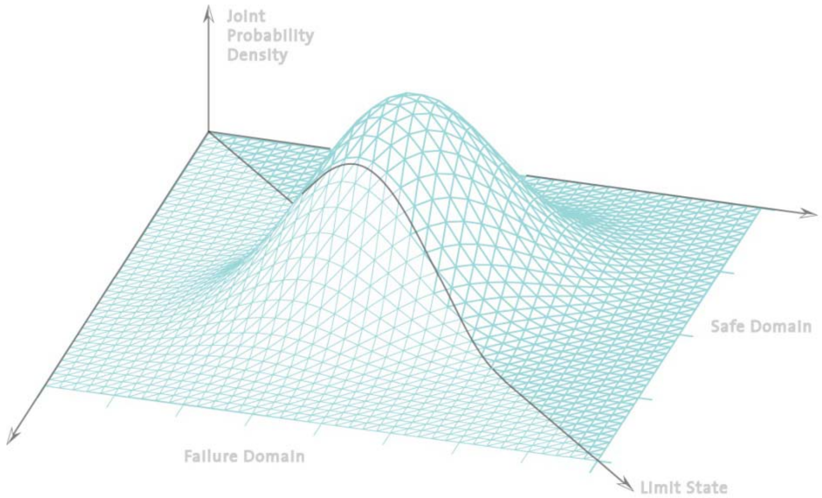


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber

Am Donnerstag (29. April):
Vorlesung!
Start 7:45 Uhr, HIL E 4

Inhalt der heutigen Vorlesung

- Konfidenzintervalle
- statistische Signifikanztests
- Auswahl einer Verteilungsfunktion: Wahrscheinlichkeitspapier
- Schätzung und Modellentwicklung:
  - Schätzung der Verteilungsparameter
  - Methode der Momente
  - Methode der Maximum Likelihood

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Wir haben gesehen, dass Schätzer z.B. des Mittelwertes mit statistischen Unsicherheiten assoziiert sind, und wir haben ihren Mittelwert und ihre Varianz bestimmt.
- Basierend auf diesen Informationen ist es uns möglich, ein Konfidenzintervall für die Schätzer zu bestimmen.
- Konfidenzintervalle können als Intervalle verstanden werden, innerhalb welcher z.B. der Mittelwert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gefunden werden kann.

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Wir können ein Konfidenzintervall z.B. für den Mittelwert erstellen.
- Für den Fall, dass der Mittelwert unsicher und die Varianz bekannt ist:

  Aufgrund von n Beobachtungen lässt sich der Mittelwert schätzen als (normalverteilte) Zufallsvariable mit Mittelwert gleich $\overline{X}$ und Standardabweichung $\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Durch Transformation erhalten wir die standardnormalverteilte Zufallsvariable

$$\frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

Das zweiseitige und symmetrische Konfidenzintervall des Mittelwertes ist gegeben durch:

Stichprobenmittelwert

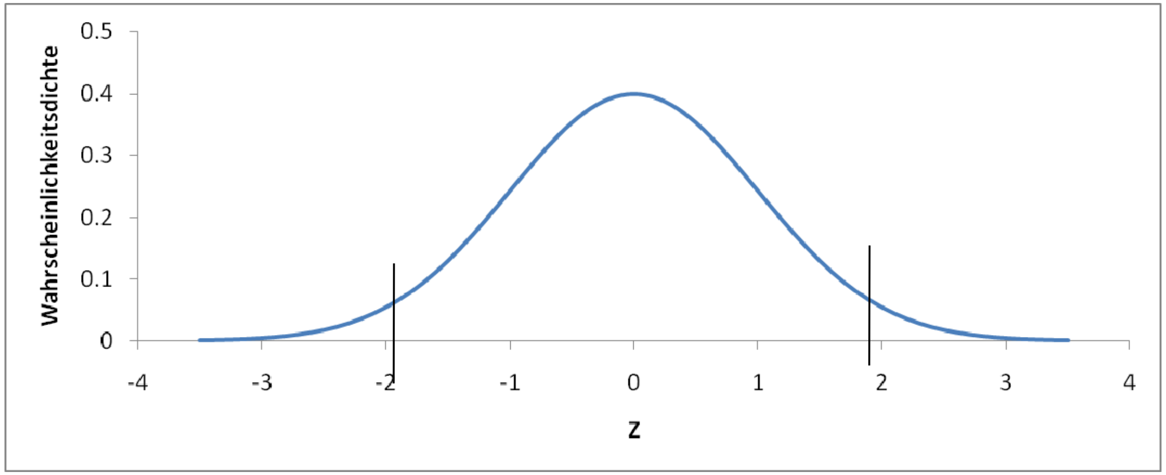
wahrer Mittelwert

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Anzahl Stichproben

bekannte Standardabweichung

Signifikanzniveau



Konfidenzintervalle für Schätzer

Das Konfidenzintervall definiert ein Intervall, in dem der Stichprobenmittelwert mit der Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ liegt.

$$P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Anzahl Stichproben

Bekannte Standardabweichung

Wahrer Mittelwert

Stichprobenmittelwert

Das Konfidenzintervall kann, durch die Annahme, dass der Mittelwert normalverteilt ist, wie folgt bestimmt werden:

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{0.05}{2}\right) = 1.96$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

Für den Fall, dass $\alpha = 0.05$, $n = 16$ und $\sigma_X = 20$ erhalten wir

$$P\left[-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu_X}{20\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1.96\right] = 1 - 0.05$$

$$P\left[-9.8 < \bar{X} - \mu_X < 9.8\right] = 0.95$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Wenn wir beobachten, dass der Stichprobenmittelwert z.B. gleich 400 ist, wissen wir, dass der wahre Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 innerhalb des Intervalles liegt.

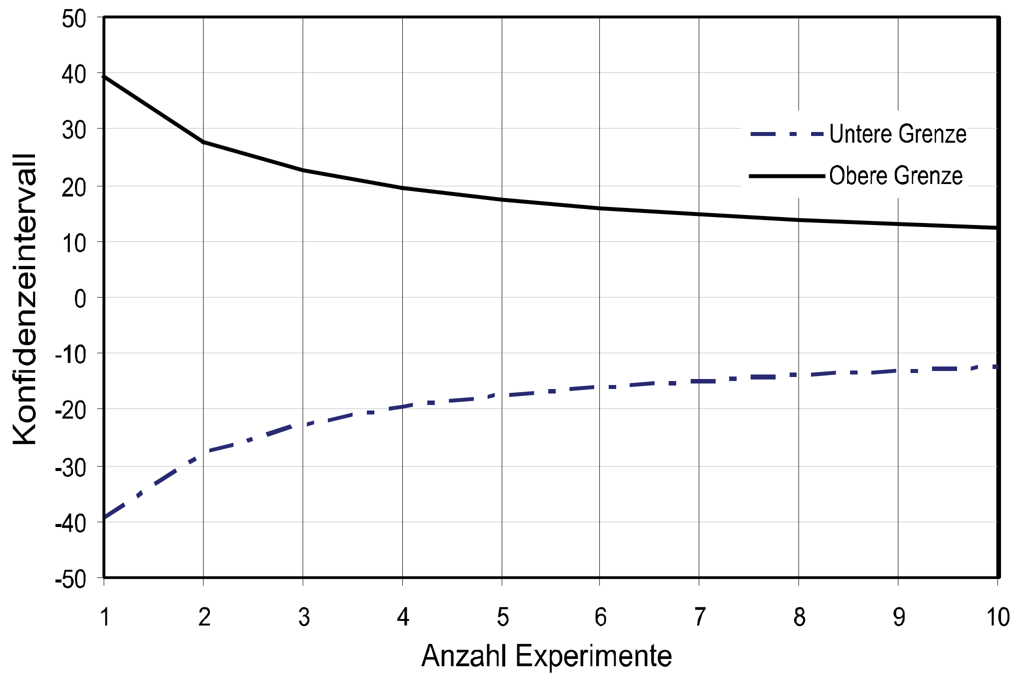
$$P\left[-9.8 < \overline{X} - \mu_X < 9.8\right] = 0.95$$

$$390.2 < \mu_X < 409.8$$

- Normalerweise werden Konfidenzintervalle für Mittelwert, Varianz und charakteristische Werte (Fraktilwerte) in Betracht gezogen.
- Das Konfidenzintervall repräsentiert / beschreibt die (statistische) Unsicherheit, welche durch zu wenig Daten entsteht.

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Die Anzahl verfügbarer Daten hat einen signifikanten Einfluss auf das Konfidenzintervall.
- Unter Verwendung des vorherigen Beispiels ($\sigma_X = 20$) ist in der folgenden Graphik die Abhängigkeit des Konfidenzintervalls von der Anzahl der Experimente n illustriert.



Statistische Signifikanztests

Dilemma:

Man muss einfache Rückschlüsse ziehen, die jedoch nur auf einer begrenzten Datenmenge mit einer hohen Variabilität basieren.

Beispiele:

Es sollen ein paar "vor Ort" – Tests durchgeführt werden, um ein Modell für die Bodenfestigkeiten zu verifizieren.

Das Verkehrsaufkommen auf einer Brücke soll beobachtet werden, um zu überprüfen, ob die vorherigen Annahmen diesbezüglich zutreffend sind.

Grundwasserproben sollen entnommen werden, um die Trinkwasserqualität zu bestätigen.

Statistische Signifikanztests

Es ist wichtig, dass diese Rückschlüsse anhand konsistenter und transparenter Grundlagen gezogen werden. So sollten die Rückschlüsse alle Beweismittel (Daten) berücksichtigen und gegebene Abhängigkeiten (welcher Beweis bedingt welchen Rückschluss) mit einbeziehen.

Ein häufig angewandter und hilfreicher Weg, um solche Rückschlüsse zu unterstützen, ist folgender:

1. Formulieren einer Hypothese
2. Hypothesentest

Im Folgenden wird ein genauer Blick auf diesen Ansatz geworfen…

Statistische Signifikanztests

1. Der erste Schritt liegt in der Formulierung einer Nullhypothese H_0.
   Man legt fest, dass eine Stichprobenstatistik (z.B. Stichprobenmittelwert) einem bestimmten Wert entspricht.

2. Der Folgeschritt beinhaltet die Formulierung einer operativen Regel, nach der die Nullhypothese entweder akzeptiert oder abgelehnt wird.
   Kann man auf Beweise (Testergebnisse) zugreifen, wird diese operative Regel häufig anhand eines Intervalls Δ bestimmt, innerhalb dessen die beobachtete Stichprobenstatistik liegen muss, damit die Nullhypothese akzeptiert werden kann.
   Eine Ablehnung der Nullhypothese bedingt die Akzeptanz der Testhypothese H_1.

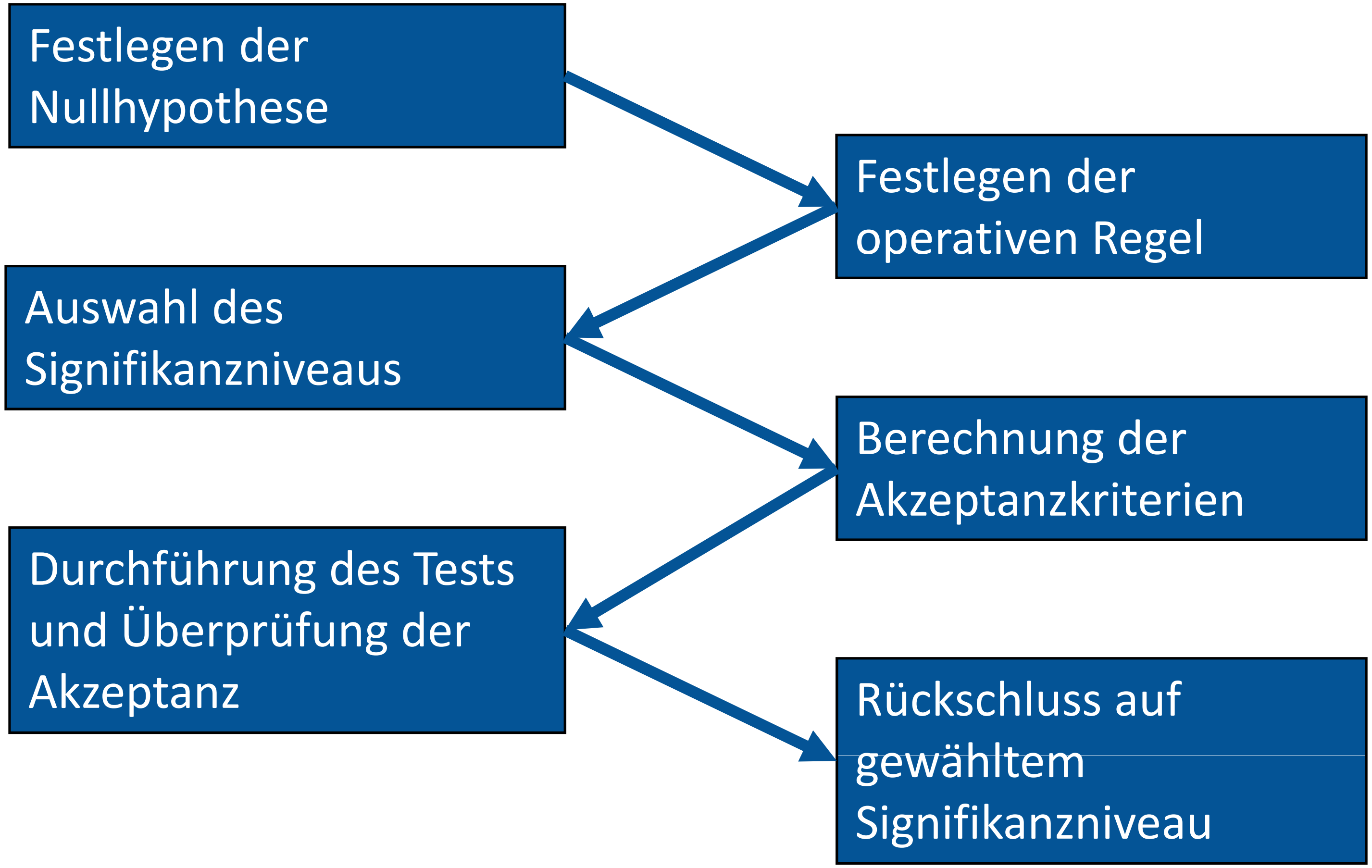
3. Nun wählt man ein Signifikanzniveau für die Testdurchführung, wobei α die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl sie zutrifft (Fehler 1. Art). Auf diesem Weg beeinfluss α ebenso die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese akzeptiert wird, obwohl sie nicht zutrifft (Fehler 2. Art).

Statistische Signifikanztests

4. Nun muss man den zu α gehörigen Wert von Δ berechnen.
   Bei Bedarf kann man auch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art berechnen.
5. Die geplanten Tests werden durchgeführt und die beobachteten Stichprobenstatistiken beurteilt. Eine Ablehnung oder Akzeptanz der Nullhypothese wird geprüft.
6. Sollte die Nullhypothese von den Ergebnissen der Stichprobe nicht gestützt werden, wird sie auf dem Signifikanzniveau von α abgelehnt – sonst wird sie akzeptiert.

Statistische Signifikanztests

Grafische Darstellung des Vorgehens bei Hypothesentests:



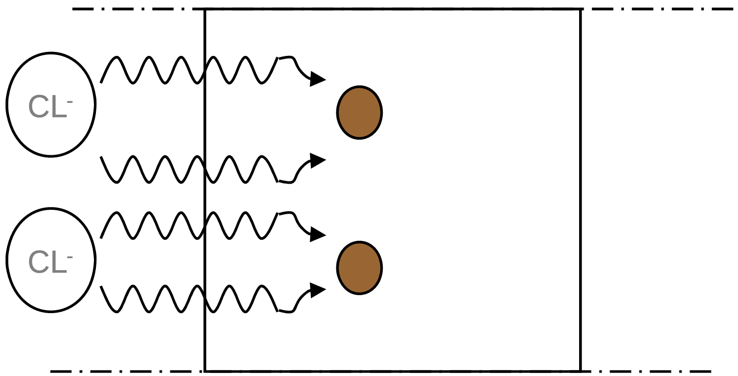
Statistische Signifikanztests

Typische Anwendungen im Ingenieursbereich:

- Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz
- Testen des Mittelwertes – mit unbekannter Varianz
- Testen der Varianz
- Testen zweier oder mehrerer Datensätze

Statistische Signifikanztests

Beispiel: Chlorid bedingte Korrosion an Betonkonstruktionen



Man betrachte beispielsweise die Situation, in der beurteilt werden soll, ob die Chlorid-Konzentration an der Oberfläche einer Betonkonstruktion mit den vorher angenommenen Bemessungsgrundlagen übereinstimmt.

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Bemessungsgrundlage: Mittelwert Chlorid-Konzentration auf der Oberfläche: 0,3%

Nullhypothese

Die Standardabweichung der Chlorid-Konzentration auf der Oberfläche sei bekannt und entspricht 0,04%.

Festlegung des Annahmebereichs:

Die Nullhypothese wird auf dem Signifikanzniveau α akzeptiert, falls

$$0.3 - \Delta \leq \overline{X} \leq 0.3 + \Delta$$

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Das Akzeptanzkriterium bei gegebenem α kann wie folgt berechnet werden: $P\left(0.3 - \Delta \le \overline{X} \le 0.3 + \Delta\right) = 1 - \alpha$

Wählt man $\alpha = 0.1$ und $n = 10$ Versuche und nimmt man an, dass der Stichprobenmittelwert normalverteilt ist, erhält man:

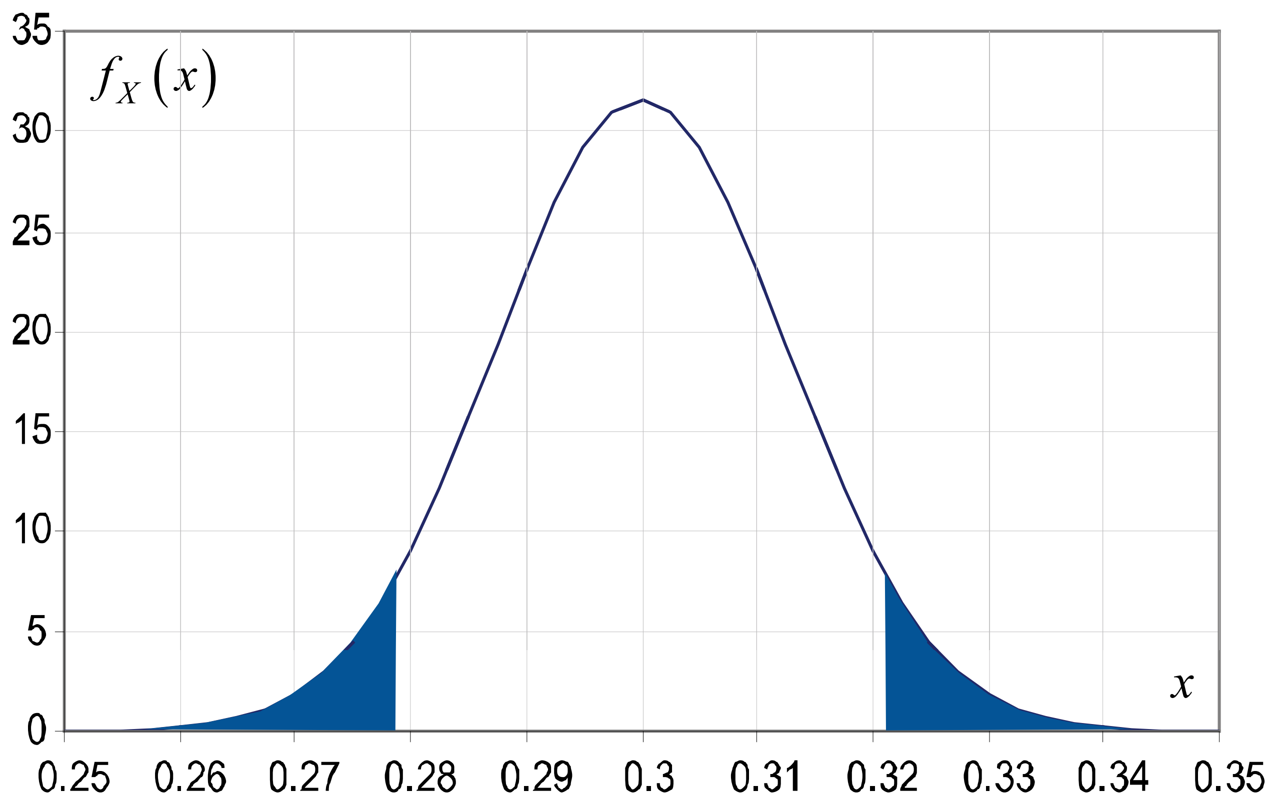
$$\Delta = -k_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = 1.645 \frac{0.04}{\sqrt{10}} = 0.0208$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(0.2792 \le \overline{X} \le 0.3208\right) = 0.9$$

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

$$\Delta = -k_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = 1.645\frac{0.04}{\sqrt{10}} = 0.0208 \quad \Rightarrow \quad P\left(0.2792 \le \bar{X} \le 0.3208\right) = 0.9$$



Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Liegt der Stichprobenmittelwertinnerhalb von $[0.2792 \leq \bar{x} \leq 0.3208]$, sollte die Nullhypothese H_0 akzeptiert werden.

Nimmt man an, dass 10 Versuche durchgeführt wurden mit folgenden Ergebnissen:

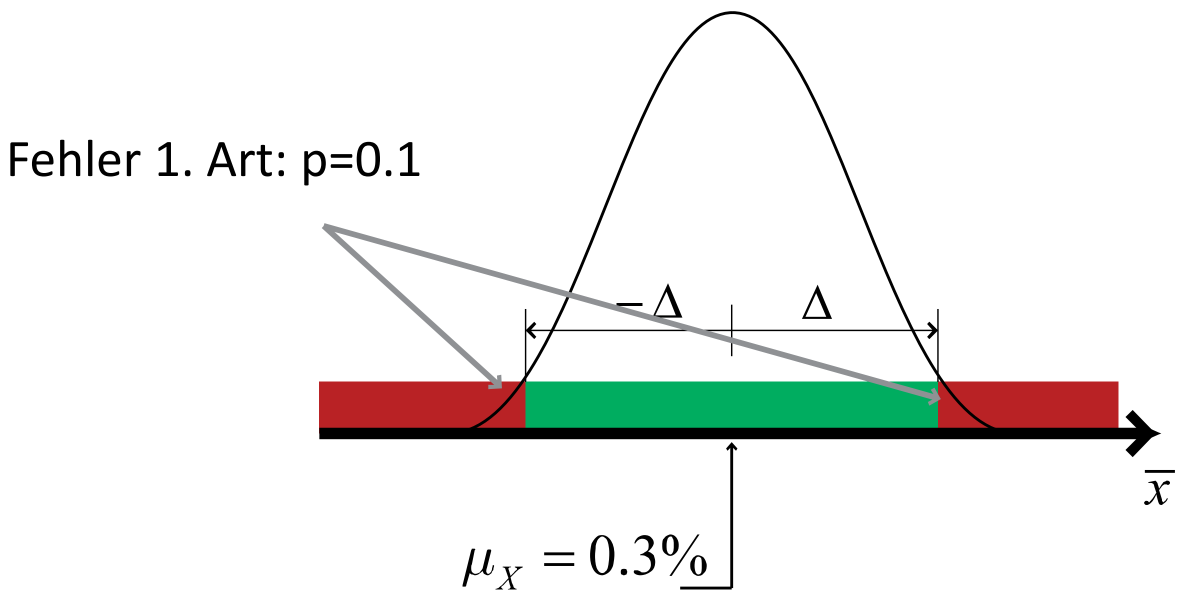
$$\hat{\mathbf{x}} = (0.33, 0.32, 0.25, 0.31, 0.28, 0.27, 0.29, 0.3, 0.27, 0.28)^T$$

bei einem Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 0.29$, kommt man zu dem Schluss, dass die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 0.1 akzeptiert werden sollte.

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

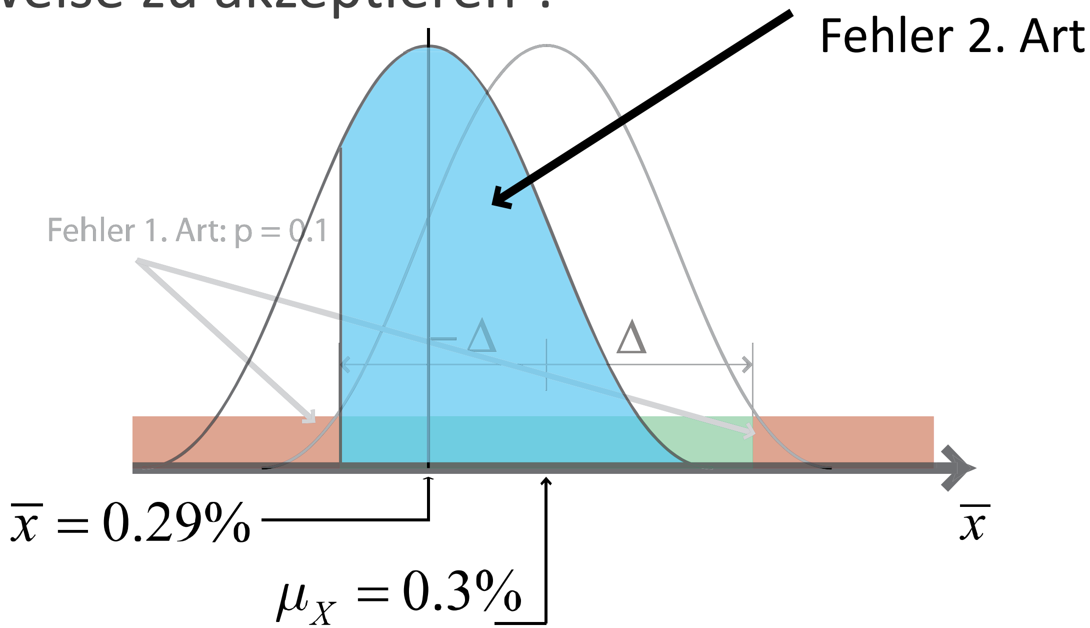
Bei diesem Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1.Art zu begehen 0.1 %.
Aber was ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu akzeptieren ?



Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Bei diesem Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1.Art zu begehen 0.1 %.
Aber was ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu akzeptieren ?



Statistische Signifikanztests

Statistische Signifikanztests können für eine Vielzahl unterschiedlicher Problemstellungen formuliert werden.

Man sollte aufpassen, dass man die Aussage dieser Tests nicht überschätzt, da die Hypothesen auf unterschiedlichen Wegen und mit unterschiedlichen Signifikanzniveaus formuliert werden können. Es sollte deshalb zum Prinzip werden, alles zu überprüfen.

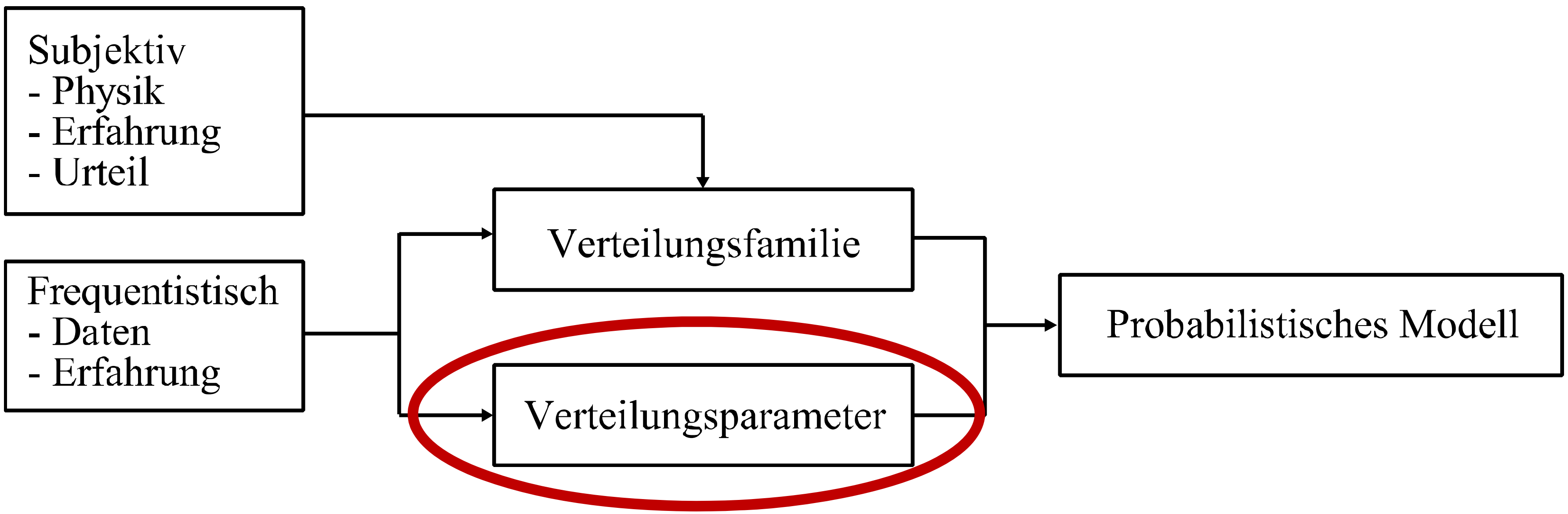
Unterschiedliche Herangehensweisen verursachen einen direkten Effekt auf die Wahrscheinlichkeit, dass Fehler der 1. oder 2. Art entstehen. Dies kann signifikante ökonomische Konsequenzen nach sich ziehen.

Die Formulierung der Hypothese und die Wahl des Signifikanzniveaus sollte als Entscheidungsproblem behandelt werden – dazu später mehr…

Schätzung und Modellentwicklung - Übersicht

Wenn man Modelle im Ingenieurbereich entwickeln möchte, müssen unterschiedliche Typen von Informationen herangezogen werden.

- subjektive Informationen
- frequentistische Informationen



Schätzung und Modellentwicklung

Auswahl von Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen

Grundsätzlich müssen Verteilungsfunktionen für Zufallsvariablen oder –prozesse auf Basis folgender Punkte ausgewählt werden:

Frequentistische Information:	Daten
Physikalische Argumente:	Verständnis Ingenieurproblemstellungen

Der klassische Ansatz ist folgender:

1. Bestimmen einer Hypothese für eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfamilie.
2. Schätzen der Funktionsparameter der bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung.
3. Durchführen eines statistischen Tests, um die Hypothese abzulehnen oder zu akzeptieren.

Schätzung und Modellentwicklung

Auswahl von Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen

Im Ingenieurwesen tritt häufig der Fall ein, dass die verfügbaren Daten zu spärlich sind, um einen Hypothesentest für eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung durchzuführen – zumindest mit einer vernünftigen Signifikanz.

Deshalb ist ein einheitliches Vorgehen sehr wichtig:

Zuerst werden physikalische Argumente herangezogen, um eine passende Verteilung zu identifizieren.

Darauf aufbauend wird überprüft, ob die zur Verfügung stehenden Daten der gewählten Verteilungsfunktion widersprechen.

Schätzung und Modellentwicklung

Modellauswahl anhand von Wahrscheinlichkeitspapier

Ein Wahrscheinlichkeitspapier ist so skaliert, dass eine bestimmte Funktion beim Aufzeichnen auf dieses Papier die Form einer geraden Linie erhält.

-> die Form eine geraden Linie ist z.B. gegeben durch:

$$x = a + by$$

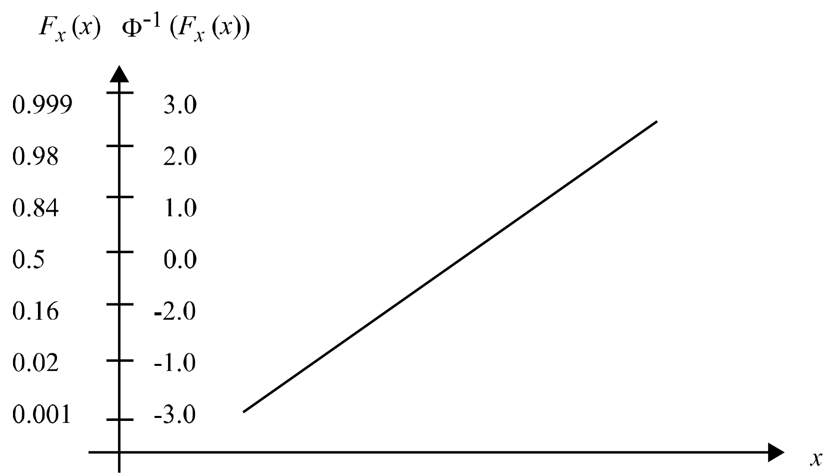
Schätzung und Modellentwicklung

Modellauswahl anhand von Wahrscheinlichkeitspapier

Beispiel:
Wahrscheinlichkeitspapier für eine normalverteilte Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$$

$$x = \Phi^{-1}(F_X(x)) \cdot \sigma_X + \mu_X$$



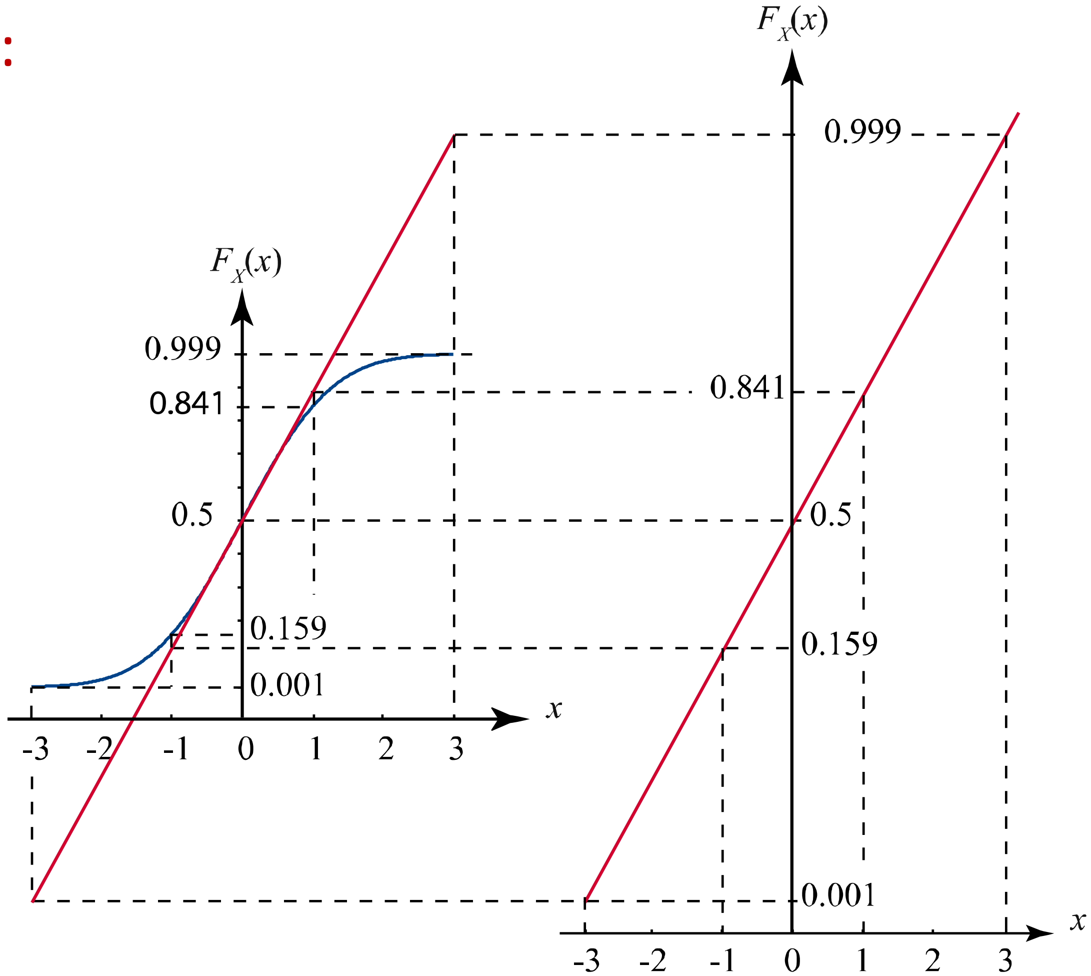
Die y-Achse ist nicht-linear skaliert.

Schätzung und Modellentwicklung

Modellauswahl anhand von Wahrscheinlichkeitspapier

Grafischer Ansatz:

Normalverteilung



Schätzung und Modellentwicklung

Modellauswahl anhand von Wahrscheinlichkeitspapier

Die Stichproben-Verteilungsfunktion kann anhand einer sortierten Messreihe abgeleitet werden:

$$F_X(\hat{x}_i^o) = \frac{i}{N+1}$$

Beispiel: Druckfestigkeit von Beton

Lösung:
Normalverteilungs-Wahrscheinlichkeitspapier

i	$\hat{x}_i^o$	$F_X(\hat{x}_i^o)$	$\Phi^{-1}(F_X(\hat{x}_i^o))$
1	24.4	0.048	- 1.668
2	27.6	0.095	- 1.309
3	27.8	0.143	- 1.068
4	27.9	0.190	- 0.876
5	28.5	0.238	- 0.712
6	30.1	0.286	- 0.566
7	30.3	0.333	- 0.431
8	31.7	0.381	- 0.303
9	32.2	0.429	- 0.180
10	32.8	0.476	- 0.060
11	33.3	0.524	0.060
12	33.5	0.571	0.180
13	34.1	0.619	0.303
14	34.6	0.667	0.431
15	35.8	0.714	0.566
16	35.9	0.762	0.712
17	36.8	0.810	0.876
18	37.1	0.857	1.068
19	39.2	0.905	1.309
20	39.7	0.952	1.668

Schätzung der Verteilungsparameter

Haben wir uns für ein Verteilungstyp entschieden, müssen die Parameter geschätzt werden.

z.B. Normalverteilung / Weibullverteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right)$$

$$f_X(x) = \frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^k \right)$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden definiert durch ihre Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, .., \theta_k)^T$.

Allgemein gibt man Dichtefunktionen bedingt auf die Parameter an: $f_X(x|\boldsymbol{\theta})$

Schätzung der Verteilungsparameter

Es gibt eine Vielzahl von Methoden, Verteilungsparameter zu schätzen; generell wird unterschieden zwischen:

- Punktschätzern
- Intervallschätzern

Im Folgenden werden wir zwei Methoden näher betrachten:

- Methode der Momente
- Maximum Likelihood Methode

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

Gegeben ist eine Stichprobe anhand derer wir die Verteilungsparameter schätzen: $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, .., \hat{x}_n)^T$

Das Prinzip der Methode der Momenten ist, die Parameter so abzuschätzen, dass die Momente der Verteilung und die Momente der Stichprobe identisch sind.

$$m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^j$$

Stichprobe

$$\lambda_j = \lambda_j(\theta_1, \theta_2, .., \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j \cdot f_X(x|\boldsymbol{\theta})dx$$

Verteilung

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

Angenommen, wir haben eine Verteilung mit k Parametern:

Dann müssen wir k Gleichungen mit k Unbekannten lösen:

$$m_j = \lambda_j(\boldsymbol{\theta}),\; j = 1, 2, .., k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^j} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^j \cdot f_X(x|\boldsymbol{\theta})dx}, \qquad j = 1, 2, .., k$$

Stichprobe | Verteilung

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

Beispiel:
Druckfestigkeit von Beton, Annahme einer Normalverteilung:

Die Normalverteilung hat zwei Parameter – wir müssen also zwei Gleichungen lösen:

$$\boxed{m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i} = \boxed{\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x|\mu,\sigma)dx}$$

$$\boxed{m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^2} = \boxed{\lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x|\mu,\sigma)dx}$$

Betondruck-festigkeit [Mpa]
24.4
27.6
27.8
27.9
28.5
30.1
30.3
31.7
32.2
32.8
33.3
33.5
34.1
34.6
35.8
35.9
36.8
37.1
39.2
39.7

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

Die Stichprobenmomente sind:

$$m_1 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i = 32.67 \qquad m_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i^2 = 1083.36$$

Die Momente der Verteilung sind:

$$\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-0.5\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})dx \qquad \lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-0.5\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})dx$$

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

Bei Formulierung der folgenden Zielfunktion:

$$g(\mu,\sigma)=(\lambda_1(\mu,\sigma)-m_1)^2+(\lambda_2(\mu,\sigma)-m_2)^2=min$$

Lassen sich die Parameter durch Optimierung finden.

z.B. mit Hilfe von MS EXCEL.

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

ODER:

Alternativ und viel einfacher ist die Herangehensweise mit Hilfe der **zentralen** Momente:

1. Bestimmung des Stichprobenmittelwertes und der Stichprobenstandardabweichung.
2. Gleichsetzen mit dem Mittelwert und der Standardabweichung der Verteilungsfunktion.
3. Berechnung der Parameter.

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente (MoM)

Log-Normalverteilung,	Parameter	Erwartungswert und Streuung
$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\zeta}\right)$ $f_X(x) = \frac{1}{x\zeta\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\zeta}\right)^2\right)$	$0 \le x \le \infty$ λ $\zeta > 0$	$\mu = \exp\left(\lambda + \frac{\zeta^2}{2}\right)$ $\sigma = \mu\sqrt{\exp(\zeta^2)-1}$

Gumbel max.	Parameter	Erwartungswert und Streuung
$f_X(x) = \alpha\exp(-\alpha(x-u)-\exp(\alpha(x-u)))$ $F_X(x) = \exp(-\exp(-\alpha(x-u)))$	$-\infty \le x \le \infty$ u $\alpha > 0$	$\mu = u + \frac{\gamma}{\alpha}\ ,\ \gamma \approx 0.5772$ $\sigma = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Die Grundidee der MLM ist:

die Parameter der Verteilung zu identifizieren, welche die maximale ‚Likelihood' besitzen – welche also am wahrscheinlichsten sind.

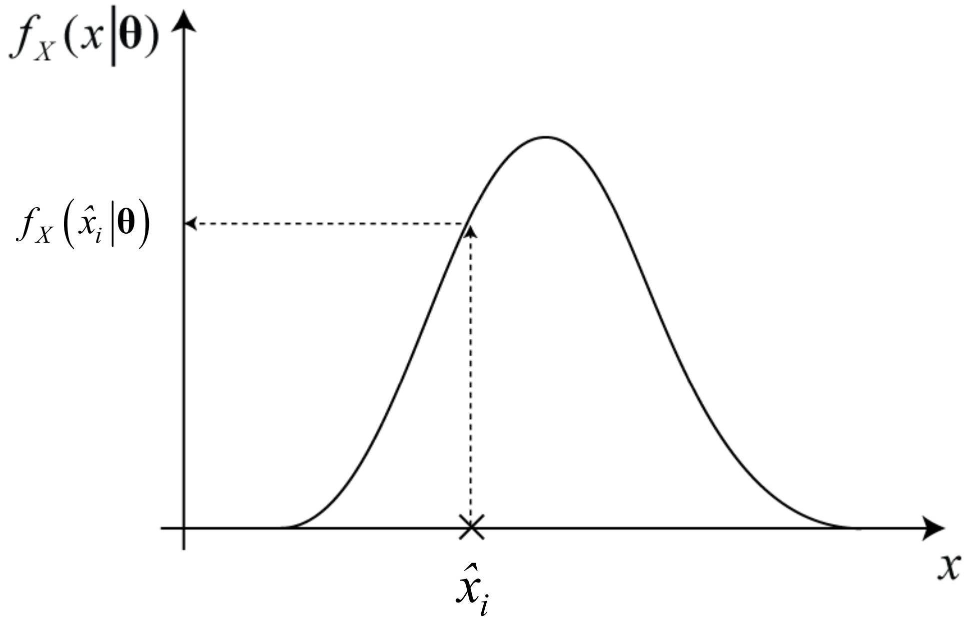
Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Die Form einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist bestimmt durch ihre Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, .., \theta_k)^T$.

Wird nun eine Stichprobe $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, .., \hat{x}_n)^T$ beobachtet, hat eine Realisation der Stichprobe $\hat{x}_i$ die ‚Likelihood':

$$L = f_X(\hat{x}_i \,|\, \boldsymbol{\theta})$$



Schätzung der Verteilungsparameter

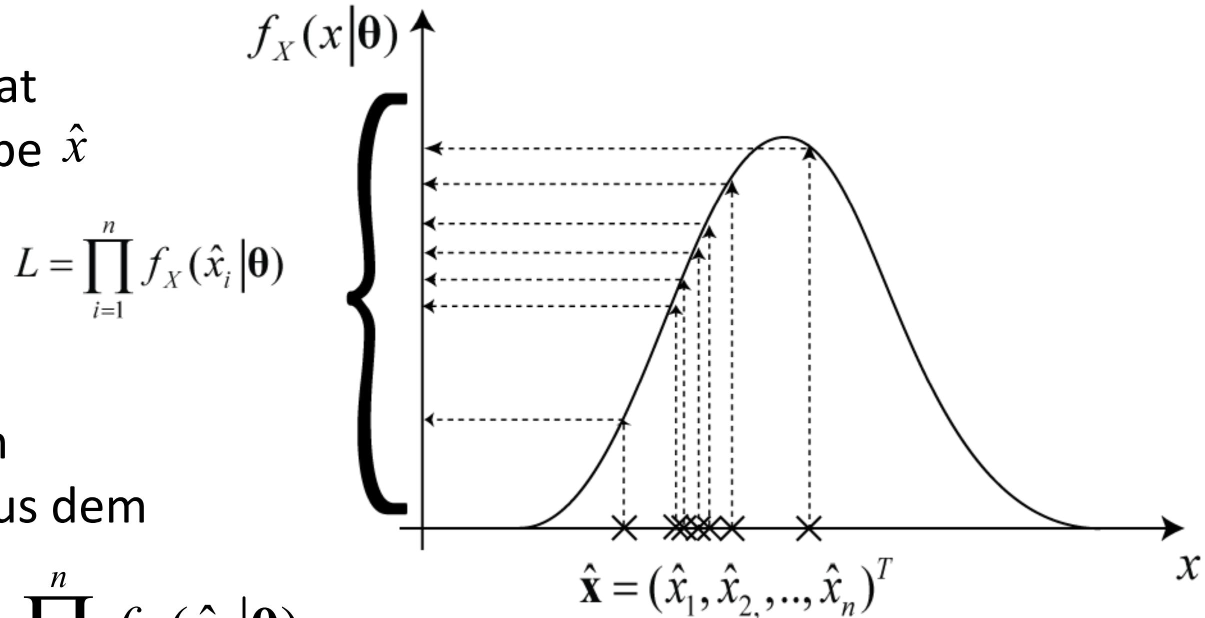
- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Die Form einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist bestimmt durch ihre Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, .., \theta_k)^T$.

Wird nun eine Stichprobe $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, .., \hat{x}_n)^T$ beobachtet, hat eine Realisation der Stichprobe $\hat{x}$ die ‚Likelihood':

$$L = f_X(\hat{x}_i | \boldsymbol{\theta})$$

Die ‚Likelihood' der gesamten Stichproben errechnet sich aus dem Produkt der Likelihoods der Einzelbeobachtungen -> $L = \prod_{i=1}^{n} f_X(\hat{x}_i | \boldsymbol{\theta})$



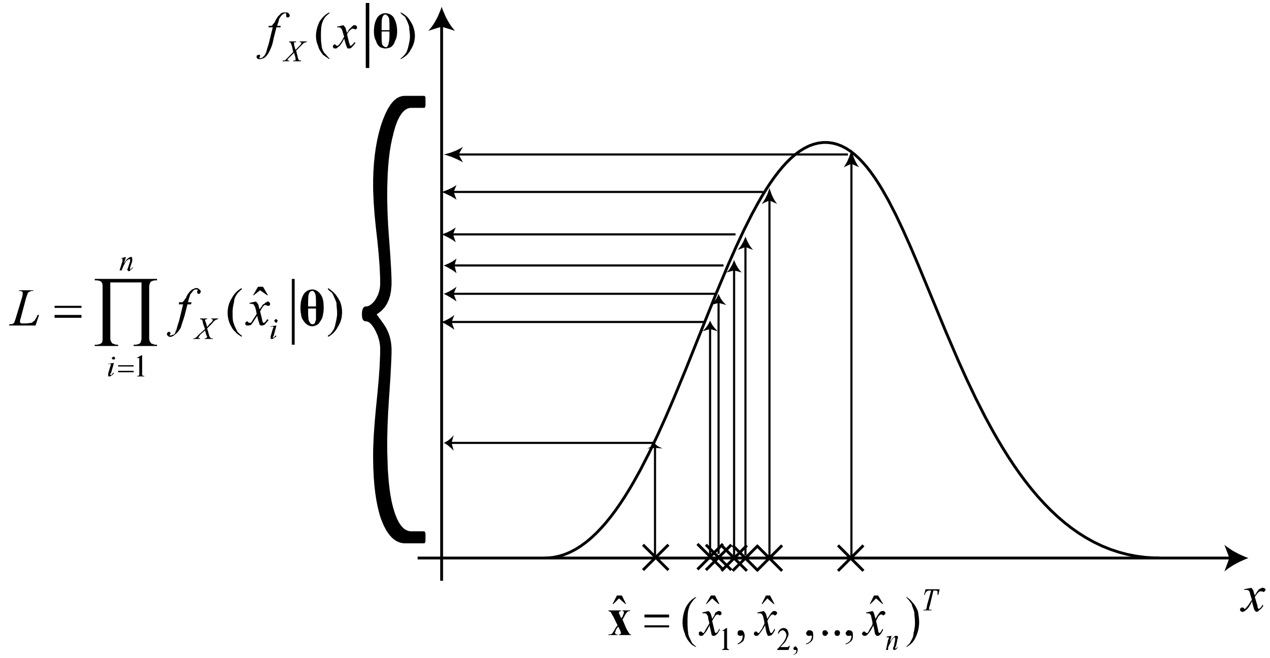
→ bei gegebenen Parametern

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Wir maximieren nun die ‚Likelihood' unter Veränderung der Parameter:

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} L\left(\boldsymbol{\theta} \middle| \hat{x}_i\right)$$



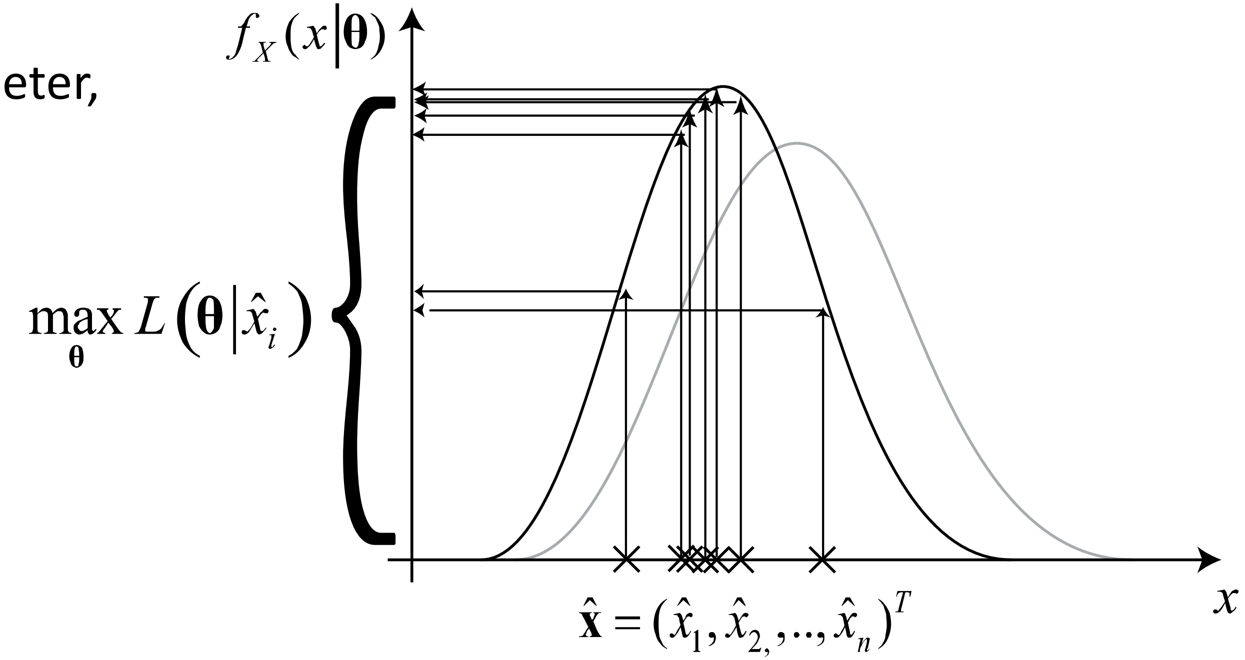
Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Wir maximieren nun die ‚Likelihood' unter Veränderung der Parameter:

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} L\left(\boldsymbol{\theta} \middle| \hat{x}_i\right)$$

→ und erhalten die Parameter, welche am besten zu der Stichprobe passen.



Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Beispiel Normalverteilung:
Wir nehmen an, die unseren Beobachtungen zugrundeliegende Verteilungsfunktion sei die Normalverteilung.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right)$$

Die Likelihood der Beobachtungen der Stichprobe $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)^T$ ist dann;

$$L(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \right)$$

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Beispiel Normalverteilung:
Die Parameter der Normalverteilung $\boldsymbol{\theta}$ werden so gewählt, dass sie die Likelihoodfunktion maximieren:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \left(-L(\boldsymbol{\theta} \,|\, \hat{\mathbf{x}})\right)$$

Es ist von Vorteil, die logarithmierte Likelihoodfunktion zu verwenden:

$$l(\boldsymbol{\theta} \,|\, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_X(\hat{x}_i \,|\, \boldsymbol{\theta})) \qquad -l(\boldsymbol{\theta} \,|\, \mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(f_X(\hat{x}_i \,|\, \boldsymbol{\theta}))$$

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Beispiel Normalverteilung:
Wir wählen die Parameter $\boldsymbol{\theta}$ so, dass sie die log-Likelihoodfunktion maximieren:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \left(-l(\boldsymbol{\theta} \,|\, \hat{\mathbf{x}})\right)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Parameter selbst zu normalverteilten Zufallsvariablen konvergieren:

Mit Mittelwerten: $\boldsymbol{\mu}_{\Theta} = (\theta_1^*, \theta_2^*, .., \theta_n^*)^T$

Und Kovarianzmatrix: $\mathbf{C}_{\Theta\Theta} = \mathbf{H}^{-1}$ wobei $H_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 \left(-l(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}})\right)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*}$

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Beispiel Normalverteilung:
Betrachten wir nun die Daten der Betondruckfestigkeit. Unter der Annahme, dass die Betondruckfestigkeit einer Normalverteilung folgt, ergibt sich für die log-Likelihoodfunktion:

$$l(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}}) = n \cdot ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{x}_i - \theta_1)^2}{\theta_2^2}$$

Das Maximum kann analytisch wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \theta_1)^2 = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \theta_1) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \theta_1)^2}{n}}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i$$

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Beispiel Normalverteilung:
Gemäss Zahlenbeispiel ‚Betondruckfestigkeit' ergibt sich:

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{x}_i - \theta_1\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{367.19}{20}} = 4.05$$

Mittelwert der Standardabweichung – nicht erwartungstreu (!)

$$\theta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i = \frac{653.3}{20} = 32.67$$

Mittelwert des Mittelwertes

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Beispiel Normalverteilung:
Gemäss Zahlenbeispiel ‚Betondruckfestigkeit' ergibt sich:

Für die Kovarianzmatrix:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\theta_2^2} & \dfrac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2^3} \\ \dfrac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2^3} & -\dfrac{n}{\theta_2^2}+\dfrac{3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{\theta_2^4} \end{pmatrix}$$

$$C_{\Theta\Theta} = H^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{0.836} & 0 \\ 0 & \boxed{0.165} \end{pmatrix}$$

Varianz der Standardabweichung

Varianz des Mittelwertes

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

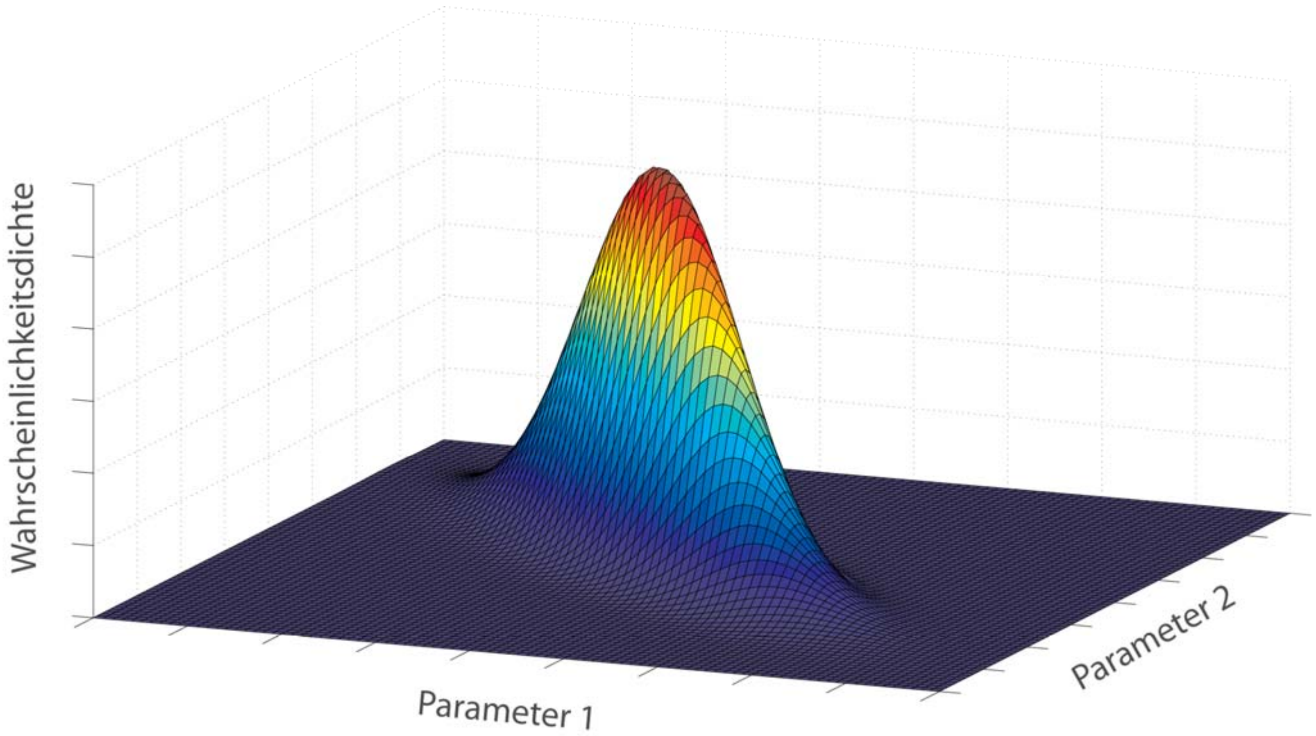
Das Problem lässt sich ebenfalls numerisch lösen

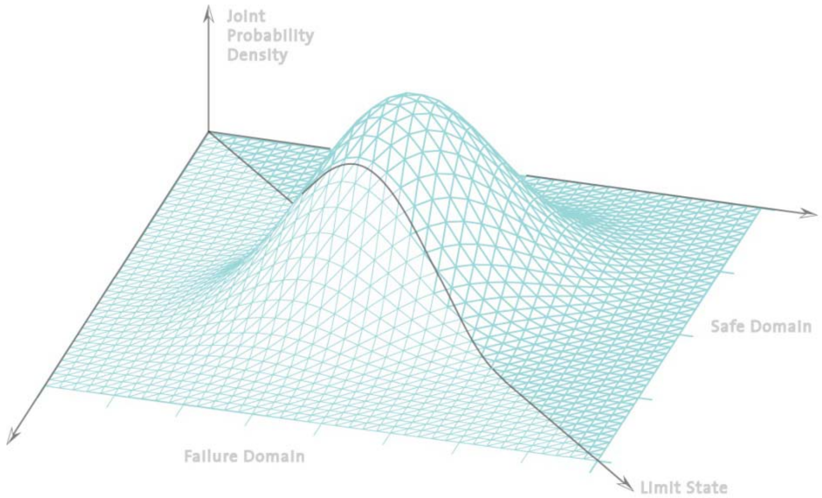
– z.B. mit MS EXCEL.

Schätzung der Verteilungsparameter

- Maximum Likelihood Methode (MLM)

Illustration





Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber