

## **Basisprüfung B. Sc.**

# **Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung**

**WS 2009/10**

Prof. Dr. M. H. Faber

*ETH Zürich*

**Montag, 08. Februar 2010**

**14:00 – 16:00**

**Vorname:** .....

**Name:** .....

**Stud. Nr.:** .....

**Studienrichtung:** .....

## **Basisprüfung B. Sc.: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften**

### **Datum und Dauer:**

Montag, 08. Februar 2010

Beginn: 14:00 Uhr

Zeitdauer: 120 Minuten

---

### **Hilfsmittel:**

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrücke, etc.) sind erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) sind erlaubt.
- Kommunikationsmittel (z.B. Telefon, Laptop) sind nicht erlaubt.

### **Administratives:**

- Bitte kontrollieren Sie zuerst die Vollständigkeit Ihrer Unterlagen:
  - o Aufgabenstellung inkl. genereller Informationen und Anhängen 15 Seiten.
  - o Papierbogen kariert, gestempelt 5 mal.
- Während der 15-minütigen Einlesezeit dürfen die Lösungsbögen nicht beschrieben werden.
- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Vornamen versehen werden.
- Gewertet werden nur diejenigen Lösungswege und Ergebnisse, welche eindeutig gemäss Aufgabenblatt nummeriert sind, und entweder auf die Aufgabenblätter selbst, oder auf die karierten, gestempelten Bögen geschrieben werden.
- Nur die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden. Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Papierbogen.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.

### **Hinweise:**

- Die Prüfung ist so konzipiert, dass alle Aufgaben gelöst werden sollen.
- Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich. Sie können die Aufgabe mit Ihrer Annahme zu Ende lösen.
- Bitte geben Sie Resultate auf mindestens 3 Nachkommastellen genau an.

### **Inhalt der Prüfung:**

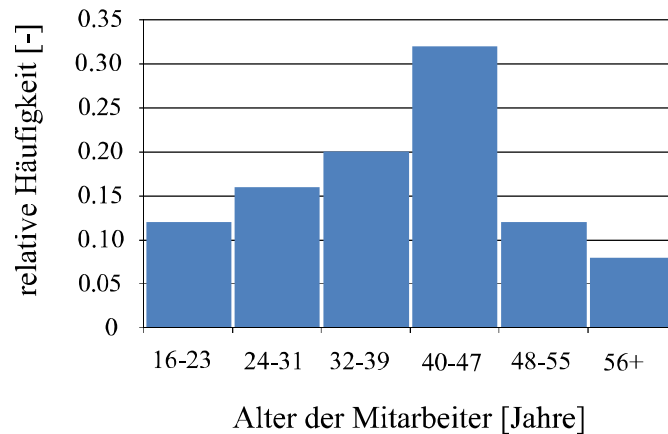
<b>Inhalt</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>Seite</b>	<b>Punkte</b>
Aufgabe 1	Beschreibende Statistik, Hypothesentest	3	25
Aufgabe 2	Stochastische Prozesse	7	20
Aufgabe 3	Modellbildung, Modellevaluation	8	30
Aufgabe 4	Zuverlässigkeitstheorie	10	20
Aufgabe 5	Entscheidungsanalyse	11	25
Anhang	Tabellen	13	-

**Aufgabe 1: Beschreibende Statistik und Hypothesentest (25 Punkte)**

Bei der Feier zum 10-jährigen Jubiläum einer kleinen Baufirma möchte Ihr Chef die Altersverteilung aller Mitarbeiter präsentieren. Um die Firmenentwicklung zu zeigen, sollen die Daten aus dem Jahr 2009 mit denen aus dem Gründungsjahr 1999 verglichen werden.

**Table 1.1:** Alter der Mitarbeiter in den Jahren 1999 und 2009.

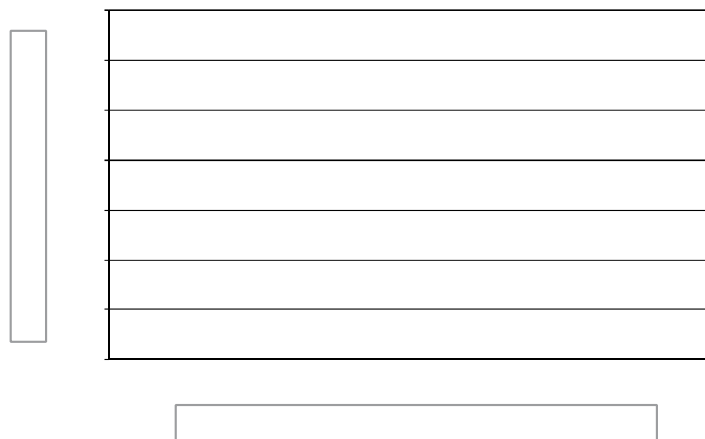
Mitarbeiter $i$	1999 Alter $x_i^o$ [Jahre]	2009 Alter $y_i^o$ [Jahre]	Hilfsspalte	Hilfsspalte
1	16	16		
2	17	17		
3	17	17		
4	18	25		
5	25	25		
6	30	30		
7	33	31		
8	37	33		
9	38	34		
10	40	37		
11	41	37		
12	45	39		
13	46	40		
14	56	40		
15	62	41		
16		42		
17		44		
18		45		
19		46		
20		46		
21		48		
22		54		
23		55		
24		62		
25		75		



**Abbildung 1.1:** Histogramm der Altersverteilung der Mitarbeiter aus dem Jahr 2009.

a) (7 Punkte)

Erstellen Sie ein Histogramm der Altersverteilung der Mitarbeiter aus dem Gründungsjahr 1999. Konstruieren Sie das Histogramm so, dass es sinnvoll mit dem Histogramm für das Jahr 2009 in Abbildung 1.1 verglichen werden kann. Verwenden Sie die Altersangaben aus Tabelle 1.1 (Spalte 2) sowie die folgende Vorlage zur Erstellung des Histogramms (Abbildung 1.2).



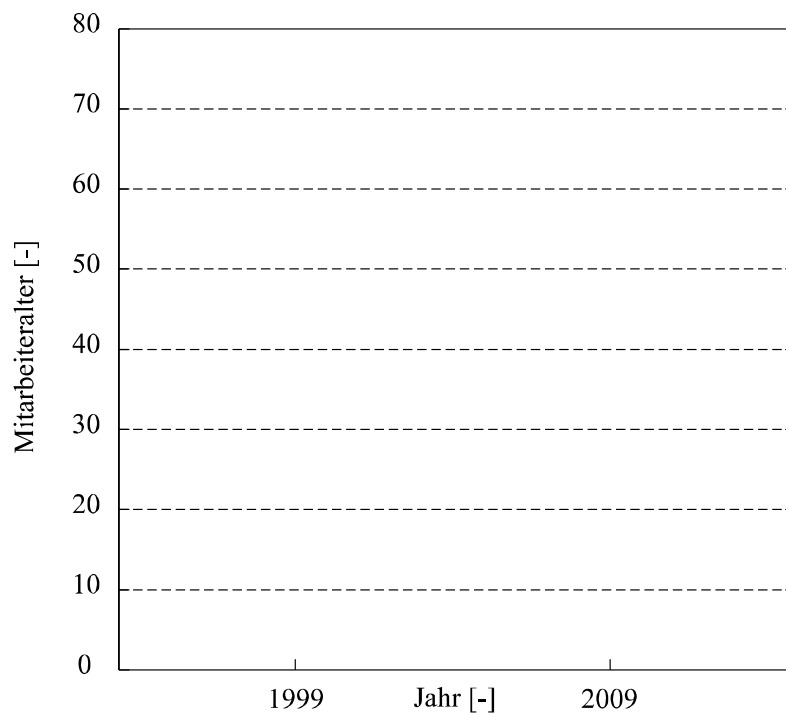
**Abbildung 1.2:** Histogramm der Altersverteilung der Mitarbeiter aus dem Jahr 1999.

b) (8 Punkte)

Die Veränderung der Altersverteilung von 1999 bis heute lässt sich auch anhand von Boxplots zeigen. Skizzieren Sie in Abbildung 1.3 für jedes Jahr einen Boxplot. Verwenden Sie Tabelle 1.2 für die Zusammenstellung der relevanten Kennwerte der Boxplots.

**Tabelle 1.2:** Kennwerte der Boxplots für die Jahre 1999 und 2009.

Kennwerte der Boxplots	1999	2009
Median		
oberes Quartil		
unteres Quartil		
interquartile Differenz		
oberer Nachbarschaftswert		
unterer Nachbarschaftswert		
Ausreisser		



**Abbildung 1.3:** Boxplots der Altersverteilungen der Mitarbeiter in den Jahren 1999 und 2009.

c) (2 Punkte)

Beschreiben Sie kurz mit Worten, welche vergleichenden Aussagen (Jahr 1999 mit 2009) sich anhand der Histogramme und Boxplots treffen lassen, bezüglich

---

Symmetrie / Schiefe

---

Streuung

---

d) (8 Punkte)

Entspricht die Altersverteilung der Mitarbeiter in Ihrer Firma der allgemeinen Situation im Baugewerbe? Sie informieren sich bei der Baugewerkschaft über die aktuelle Altersverteilung und bekommen die Information, dass die Altersverteilung der Mitarbeiter im Baugewerbe mit einer Normalverteilung repräsentiert werden kann. Der Mittelwert beträgt  $\mu_{bau} = 42.5$  Jahre und die Standardabweichung  $\sigma_{bau} = 7.8$  Jahre. Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert  $\bar{x}_{2009}$  der Altersverteilung der Bauarbeiter in der Firma im Jahr 2009 in Tabelle 1 (Spalte 3) und überprüfen Sie mit Hilfe eines Hypothesentests, ob die Nullhypothese  $H_0 : \mu_{bau} = \mu_{2009}$  auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  verworfen werden kann.

Geben Sie das Intervall für den Stichprobenmittelwert an, in welchem der Hypothesentest akzeptiert werden kann. Verwenden Sie hierfür die Tabelle im Anhang 1.

**Aufgabe 2: Stochastische Prozesse**

**(20 Punkte)**

Hilfsarbeiter Klaus benötigt dringend Geld, um die Semestergebühren seines Bauingenieurstudiums bezahlen zu können. Deswegen hofft er auf einen Lohnzuschlag für mindestens zwei Schlechtwettertage.

*Annahme:* Das Wetter verschiedener Tage ist voneinander unabhängig.

a) (7 Punkte)

Die „Schlechtwetter-Wahrscheinlichkeit“ eines beliebigen Tages schätzt Klaus der Jahreszeit entsprechend auf  $p_s = 0.2$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden zwei Ereignisse:

*A* Bis zur nächsten Lohnauszahlung in 12 Arbeitstagen gibt es mindestens zweimal eine Schlechtwetterzulage.

*B* Schlechtwettertage gibt es erst wieder nach dem Stichtag in 12 Arbeitstagen.

b) (4 Punkte)

Die Schlechtwetterzulage beträgt  $80 \text{ SFr} / \text{Tag}$ . Berechnen Sie den Erwartungswert des Lohnzuschlages  $Z$ , den Klaus in 4 Wochen (20 Arbeitstagen) durch Schlechtwetterzulagen erwirtschaften kann.

c) (8 Punkte)

Nehmen Sie nun an, das Auftreten von Schlechtwettertagen lässt sich mit einem homogenen Poissonprozess mit der Intensität  $\nu(t) = 0.2 / \text{Tag}$  beschreiben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(A)$  und  $P(B)$  erneut. Berechnen Sie die absolute Abweichung Ihrer Ergebnisse von denen aus Teilaufgabe a).

d) (1 Punkt)

Was denken Sie: Ist die Modellierung mit einem Poissonprozess in diesem Fall angemessen? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort (1 Satz!).

---

---

---

**Aufgabe 3: Modellbildung, Modellevaluation (30 Punkte)**

Ein unter Denkmalschutz stehendes Gebäude wird renoviert. Unter anderem muss eine Drainage, also ein Kanal zur Ableitung von Regenwasser, verlegt werden. Um die benötigte Grösse der Drainage abzuschätzen, soll anhand von Messwerten der letzten 6 Jahre ein Modell für den maximalen jährlichen Niederschlag erstellt werden.

Tab. 3.1: Messdaten des maximalen jährlichen Niederschlags.

Jahr	Maximaler Niederschlag [mm / h]	Hilfsspalte	Hilfsspalte
2009	75		
2008	59		
2007	74		
2006	59		
2005	82		
2004	61		

a) (6 Punkte)

Schätzen Sie die Parameter  $\alpha$  und  $u$  der Gumbel-Max-Verteilung (Gleichung (3.1)-(3.4)) mit der Methode der Momente. Verwenden Sie dazu die Werte aus Tabelle 3.1.

Gumbel max Dichtefunktion:  $f_x(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha(x-u)} \cdot e^{-e^{-\alpha(x-u)}}$  (3.1)

Gumbel max Verteilungsfunktion:  $F_x(x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}}$  (3.2)

Erwartungswert  $\mu = u + \frac{0.577216}{\alpha}$  (3.3)

Streuung  $\sigma = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$  (3.4)



Verwenden Sie zur Berechnung der restlichen Teilaufgaben b) bis d) folgende Parameter für die Gumbel-Max-Verteilung:  $\alpha = 0.12$  und  $u = 65$ .

Es wird angenommen, dass diese Parameter aus den Messdaten (Tabelle 3.1) geschätzt wurden.

b) (16 Punkte)

Führen Sie für die Gumbel-Max-Verteilung einen Chi-Quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von 10% durch. Beurteilen Sie so, ob Ihr Modell die Messdaten gut repräsentiert. Benutzen Sie hierfür Tabelle 3.2 und die entsprechende Tabelle im Anhang 3.

Tab. 3.2: Tabelle für Chi-Quadrat-Test.

Intervall $x_i$	Anzahl Beobachtungen $N_i$	Vorausgesagte Wahrscheinlichkeit $p_i = p(x_i)$	Vorausgesagte Häufigkeit $np_i$	Normalisierte Quadrate der Differenzen
0-60				
60-70				
70-80				
80- $\infty$				
Summe				

c) (2 Punkte)

Um zu überprüfen, ob eine Lognormalverteilung die Messdaten besser repräsentiert, haben Sie die Parameter für eine Lognormalverteilung geschätzt, einen Chi-Quadrat Test durchgeführt und die Likelihoods für beide Verteilungen berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Begründen Sie kurz, für welche Verteilung Sie sich anhand dieser Ergebnisse entscheiden.

Tab. 3.3: Ergebnisse des Chi-Quadrat-Tests und Likelihoods.

	Gumbel-Max-Verteilung	Lognormalverteilung
Stichprobenstatistik $\chi_m^2$		1.4377
Likelihood	$0.4090 \cdot 10^{-9}$	$0.3825 \cdot 10^{-9}$

d) (6 Punkte)

Verwenden Sie die Gumbel-Max-Verteilung mit den Parametern  $\alpha = 0.12$  und  $u = 65$ , um die jährliche maximale Niederschlagsmenge abzuschätzen, welche einer 80-jährigen Wiederkehrperiode entspricht.

**Aufgabe 4: Zuverlässigkeitstheorie (20 Punkte)**

Während der Renovation eines dreistöckigen Gebäudes soll die Zuverlässigkeit des stützenden Mauerwerks im Erdgeschoss des Gebäudes abgeschätzt werden.

Die Sicherheitsmarge  $Z$  der Stabilität des Mauerwerks ist wie folgt definiert:

$$Z = W - (3G + N_1 + N_2 + N_3 + S).$$

Das heisst, das Mauerwerk versagt bei  $Z < 0$ .

Es wird angenommen, dass die Zufallsvariablen voneinander unabhängig sind und jeweils mit einer Normalverteilung repräsentiert werden können. Die Mittelwerte und Standardabweichungen sind in Tabelle 4.1 aufgeführt:

Tabelle 4.1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zufallsvariablen.

Zufallsvariable	Mittelwert	Standardabweichung
Widerstand $W$ [kN]	10'000	1'000
Eigengewicht pro Stockwerk $G$ [kN]	1'000	300
Nutzlast pro Stockwerk $N$ [kN]	500	100
Schneelast $S$ [kN]	600	200

- a) (6 Punkte)  
Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der zusammengesetzten Zufallsvariable  $Z$ .
  
- b) (6 Punkte)  
Bestimmen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit des Mauerwerks. Verwenden Sie hierfür die Tabelle im Anhang 2 mit den detaillierten Werten der Standardnormalverteilung.

Da die Versagenswahrscheinlichkeit zu hoch ist, soll das Mauerwerk verstärkt werden. Die Verstärkung  $V$  wird durch eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung von 500 [kN] repräsentiert und lässt sich folgendermassen in die Sicherheitsmarge  $Z$  integrieren:

$$Z = (W + V) - (3G + N_1 + N_2 + N_3 + S)$$

- c) (8 Punkte)  
Bestimmen Sie den Mittelwert der Verstärkung so, dass die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit des Mauerwerks  $p_f = 10^{-5}$  entspricht.

**Aufgabe 5: Entscheidungsanalyse**

**(25 Punkte)**

Für den Bau einer grossen Tiefgarage muss die Baugrube ausgehoben werden. Der Bauleiter befürchtet einen plötzlichen Wassereinbruch in die Baugrube während der Bauzeit.

a) (5 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit eines Wassereinbruchs schätzt der Bauleiter auf  $P(W) = 0.2$ . Eine künstliche Absenkung des Grundwasserspiegels durch eine Wasserhaltung kann einen Wassereinbruch mit Sicherheit verhindern, kostet jedoch 250.000 SFr. Die Kosten im Falle eines Wassereinbruches betragen 1 Mio SFr. Wie würden Sie an Stelle des Projektleiters entscheiden? Verwenden Sie den oberen Teil des Entscheidungsbaumes in Abbildung 5.1.

Die Wahrscheinlichkeit eines Wassereinbruchs lässt sich genauer bestimmen, wenn bekannt ist, welcher Wasserdruck im Grundwasser besteht:

$$P(W|H) = 0.4 \text{ bei „hohem“ Wasserdruck (Zustand } H \text{)}$$

$$P(W|N) = 0 \text{ bei „niedrigem“ Wasserdruck (Zustand } N \text{)}$$

Die A priori Wahrscheinlichkeit für „hohen“ Wasserdruck ist  $P(H) = 0.5$ .

Zur Bestimmung des Wasserdruckes lässt der Bauleiter eine verrohrte Bohrung bis zum Grundwasserreservoir erstellen. Aus der Höhe der aufsteigenden Wassersäule kann der Wasserdruck abgeschätzt werden. Je nach wahren Zustand ( $H$  oder  $N$ ) lässt sich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass die Wassersäule um mehr als  $3m$  steigt. Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

**Tabelle 5.1:** Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse abhängig vom wahren Zustand.

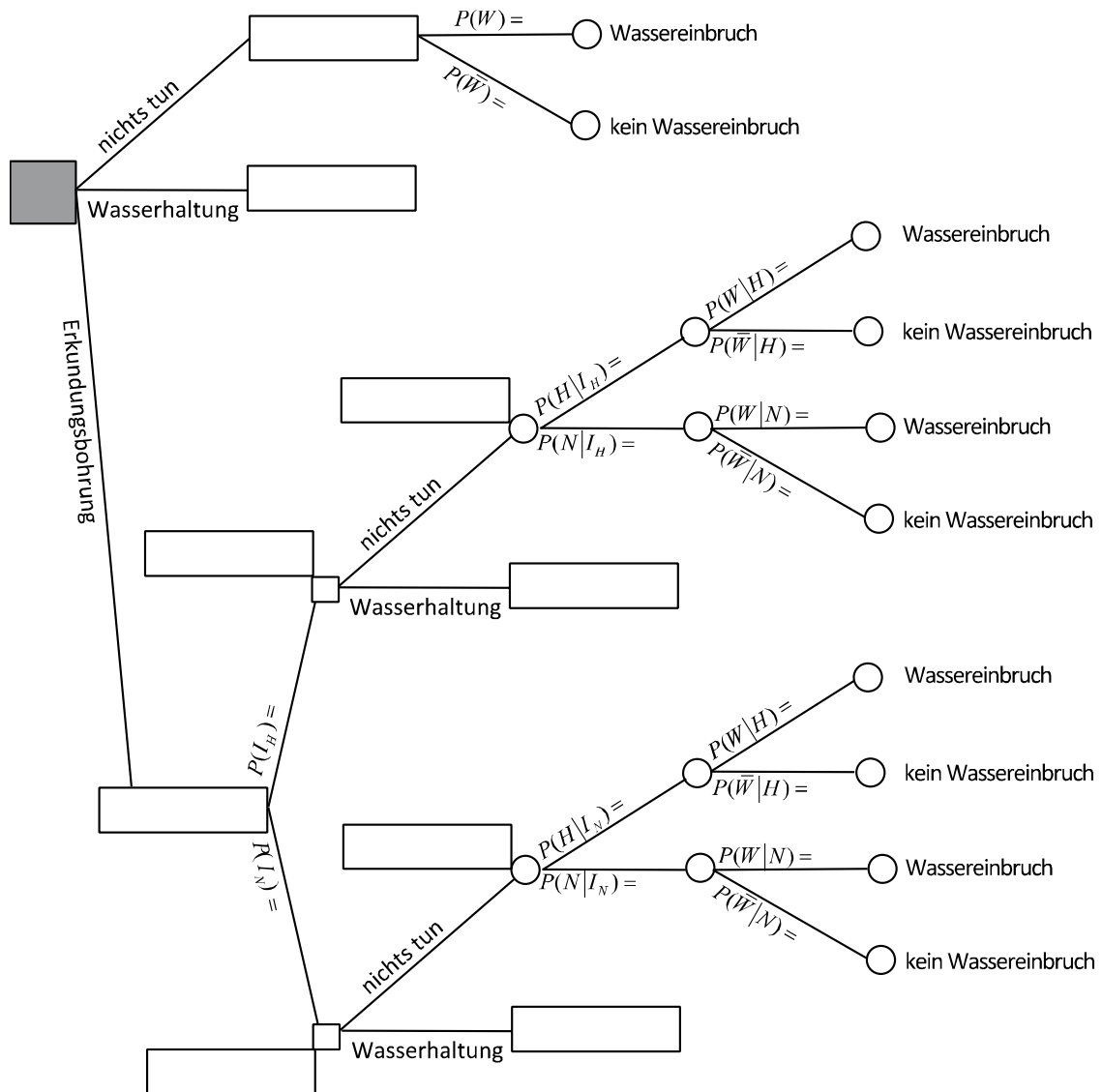
Messergebnis	Wasserdruck im Grundwasser	
	$H$ „hoher“ Wasserdruck	$N$ „niedriger“ Wasserdruck
$I_H$ „hohe“ Wassersäule $> 3m$	$P(I_H H) = 0.8$	$P(I_H N) = 0.3$
$I_N$ „niedrige“ Wassersäule $\leq 3m$	$P(I_N H) = 0.2$	$P(I_N N) = 0.7$

b) (10 Punkte)

Die Messung ergibt, dass die Wassersäule um mehr als  $3m$  gestiegen ist. Wie würden Sie nun an der Stelle des Projektleiters entscheiden? Tragen Sie hierfür alle benötigten Wahrscheinlichkeiten und Kosten in den Entscheidungsbaum in Abbildung 5.1 ein.

c) (10 Punkte)

Bestimmen Sie anhand einer Pre-posteriori-Entscheidungsanalyse, wie viel die verrohrte Bohrung für die Wasserdruckmessung maximal kosten darf, damit sich dieser zusätzlich Aufwand finanziell lohnt. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben zu den Wahrscheinlichkeiten und den Kosten im Entscheidungsbaum in Abbildung 5.1.

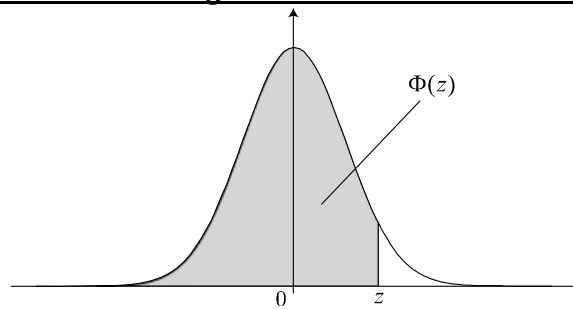


Ereignisse:

- $W$  Wassereinbruch in der Baugrube
- $I_H$  Messergebnis: hohe Wassersäule
- $H$  Grundwasser: hoher Wasserdruck
- $I_N$  Messergebnis: niedrige Wassersäule
- $N$  Grundwasser: niedriger Wasserdruck

Abbildung 5.1: Entscheidungsbaum.

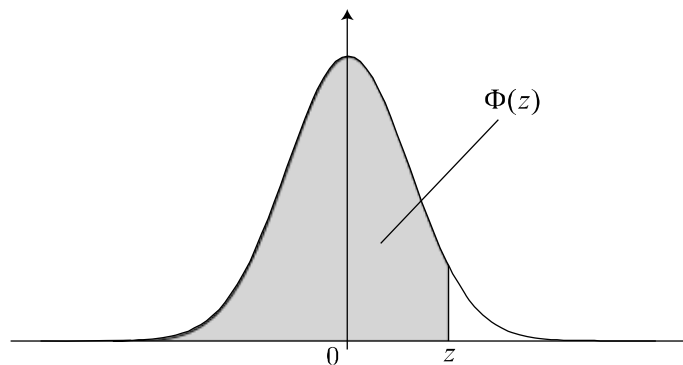
**Anhang 1: Kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.**



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	4.20	0.9999867
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	4.30	0.9999915
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	4.40	0.9999946
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	4.50	0.9999966
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	4.60	0.9999979
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	4.70	0.9999987
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	4.80	0.9999992
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	4.90	0.9999995
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	5.00	0.9999997
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		

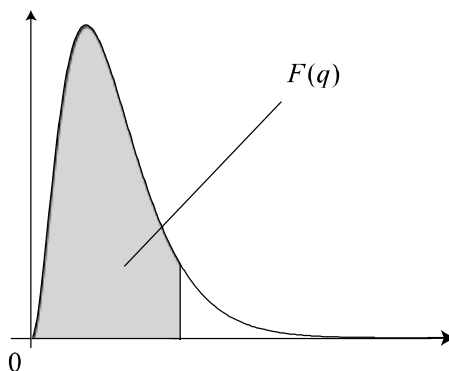
**Anhang 2: Kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, detaillierte Werte im Bereich  $z=[2,5]$ .**



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
2.00	0.97724987	2.76	0.99710993	3.52	0.99978423	4.28	0.99999066
2.02	0.97830831	2.78	0.99728206	3.54	0.99979994	4.30	0.99999146
2.04	0.97932484	2.80	0.99744487	3.56	0.99981457	4.32	0.99999220
2.06	0.98030073	2.82	0.99759882	3.58	0.99982820	4.34	0.99999288
2.08	0.98123723	2.84	0.99774432	3.60	0.99984089	4.36	0.99999350
2.10	0.98213558	2.86	0.99788179	3.62	0.99985270	4.38	0.99999407
2.12	0.98299698	2.88	0.99801162	3.64	0.99986368	4.40	0.99999459
2.14	0.98382262	2.90	0.99813419	3.66	0.99987389	4.42	0.99999506
2.16	0.98461367	2.92	0.99824984	3.68	0.99988338	4.44	0.99999550
2.18	0.98537127	2.94	0.99835894	3.70	0.99989220	4.46	0.99999590
2.20	0.98609655	2.96	0.99846180	3.72	0.99990039	4.48	0.99999627
2.22	0.98679062	2.98	0.99855876	3.74	0.99990799	4.50	0.99999660
2.24	0.98745454	3.00	0.99865010	3.76	0.99991504	4.52	0.99999691
2.26	0.98808937	3.02	0.99873613	3.78	0.99992159	4.54	0.99999719
2.28	0.98869616	3.04	0.99881711	3.80	0.99992765	4.56	0.99999744
2.30	0.98927589	3.06	0.99889332	3.82	0.99993327	4.58	0.99999768
2.32	0.98982956	3.08	0.99896500	3.84	0.99993848	4.60	0.99999789
2.34	0.99035813	3.10	0.99903240	3.86	0.99994331	4.62	0.99999808
2.36	0.99086253	3.12	0.99909574	3.88	0.99994777	4.64	0.99999826
2.38	0.99134368	3.14	0.99915526	3.90	0.99995190	4.66	0.99999842
2.40	0.99180246	3.16	0.99921115	3.92	0.99995573	4.68	0.99999857
2.42	0.99223975	3.18	0.99926362	3.94	0.99995926	4.70	0.99999870
2.44	0.99265637	3.20	0.99931286	3.96	0.99996253	4.72	0.99999882
2.46	0.99305315	3.22	0.99935905	3.98	0.99996554	4.74	0.99999893
2.48	0.99343088	3.24	0.99940235	4.00	0.99996833	4.76	0.99999903
2.50	0.99379033	3.26	0.99944294	4.02	0.99997090	4.78	0.99999912
2.52	0.99413226	3.28	0.99948096	4.04	0.99997327	4.80	0.99999921
2.54	0.99445738	3.30	0.99951658	4.06	0.99997546	4.82	0.99999928
2.56	0.99476639	3.32	0.99954991	4.08	0.99997748	4.84	0.99999935
2.58	0.99505998	3.34	0.99958111	4.10	0.99997934	4.86	0.99999941
2.60	0.99533881	3.36	0.99961029	4.12	0.99998106	4.88	0.99999947
2.62	0.99560351	3.38	0.99963757	4.14	0.99998263	4.90	0.99999952
2.64	0.99585470	3.40	0.99966307	4.16	0.99998409	4.92	0.99999957
2.66	0.99609297	3.42	0.99968689	4.18	0.99998542	4.94	0.99999961
2.68	0.99631889	3.44	0.99970914	4.20	0.99998665	4.96	0.99999965
2.70	0.99653303	3.46	0.99972991	4.22	0.99998778	4.98	0.99999968
2.72	0.99673590	3.48	0.99974929	4.24	0.99998882	5.00	0.99999971
2.74	0.99692804	3.50	0.99976737	4.26	0.99998978		

**Anhang 3: Quantile  $q$  der Chi-Quadrat-Verteilung.**



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Chi-Quadrat-Verteilung

$\nu \backslash F(q)$	0.75	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.999
1	1.3233	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	2.7726	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	4.1083	6.2514	7.8147	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	5.3853	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	6.6257	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	7.8408	10.6446	12.5916	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	9.0371	12.0170	14.0671	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	10.2189	13.3616	15.5073	18.1682	20.0902	21.9550	26.1245
9	11.3888	14.6837	16.9190	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	12.5489	15.9872	18.3070	21.1608	23.2093	25.1882	29.5883
11	13.7007	17.2750	19.6751	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	14.8454	18.5493	21.0261	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
13	15.9839	19.8119	22.3620	25.4715	27.6882	29.8195	34.5282
14	17.1169	21.0641	23.6848	26.8728	29.1412	31.3193	36.1233
15	18.2451	22.3071	24.9958	28.2595	30.5779	32.8013	37.6973
16	19.3689	23.5418	26.2962	29.6332	31.9999	34.2672	39.2524
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
18	21.6049	25.9894	28.8693	32.3462	34.8053	37.1565	42.3124
19	22.7178	27.2036	30.1435	33.6874	36.1909	38.5823	43.8202
20	23.8277	28.4120	31.4104	35.0196	37.5662	39.9968	45.3147
21	24.9348	29.6151	32.6706	36.3434	38.9322	41.4011	46.7970
22	26.0393	30.8133	33.9244	37.6595	40.2894	42.7957	48.2679
23	27.1413	32.0069	35.1725	38.9683	41.6384	44.1813	49.7282
24	28.2412	33.1962	36.4150	40.2704	42.9798	45.5585	51.1786
25	29.3389	34.3816	37.6525	41.5661	44.3141	46.9279	52.6197
26	30.4346	35.5632	38.8851	42.8558	45.6417	48.2899	54.0520
27	31.5284	36.7412	40.1133	44.1400	46.9629	49.6449	55.4760
28	32.6205	37.9159	41.3371	45.4188	48.2782	50.9934	56.8923
29	33.7109	39.0875	42.5570	46.6927	49.5879	52.3356	58.3012
30	34.7997	40.2560	43.7730	47.9618	50.8922	53.6720	59.7031