Basisprüfung B. Sc.

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

HS 2010

Prof. Dr. M. H. Faber

ETH Zürich

Mittwoch, 2. Februar 2011

9:00 – 11:00

Vorname: ....

Name: ....

Stud. Nr.: ....

Studienrichtung: ....

Basisprüfung B. Sc.: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

Datum und Dauer:
Mittwoch, 2. Februar 2011
Beginn: 9:00 Uhr
Zeitdauer: 120 Minuten

Hilfsmittel:
- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, Mitschriften, Ausdrucke etc.) sind erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) sind erlaubt.
- Kommunikationsmittel (z.B. Telefon, Laptop) sind nicht erlaubt.

Administratives:
- Bitte kontrollieren Sie zuerst die Vollständigkeit ihrer Unterlagen:
    - Aufgabenstellung inkl. genereller Informationen und Anhängen 15 Seiten.
    - Papierbogen kariert und gestempelt 4 mal.
- Während der 15-minütigen Einlesezeit dürfen die Lösungsbögen nicht beschrieben werden!
- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Vornamen versehen werden.
- Gewertet werden nur diejenigen Lösungswege und Ergebnisse, welche eindeutig gemäss Aufgabenblatt nummeriert sind und entweder auf die Aufgabenblätter selbst oder auf die karierten, gestempelten Bögen geschrieben werden.
- Nur die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden. Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.

Hinweise:
- Die Prüfung ist so konzipiert, dass alle Aufgaben gelöst werden sollen.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich. Sie können die Aufgabe mit Ihrer Annahme zu Ende lösen.
- Bitte geben Sie Resultate auf mindestens 3 signifikante Stellen genau an.

Inhalt der Prüfung:

Inhalt	Aufgaben	Seite	Punkte
Aufgabe 1	Beschreibende Statistik, Zuverlässigkeitstheorie	3-5	25
Aufgabe 2	Regressionsanalyse, Zufallsprozesse	6-7	30
Aufgabe 3	Modellbildung und –Evaluation	8-10	35
Aufgabe 4	Entscheidungsanalyse	11-12	30
Anhang	Tabellen	13-15	-

Aufgabe 1: Beschreibende Statistik, Zuverlässigkeitstheorie (25 Punkte)

In Tabelle 1.1 sind die jährlichen maximalen Schneehöhen auf dem Uetliberg über einen Zeitraum von 14 Jahren dokumentiert.

Tabelle 1.1 *Jährliche maximale Schneehöhen 1997-2010.*

Jahr	**Maximale Schnee-höhe [cm]**	**Hilfsspalte**
1997	20	
1998	7	
1999	5	
2000	21	
2001	17	
2002	19	
2003	14	
2004	23	
2005	18	
2006	16	
2007	19	
2008	16	
2009	28	
2010	30	

Tabelle 1.2 *Kennwerte des Boxplots.*

Median	
oberes Quartil	
unteres Quartil	
interquartile Differenz	
oberer Nachbarschaftswert	
unterer Nachbarschaftswert	
Ausreisser	

a) *(10 Punkte)*
Skizzieren Sie in Abbildung 1.1 einen Boxplot, der die Verteilung der jährlichen maximalen Schneehöhen beschreibt. Berechnen Sie unter Verwendung von Tabelle 1.2 die relevanten Kennwerte der Boxplots.

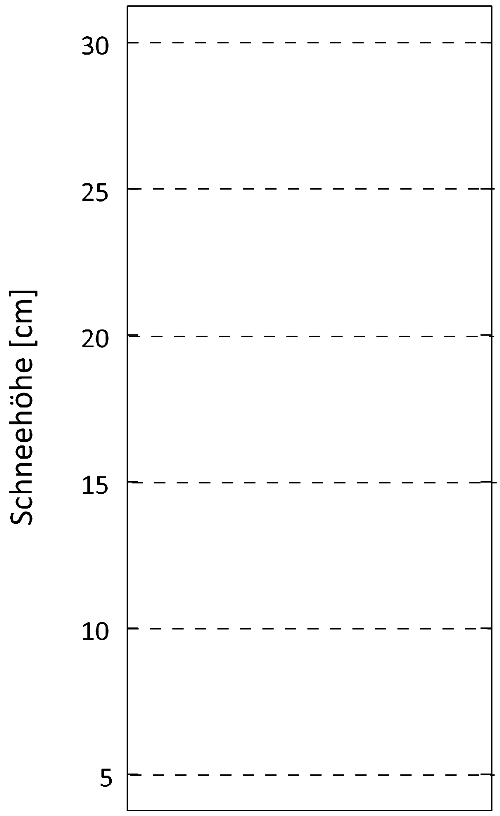


Abbildung 1.1: *Boxplot der jährlichen maximalen Schneehöhen.*

b) *(5 Punkte)*

Alle Dokumentationen der jährlichen maximalen Schneehöhen auf dem Uetliberg seit Beginn der Aufzeichnungen haben einen Mittelwert von $\mu_x = 16.3$ cm und eine Standardabweichung $\sigma_x = 5$ cm.

Überprüfen Sie anhand eines Hypothesentests, ob die Messungen aus Tabelle 1.1 auf einem Signifikanzniveau von 10% dem wahren Mittelwert der Schneehöhen μ_x zuzuordnen sind. Geben Sie das Intervall für den Stichprobenmittelwert an, in dem der Hypothesentest akzeptiert werden kann. Verwenden Sie für den Hypothesentest die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang 1.

Die Dachkonstruktion einer grossen Veranstaltungshalle am Fusse des Uetlibergs versagt, wenn die Sicherheitsmarge $M < 0$ ist. M ist wie folgt definiert:

$$M = B - (E + S)$$

Hierin ist B die Belastbarkeit der Dachkonstruktion, E das Eigengewicht und S die jährliche maximale Schneelast. Alle drei Zufallsvariablen (B, E und S) werden als normalverteilt und voneinander unabhängig angenommen und sind wie folgt in kN definiert:

Zufallsvariable	**Verteilung**
Belastbarkeit B	$N(3000, 450)$
Eigengewicht E	$N(1000, 250)$
Schneelast S	$N(440,110)$

c) *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit der Dachkonstruktion. Verwenden Sie hierfür die Tabelle im Anhang 2 mit den detaillierten Werten der Normalverteilung.

Es wird beschlossen, die Dachkonstruktion so zu verstärken, dass die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit $p_f = 10^{-6}$ beträgt. Die Verstärkung wird durch die normalverteilte Zufallsvariable $V \sim N(\mu_V, 400)$ in kN beschrieben. Die Zufallsvariablen bleiben voneinander unabhängig und die Sicherheitsmarge M ist wie folgt definiert:

$$M = (B + V) - (E + S)$$

d) *(5 Punkte)*
Berechnen Sie den Mittelwert μ_V für die Verstärkung V.

Aufgabe 2: Regressionsanalyse, Zufallsprozesse (30 Punkte)

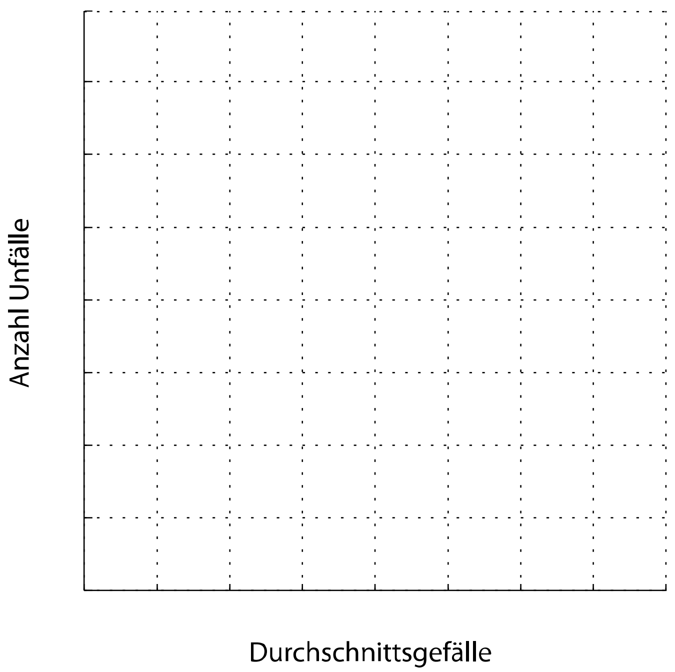
Im Gemeinderat der Stadt Zürich wird eine „familienfreundliche“ Alternative zum beliebten Schlittelweg am Uetliberg diskutiert, da dieser für ungeübte Fahrer zu steil sei. Tabelle 2.1 enthält eine Unfall-Statistik zu den einzelnen Streckenabschnitten des Schlittelwegs.

Tabelle 2.1: *Schlittel-Unfälle am Uetliberg im Winter 2009-2010 nach Streckenabschnitt.*

Strecken- Abschnitt [km]	Durchschnitts- Gefälle x [%]	Anzahl Unfälle y [-]	Hilfsspalte	Hilfsspalte	Hilfsspalte
0-0.5	10.8	8			
0.5-1	9.3	4			
1-1.5	11.3	8			
1.5-2	12.1	14			
2-2.5	12.5	19			
2.5-3	10.0	5			
Hilfszeile					
Hilfszeile					

a) *(5 Punkte)*

Zeichnen Sie ein zweidimensionales Streudiagramm des Durchschnittsgefälles und der Anzahl Unfälle aller Streckenabschnitte aus Tabelle 2.1. Wählen Sie eine geeignete Achsenbeschriftung und zeichnen Sie die von Ihnen vermutete Lage einer Regressionsgeraden in das Streudiagramm.



Erstellen Sie ein lineares Regressionsmodell für die Anzahl Unfälle pro Streckenabschnitt (y) in Abhängigkeit des Durchschnitts-Gefälles (x). Verwenden Sie hierfür die Werte aus Tabelle 2.1 und folgende Regressionsgleichung: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$

b) *(10 Punkte)*

Ermitteln Sie die Regressionskoeffizienten β_0 und β_1 und geben Sie den Mittelwert des Residualwertes an.

Verwenden Sie für die Teilaufgaben c, d und e die folgenden Werte:

$\beta_0 = -30$, $\beta_1 = 4$ und $\sigma_\varepsilon = 2.0$

c) *(4 Punkte)*

Ermitteln Sie die Kovarianzmatrix der Regressionskoeffizienten β_0 und β_1.

Tipp: Die Inverse einer 2x2-Matrix berechnet sich folgendermassen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

d) *(4 Punkte)*

Der neue Familien-Schlittelweg hat eine Länge von 1.6 km und ein konstantes Gefälle von 10.2%. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl Unfälle pro Saison, mit denen gemäss dem Regressionsmodell vom Uetliberg auf dem neuen Weg zu rechnen ist.

e) *(1 Punkt)*

Halten Sie es für sinnvoll, das Regressionsmodell vom Uetliberg auf den neuen Schlittelweg zu übertragen? Begründen Sie Ihre Antwort (1 Satz!).

Antwort:

Aufgrund ihrer langjährigen Erfahrung gehen die Ärzte im Triemli-Spital davon aus, dass es bei 20% der Schlitten-Unfällen zu Knochenbrüchen kommt. Sie nehmen an, dass die Knochenbruch-Wahrscheinlichkeit bei allen Unfällen konstant ist und dass keine Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Unfällen bestehen.

f) *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden zwei Ereignisse:

A Bei 58 Unfällen kommt es in genau 10 Fällen zu Knochenbrüchen.

B Zu Beginn der Saison kommt es frühestens beim 10. Unfall zu Knochenbrüchen.

Aufgabe 3: Modellbildung und -Evaluation (35 Punkte)

Auf dem Uetliberg soll ein neuer Aussichtsturm gebaut werden. Für die Bemessung auf Windbeanspruchung sollen die jährlichen maximalen Windgeschwindigkeiten abgeschätzt werden. Tabelle 3.1 enthält die gemessenen jährlichen maximalen Wind-geschwindigkeiten der letzten 5 Jahre.

Tabelle 3.1: *Gemessenen jährliche maximale Windgeschwindigkeiten.*

Jahr	Jährliche maximale Windgeschwindigkeit [m/s]
2006	25
2007	22.9
2008	32.2
2009	20.9
2010	19

a) *(6 Punkte)*

Sie nehmen an, dass die jährliche maximale Windgeschwindigkeit durch eine Gumbel-Max-Verteilung repräsentiert werden kann. Schätzen Sie anhand der Werte aus Tabelle 3.1 die Parameter α und u der Gumbel-Max-Verteilung mit der Methode der Momente.

Hinweis: Die Gumbel-Max-Verteilung hat die folgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$

$$f_x(x) = \alpha \cdot \exp\left(-\alpha(x-u) - \exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert
σ_X – Standardabweichung
u – Parameter der Verteilung
α – Parameter der Verteilung

Verwenden Sie für die weiteren Aufgaben die folgende Parameter für die Gumbel-Max-Verteilung: $\alpha = 0.2$ ***und*** $u = 20$**.**

b) *(12 Punkte)*

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Kolmogorov-Smirnov Tests und unter Verwendung der Messungen in Tabelle 3.1, ob die $n = 5$ Beobachtungen auf einem Signifikanzniveau von 10% durch die Gumbel-Max-Verteilung repräsentiert werden können. Benutzen Sie dazu folgende Tabelle 3.2. Eine Tabelle mit den kritischen Werten des Kolmogorov-Smirnov Tests finden Sie im Anhang 3.

Tabelle 3.2: *Stichprobenstatistik für Kolmogorov Smirnov Test.*

i	Jährliche maximale Windgeschwindigkeit $\hat{x}_i^o$ [m/s]	$F_o\left(\hat{x}_i^o\right) = \frac{i}{n}$	$F_p\left(\hat{x}_i^o\right)$	$\left\lvert F_o\left(\hat{x}_i^o\right) - F_p\left(\hat{x}_i^o\right)\right\rvert$
1	19			
2	20.9			
3	22.9			
4	25			
5	32.2			

c) *(6 Punkte)*

Um zu überprüfen, ob eine Log-Normalverteilung besser geeignet ist, wurden auch die Parameter dieser Verteilung aus den Daten geschätzt. Die Stichproben-Likelihood für die Log-Normalverteilung mit den geschätzten Parametern ist in der unten stehenden Tabelle angegeben.

Berechnen Sie anhand der Beobachtungen aus Tabelle 3.1 die Stichproben-Likelihood für die Gumbel-Max-Verteilung. Vergleichen Sie die beiden Likelihoods und entscheiden Sie auf dieser Basis, welcher Verteilungstyp die Beobachtungen besser repräsentiert.

Likelihood für Log-Normalverteilung	$1.6482 \cdot 10^{-7}$
Likelihood für Gumbel-Max Verteilung	

Name:

Verwenden Sie für die Aufgaben d-f weiterhin die Gumbel-Max-Verteilung mit den Parametern $\alpha = 0.2$ und $u = 20$.

d) *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Windgeschwindigkeit 35 m/s übersteigt.

e) *(4 Punkte)*

Ermitteln Sie die kumulative Verteilungsfunktion für die 25-jährige maximale Windgeschwindigkeit. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima voneinander unabhängig sind.

f) *(4 Punkte)*

Wie gross ist die Windgeschwindigkeit, die einer erwarteten Wiederkehrperiode von 75 Jahren entspricht?

Aufgabe 4: Entscheidungsanalyse (30 Punkte)

Die Stadt Zürich plant einen Ausbau des Hauptbahnhofes (HB) durch ein zusätzliches Gleis. Voruntersuchungen haben gezeigt, dass der Ausbau langfristig zu einem Gewinn von 2‘000‘000 CHF führen würde. Bei einem massiven Felsuntergrund kostet der Ausbau 1‘000‘000 CHF. Ist der Untergrund nicht massiv (kein Fels), sind die Kosten 2‘600‘000 CHF. Ein Experte schätzt die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Felsuntergrund handelt, auf 35%.

a) *(6 Punkte)*

Sollte der HB aufgrund der vorhandenen Information, also ohne Untersuchung der Bodenverhältnisse, ausgebaut werden? Führen Sie eine a-priori-Entscheidungsanalyse durch und benutzen Sie hierzu den oberen Teil des Entscheidungsbaumes in Abbildung 4.1.

Durch eine Sondierung kann auf die Bodenverhältnisse geschlossen werden. Diese Inspektion ist allerdings mit Unsicherheiten verbunden, siehe Tabelle 4.1:

Tabelle 4.1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten für eine Indikation des Zustands des Untergrundes.

	Tatsächlicher Zustand	
Inspektionsresultat	Fels F	Kein Fels $\overline{F}$
I (Inspektion indiziert Fels)	$P(I\|F)=0.95$	$P(I\|\overline{F})=$
$\overline{I}$ (Inspektion indiziert kein Fels)	$P(\overline{I}\|F)=$	$P(\overline{I}\|\overline{F})=0.61$

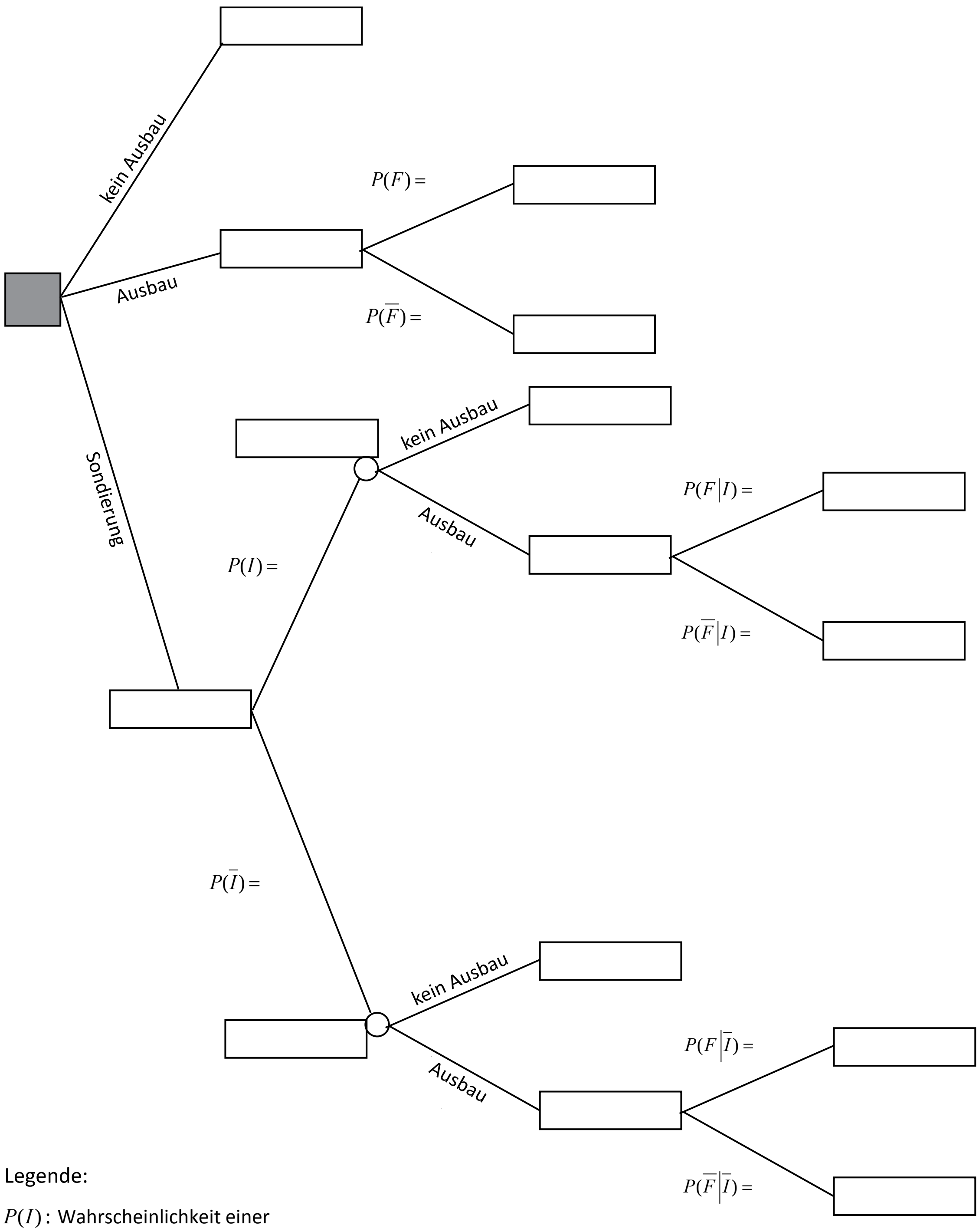
b) *(16 Punkte)*

Berechnen Sie anhand einer prä-posteriori-Entscheidungsanalyse, wie viel eine Sondierung kosten dürfte, damit sie sich lohnt. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben zu den Wahrscheinlichkeiten und den Kosten im Entscheidungsbaum in Abbildung 4.1 sowie in Tabelle 4.1.

Neben dem Gleisausbau steht auch eine Erneuerung der Oberleitungen zur Diskussion (Kosten 120‘000 CHF). Der Gewinn, der sich daraus ergibt, ist abhängig von der Wirtschaftsentwicklung. Ein Wirtschaftsexperte schätzt, dass der Gewinn, mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%, 160‘000 CHF betragen wird. Ansonsten liegt der Gewinn bei 100‘000 CHF.

c) *(8 Punkt)*

Sollten die Oberleitungen aufgrund der vorhandenen Information erneuert werden? Führen Sie eine a-priori-Entscheidungsanalyse durch und zeichnen Sie hierzu den Entscheidungsbaum.



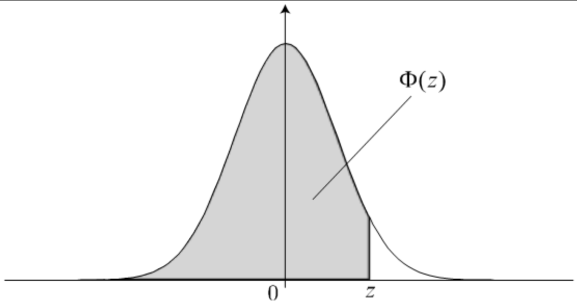
Legende:

$P(I)$: Wahrscheinlichkeit einer Indikation von Fels

$P(F)$: Wahrscheinlichkeit von Fels

***Abbildung 4.1:** Entscheidungsbaum für die Prä-Posteriori-Entscheidungsanalyse.*

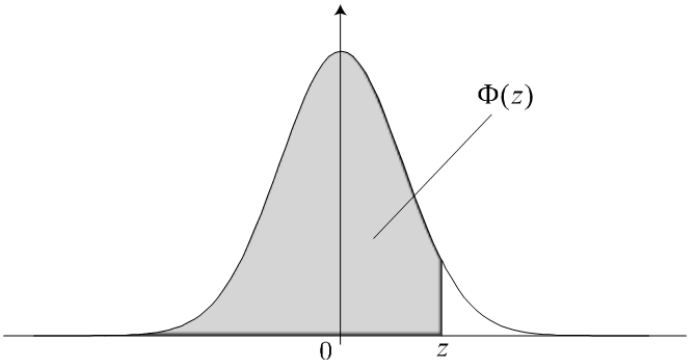
Anhang 1: Kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	4.20	0.9999867
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	4.30	0.9999915
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	4.40	0.9999946
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	4.50	0.9999966
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	4.60	0.9999979
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	4.70	0.9999987
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	4.80	0.9999992
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	4.90	0.9999995
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	5.00	0.9999997
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		

Anhang 2: Kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, detaillierte Werte im Bereich z=[2,5]



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
2.00	0.97724987	2.76	0.99710993	3.52	0.99978423	4.28	0.99999066
2.02	0.97830831	2.78	0.99728206	3.54	0.99979994	4.30	0.99999146
2.04	0.97932484	2.80	0.99744487	3.56	0.99981457	4.32	0.99999220
2.06	0.98030073	2.82	0.99759882	3.58	0.99982820	4.34	0.99999288
2.08	0.98123723	2.84	0.99774432	3.60	0.99984089	4.36	0.99999350
2.10	0.98213558	2.86	0.99788179	3.62	0.99985270	4.38	0.99999407
2.12	0.98299698	2.88	0.99801162	3.64	0.99986368	4.40	0.99999459
2.14	0.98382262	2.90	0.99813419	3.66	0.99987389	4.42	0.99999506
2.16	0.98461367	2.92	0.99824984	3.68	0.99988338	4.44	0.99999550
2.18	0.98537127	2.94	0.99835894	3.70	0.99989220	4.46	0.99999590
2.20	0.98609655	2.96	0.99846180	3.72	0.99990039	4.48	0.99999627
2.22	0.98679062	2.98	0.99855876	3.74	0.99990799	4.50	0.99999660
2.24	0.98745454	3.00	0.99865010	3.76	0.99991504	4.52	0.99999691
2.26	0.98808937	3.02	0.99873613	3.78	0.99992159	4.54	0.99999719
2.28	0.98869616	3.04	0.99881711	3.80	0.99992765	4.56	0.99999744
2.30	0.98927589	3.06	0.99889332	3.82	0.99993327	4.58	0.99999768
2.32	0.98982956	3.08	0.99896500	3.84	0.99993848	4.60	0.99999789
2.34	0.99035813	3.10	0.99903240	3.86	0.99994331	4.62	0.99999808
2.36	0.99086253	3.12	0.99909574	3.88	0.99994777	4.64	0.99999826
2.38	0.99134368	3.14	0.99915526	3.90	0.99995190	4.66	0.99999842
2.40	0.99180246	3.16	0.99921115	3.92	0.99995573	4.68	0.99999857
2.42	0.99223975	3.18	0.99926362	3.94	0.99995926	4.70	0.99999870
2.44	0.99265637	3.20	0.99931286	3.96	0.99996253	4.72	0.99999882
2.46	0.99305315	3.22	0.99935905	3.98	0.99996554	4.74	0.99999893
2.48	0.99343088	3.24	0.99940235	4.00	0.99996833	4.76	0.99999903
2.50	0.99379033	3.26	0.99944294	4.02	0.99997090	4.78	0.99999912
2.52	0.99413226	3.28	0.99948096	4.04	0.99997327	4.80	0.99999921
2.54	0.99445738	3.30	0.99951658	4.06	0.99997546	4.82	0.99999928
2.56	0.99476639	3.32	0.99954991	4.08	0.99997748	4.84	0.99999935
2.58	0.99505998	3.34	0.99958111	4.10	0.99997934	4.86	0.99999941
2.60	0.99533881	3.36	0.99961029	4.12	0.99998106	4.88	0.99999947
2.62	0.99560351	3.38	0.99963757	4.14	0.99998263	4.90	0.99999952
2.64	0.99585470	3.40	0.99966307	4.16	0.99998409	4.92	0.99999957
2.66	0.99609297	3.42	0.99968689	4.18	0.99998542	4.94	0.99999961
2.68	0.99631889	3.44	0.99970914	4.20	0.99998665	4.96	0.99999965
2.70	0.99653303	3.46	0.99972991	4.22	0.99998778	4.98	0.99999968
2.72	0.99673590	3.48	0.99974929	4.24	0.99998882	5.00	0.99999971
2.74	0.99692804	3.50	0.99976737	4.26	0.99998978		

Anhang 3: Kritische Werte des Kolmogorov-Smirnov Tests.

n	α=0.01	0.02	0.05	0.1	0.2
1	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900
2	0.929	0.900	0.842	0.776	0.684
3	0.829	0.785	0.708	0.636	0.565
4	0.734	0.689	0.624	0.565	0.493
5	0.669	0.627	0.563	0.509	0.447
6	0.617	0.577	0.519	0.468	0.410
7	0.576	0.538	0.483	0.436	0.381
8	0.542	0.507	0.454	0.410	0.358
9	0.513	0.480	0.430	0.387	0.339
10	0.489	0.457	0.409	0.369	0.323
11	0.468	0.437	0.391	0.352	0.308
12	0.449	0.419	0.375	0.338	0.296
13	0.432	0.404	0.361	0.325	0.285
14	0.418	0.390	0.349	0.314	0.275
15	0.404	0.377	0.338	0.304	0.266
16	0.392	0.366	0.327	0.295	0.258
17	0.381	0.355	0.318	0.286	0.250
18	0.371	0.346	0.309	0.279	0.244
19	0.361	0.337	0.301	0.271	0.237
20	0.352	0.329	0.294	0.265	0.232
21	0.344	0.321	0.287	0.259	0.226
22	0.337	0.314	0.281	0.253	0.221
23	0.330	0.307	0.275	0.248	0.217
24	0.323	0.301	0.269	0.242	0.212
25	0.317	0.295	0.264	0.238	0.208
26	0.311	0.290	0.259	0.233	0.204
27	0.305	0.284	0.254	0.229	0.200
28	0.300	0.279	0.250	0.225	0.197
29	0.295	0.275	0.246	0.221	0.194
30	0.290	0.270	0.242	0.218	0.190
31	0.285	0.266	0.238	0.214	0.187
32	0.281	0.262	0.234	0.211	0.185
33	0.277	0.258	0.231	0.208	0.182
34	0.273	0.254	0.227	0.205	0.179
35	0.269	0.251	0.224	0.202	0.177
36	0.265	0.247	0.221	0.199	0.174
37	0.262	0.244	0.218	0.196	0.172
38	0.258	0.241	0.215	0.194	0.170
39	0.255	0.238	0.213	0.192	0.168
40	0.252	0.235	0.210	0.189	0.166
$n > 40$	$1.63/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.07/\sqrt{n}$

α : Signifikanzniveau
n : Stichprobengrösse