	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	6.6257	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	7.8408	10.6446	12.5916	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	9.0371	12.0170	14.0671	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	10.2189	13.3616	15.5073	18.1682	20.0902	21.9550	26.1245
9	11.3888	14.6837	16.9190	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	12.5489	15.9872	18.3070	21.1608	23.2093	25.1882	29.5883
11	13.7007	17.2750	19.6751	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	14.8454	18.5493	21.0261	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
13	15.9839	19.8119	22.3620	25.4715	27.6882	29.8195	34.5282
14	17.1169	21.0641	23.6848	26.8728	29.1412	31.3193	36.1233
15	18.2451	22.3071	24.9958	28.2595	30.5779	32.8013	37.6973
16	19.3689	23.5418	26.2962	29.6332	31.9999	34.2672	39.2524
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
18	21.6049	25.9894	28.8693	32.3462	34.8053	37.1565	42.3124
19	22.7178	27.2036	30.1435	33.6874	36.1909	38.5823	43.8202
20	23.8277	28.4120	31.4104	35.0196	37.5662	39.9968	45.3147
21	24.9348	29.6151	32.6706	36.3434	38.9322	41.4011	46.7970
22	26.0393	30.8133	33.9244	37.6595	40.2894	42.7957	48.2679
23	27.1413	32.0069	35.1725	38.9683	41.6384	44.1813	49.7282
24	28.2412	33.1962	36.4150	40.2704	42.9798	45.5585	51.1786
25	29.3389	34.3816	37.6525	41.5661	44.3141	46.9279	52.6197
26	30.4346	35.5632	38.8851	42.8558	45.6417	48.2899	54.0520
27	31.5284	36.7412	40.1133	44.1400	46.9629	49.6449	55.4760
28	32.6205	37.9159	41.3371	45.4188	48.2782	50.9934	56.8923
29	33.7109	39.0875	42.5570	46.6927	49.5879	52.3356	58.3012
30	34.7997	40.2560	43.7730	47.9618	50.8922	53.6720	59.7031

$\nu$ : Freiheitsgrade

**Table T.4:** Kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, detaillierte Werte im Bereich  $z=[2,5]$



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
2.00	0.97724987	2.76	0.99710993	3.52	0.99978423	4.28	0.99999066
2.02	0.97830831	2.78	0.99728206	3.54	0.99979994	4.30	0.99999146
2.04	0.97932484	2.80	0.99744487	3.56	0.99981457	4.32	0.99999220
2.06	0.98030073	2.82	0.99759882	3.58	0.99982820	4.34	0.99999288
2.08	0.98123723	2.84	0.99774432	3.60	0.99984089	4.36	0.99999350
2.10	0.98213558	2.86	0.99788179	3.62	0.99985270	4.38	0.99999407
2.12	0.98299698	2.88	0.99801162	3.64	0.99986368	4.40	0.99999459
2.14	0.98382262	2.90	0.99813419	3.66	0.99987389	4.42	0.99999506
2.16	0.98461367	2.92	0.99824984	3.68	0.99988338	4.44	0.99999550
2.18	0.98537127	2.94	0.99835894	3.70	0.99989220	4.46	0.99999590
2.20	0.98609655	2.96	0.99846180	3.72	0.99990039	4.48	0.99999627
2.22	0.98679062	2.98	0.99855876	3.74	0.99990799	4.50	0.99999660
2.24	0.98745454	3.00	0.99865010	3.76	0.99991504	4.52	0.99999691
2.26	0.98808937	3.02	0.99873613	3.78	0.99992159	4.54	0.99999719
2.28	0.98869616	3.04	0.99881711	3.80	0.99992765	4.56	0.99999744
2.30	0.98927589	3.06	0.99889332	3.82	0.99993327	4.58	0.99999768
2.32	0.98982956	3.08	0.99896500	3.84	0.99993848	4.60	0.99999789
2.34	0.99035813	3.10	0.99903240	3.86	0.99994331	4.62	0.99999808
2.36	0.99086253	3.12	0.99909574	3.88	0.99994777	4.64	0.99999826
2.38	0.99134368	3.14	0.99915526	3.90	0.99995190	4.66	0.99999842
2.40	0.99180246	3.16	0.99921115	3.92	0.99995573	4.68	0.99999857
2.42	0.99223975	3.18	0.99926362	3.94	0.99995926	4.70	0.99999870
2.44	0.99265637	3.20	0.99931286	3.96	0.99996253	4.72	0.99999882
2.46	0.99305315	3.22	0.99935905	3.98	0.99996554	4.74	0.99999893
2.48	0.99343088	3.24	0.99940235	4.00	0.99996833	4.76	0.99999903
2.50	0.99379033	3.26	0.99944294	4.02	0.99997090	4.78	0.99999912
2.52	0.99413226	3.28	0.99948096	4.04	0.99997327	4.80	0.99999921
2.54	0.99445738	3.30	0.99951658	4.06	0.99997546	4.82	0.99999928
2.56	0.99476639	3.32	0.99954991	4.08	0.99997748	4.84	0.99999935
2.58	0.99505998	3.34	0.99958111	4.10	0.99997934	4.86	0.99999941
2.60	0.99533881	3.36	0.99961029	4.12	0.99998106	4.88	0.99999947
2.62	0.99560351	3.38	0.99963757	4.14	0.99998263	4.90	0.99999952
2.64	0.99585470	3.40	0.99966307	4.16	0.99998409	4.92	0.99999957
2.66	0.99609297	3.42	0.99968689	4.18	0.99998542	4.94	0.99999961
2.68	0.99631889	3.44	0.99970914	4.20	0.99998665	4.96	0.99999965
2.70	0.99653303	3.46	0.99972991	4.22	0.99998778	4.98	0.99999968
2.72	0.99673590	3.48	0.99974929	4.24	0.99998882	5.00	0.99999971
2.74	0.99692804	3.50	0.99976737	4.26	0.99998978		