

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

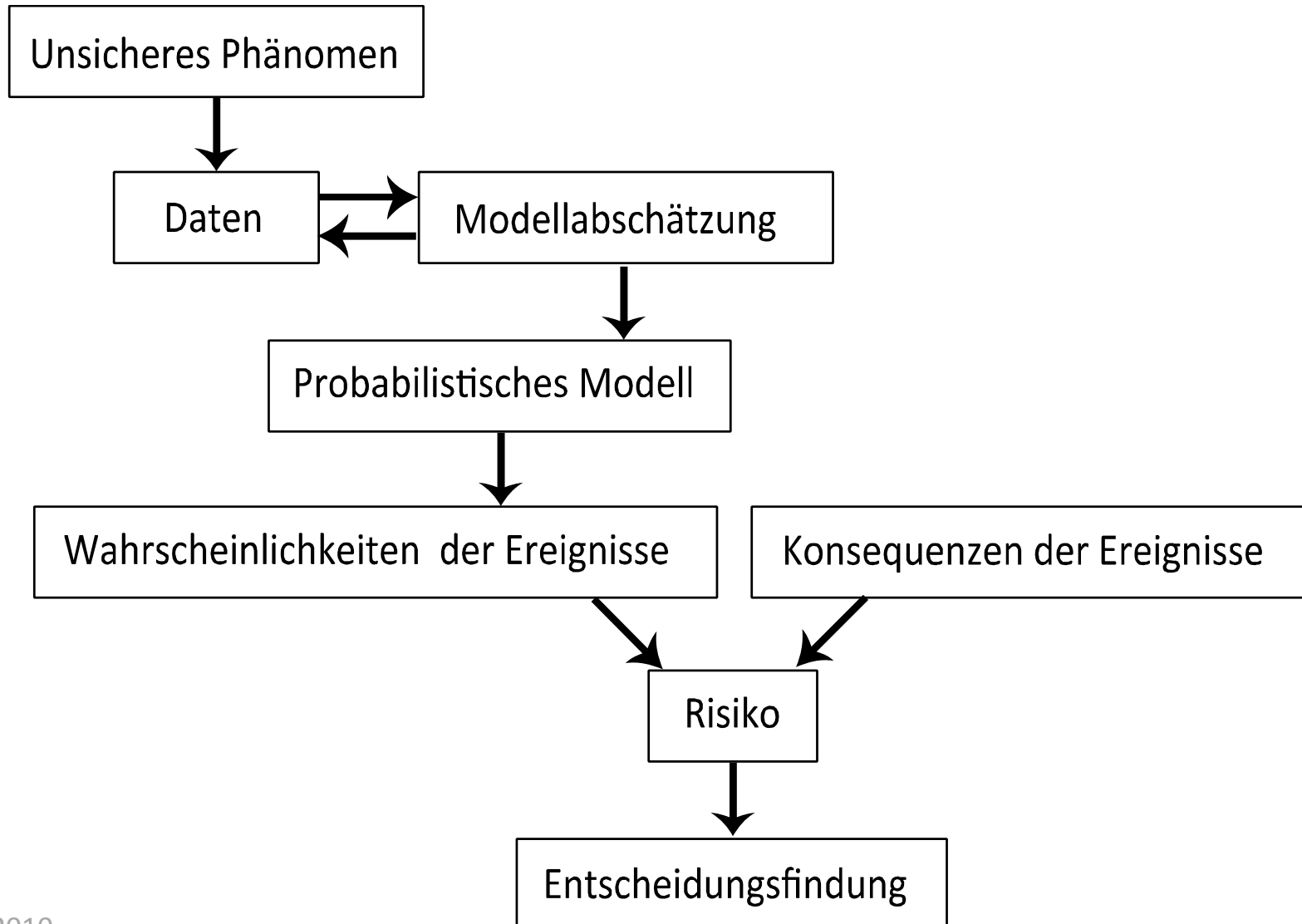
4. Vorlesung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber

Inhalte der heutigen Vorlesung

- Modellierung von Unsicherheiten - Übersicht
- Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen
- Zufallsvariablen
 - *Diskrete* kumulative Verteilungen und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
 - *Kontinuierliche* kumulative Verteilungen und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
 - Charakterisierung von Zufallsvariablen
 - Momente von Zufallsvariablen
 - Erwartungswert- und Varianzoperator

Modellierung von Unsicherheiten - Übersicht



Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- Unsicherheiten infolge natürlicher Variabilität (Zufall)
- **Aleatorische Unsicherheit**

- Unsicherheiten infolge von unvollständigem Wissen
- **Epistemische Unsicherheit**

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- **Natürliche Schwankungen – aleatorische Unsicherheit**
 - Resultate beim Würfeln
 - Variation von Materialeigenschaften
 - Variation von Windstärken
 - Variation des Niederschlags

- **Modellunsicherheit – epistemische Unsicherheit**
 - fehlendes Wissen
 - unangebrachte/ungenauere Modelle (Physikalische Modelle)

- **Statistische Unsicherheit – epistemische Unsicherheit**
 - wenig Information / kleine Anzahl Messungen

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

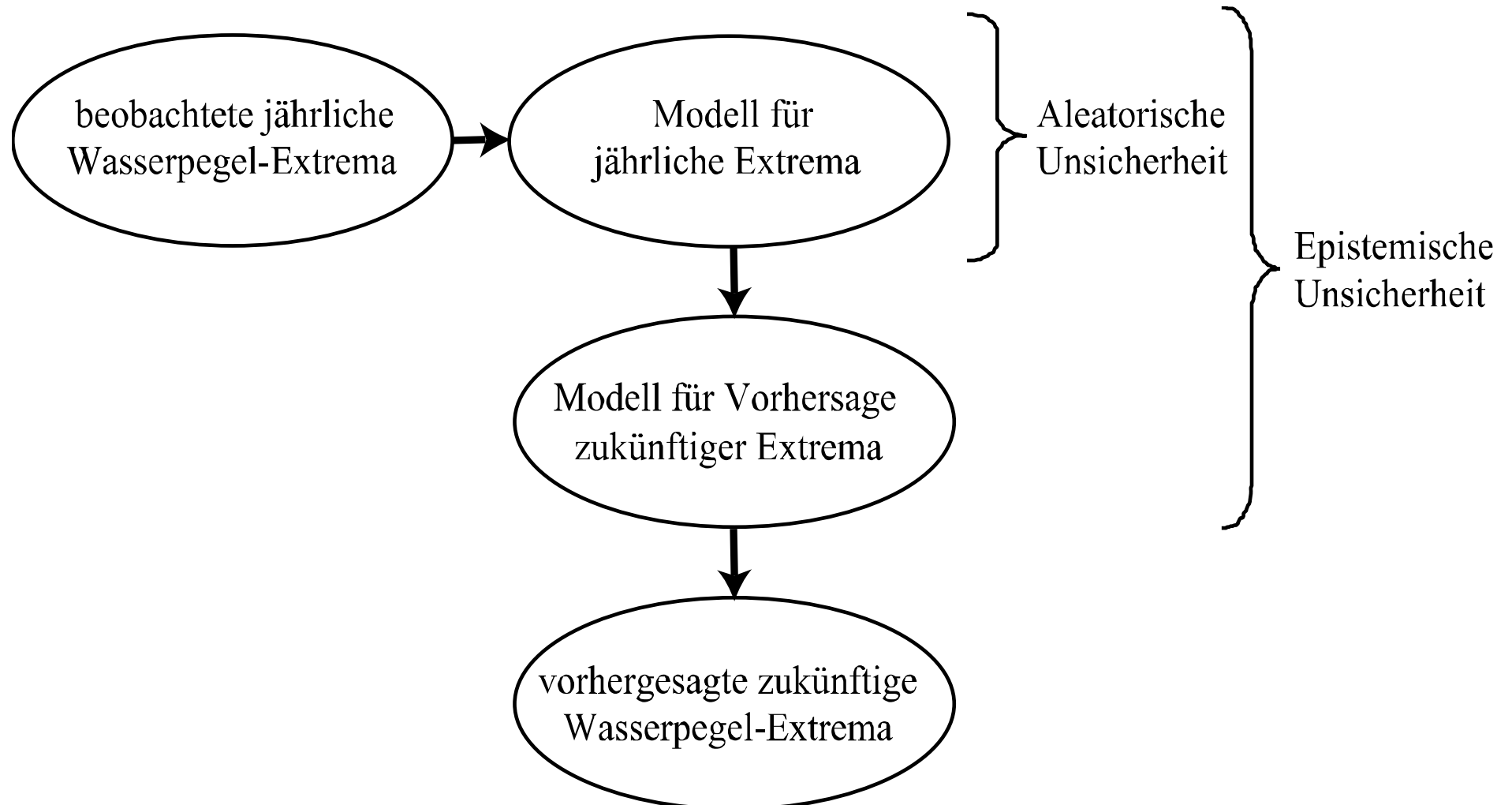
Beispiel: Bemessung eines Dammes.

- Die Bemessung (Höhe) des Dammes bestimmt die Häufigkeit von Überflutungen.
- Falls exakte Modelle zur Verfügung stehen, um zukünftige Wasserstände vorherzusagen, und unser Wissen über die Eingabeparameter perfekt ist, können wir die Häufigkeit von Überflutungen (pro Jahr) berechnen → eine deterministische Welt.
- Aber: Selbst wenn die Welt deterministisch wäre, hätten wir keine perfekten Informationen über sie. Somit können wir die Welt ebenso als zufallsbedingt betrachten.

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

- **Inhärente physikalische Unsicherheit (aleatorisch = Typ I)** ist die Unsicherheit resultierend aus der ‚Tatsache‘, dass es in unserer Umwelt zufällige Prozesse gibt.
- Ein anderer pragmatischer Standpunkt ist, diesen Unsicherheitstyp als jede Unsicherheit, welche nicht durch Sammeln von zusätzlichen Information reduziert werden kann, zu definieren.
- **Modellunsicherheiten und statistische Unsicherheiten (epistemisch = Typ II)** sind Unsicherheiten, welche reduziert werden können.

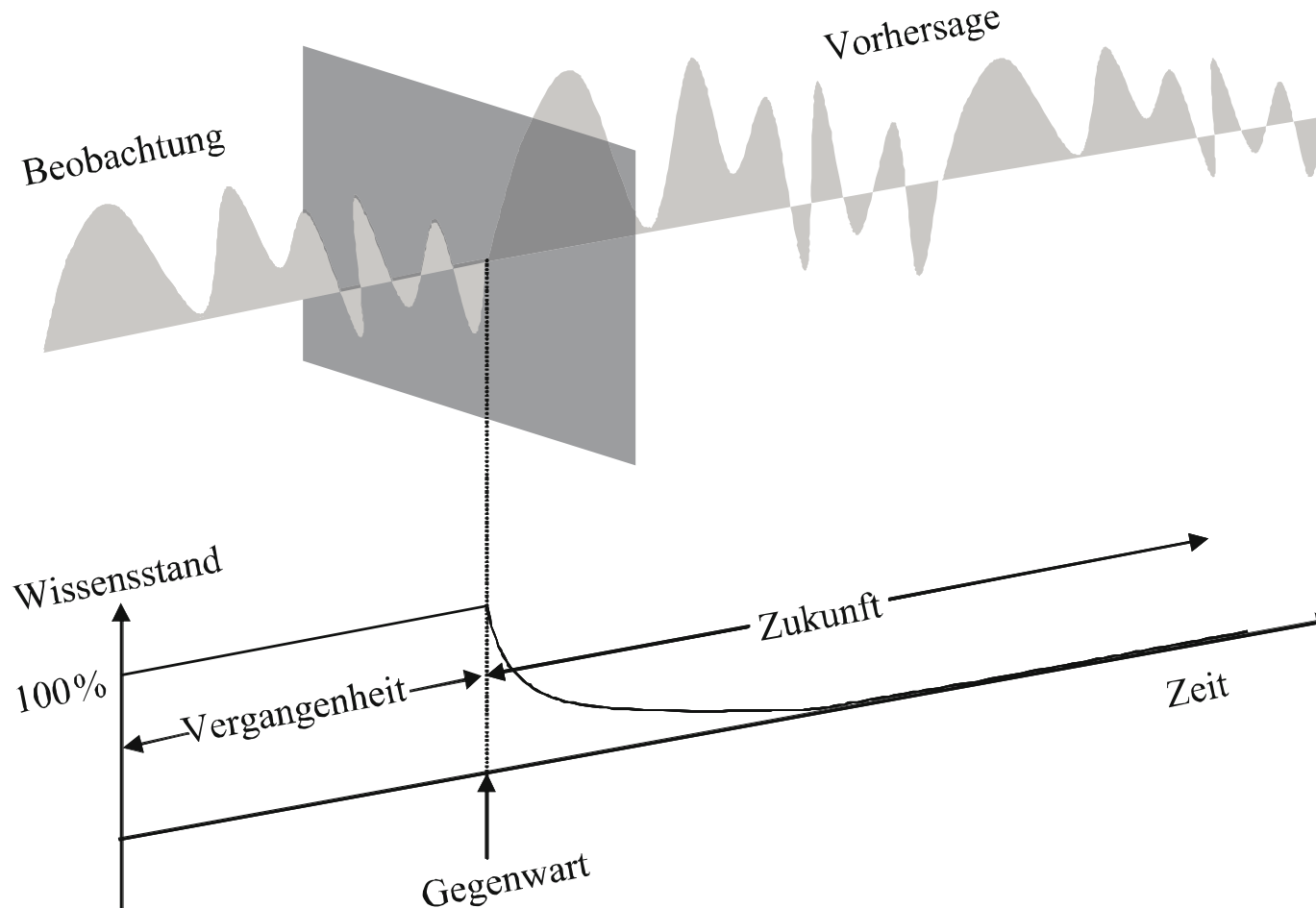
Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen



Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

- Der relative Beitrag der aleatorischen und der epistemischen Unsicherheit zur Vorhersage zukünftiger Wasserstände ist daher durch die angewandten Modelle direkt beeinflusst.
- Eine Verfeinerung eines Modells kann die epistemische Unsicherheit reduzieren, erhöht aber in diesem Fall auch den relativen Beitrag der aleatorischen Unsicherheit.
- Die Struktur der Unsicherheiten für ein Problem ist skalenabhängig.

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen



Die Struktur der Unsicherheit verändert sich auch als Funktion der Zeit.

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

- Eine Zufallsvariable wird mit einem grossen Buchstaben bezeichnet: X
- Eine Realisation einer Zufallsvariablen wird mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet: x
- Wir unterscheiden zwischen
 - *kontinuierlichen* Zufallsvariablen: Können jeden Wert in einem gegebenen Bereich annehmen.
 - *diskreten* Zufallsvariablen: Können nur diskrete Werte annehmen.

Zufallsvariablen

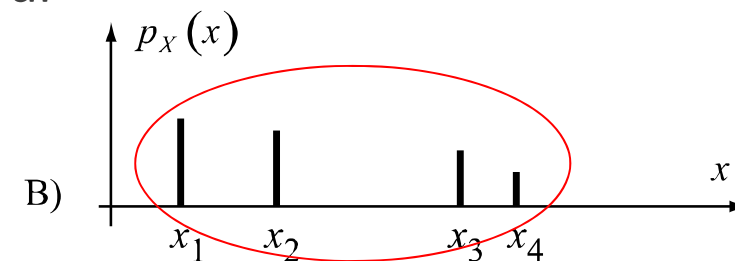
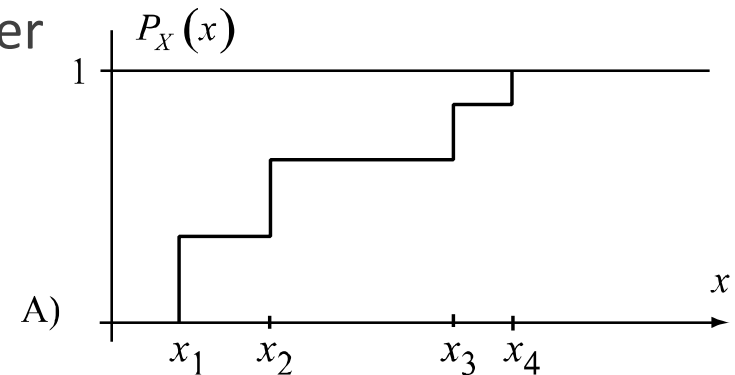
Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer **diskreten** Zufallsvariablen X kleiner als x ist, wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben:

$$P_X(x) = \sum_{x_i < x} p_X(x_i)$$

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine **diskrete** Zufallsvariable ist definiert durch:

$$p_X(x_i) = P(X = x_i)$$



Summe muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

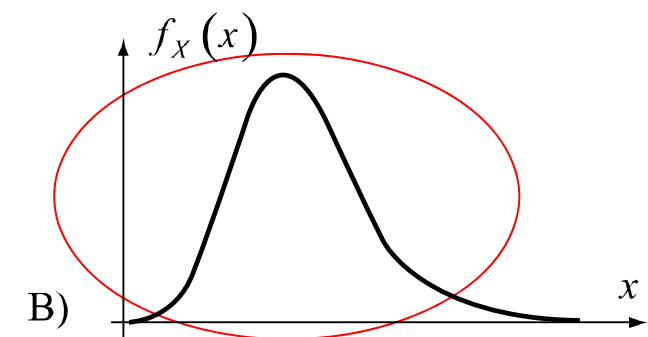
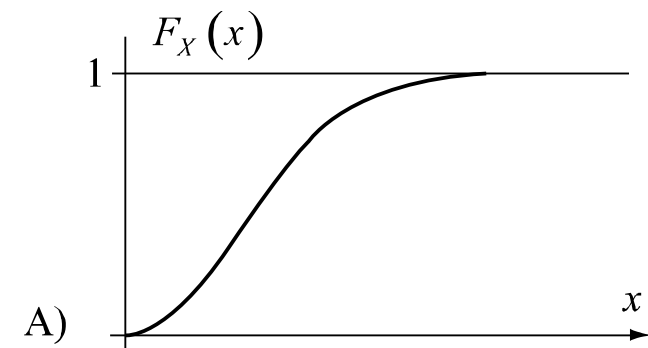
Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer **kontinuierlichen** Zufallsvariablen X kleiner als x ist, wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben:

$$F_X(x) = P(X < x)$$

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine **kontinuierliche** Zufallsvariable ist definiert durch:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$



Integral muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen) können durch ihre Parameter oder ihre Momente beschrieben werden.

$$F_X(x, \mathbf{p}) \quad f_X(x, \mathbf{p})$$

Parameter

- Die Parameter können durch die Momente ausgedrückt werden und umgekehrt.

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Das i -te Moment λ_i einer **diskreten** Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n x_j^i p_X(x_j)$$

- Der Erwartungswert $E[X]$ einer diskreten Zufallsvariable X entspricht dem **ersten Moment** und ist definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \sum_{j=1}^n x_j p_X(x_j)$$

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Das i -te Moment λ_i einer **kontinuierlichen** Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$\lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_X(x) dx$$

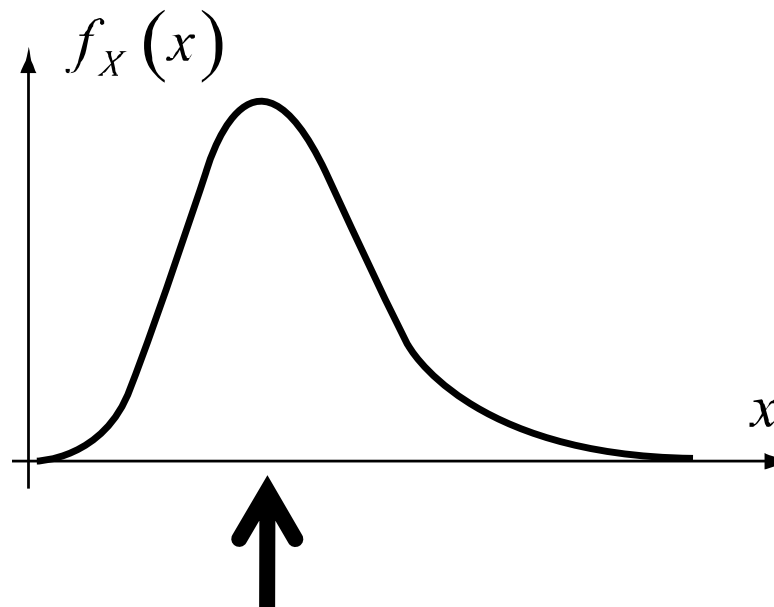
- Der Erwartungswert $E[X]$ einer kontinuierlichen Zufallsvariable X entspricht dem **ersten Moment** und ist definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Der Erwartungswert (oder Mittelwert) einer Zufallsvariablen kann als Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen verstanden werden.



Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Die Standardabweichung einer **kontinuierlichen** Zufallsvariablen ist als das **zweite zentrale Moment** definiert.

$$\sigma_X^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Varianz}}}{\text{Var}}[X] = E[(X - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwert}}}{\mu_X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$$

- Für eine **diskrete** Zufallsvariable dementsprechend:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X] = \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_X)^2 p_X(x_j)$$

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Das Verhältnis zwischen der Standardabweichung und dem Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird als Variationskoeffizient V_X bezeichnet und ist definiert als:

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

↑
dimensionslos

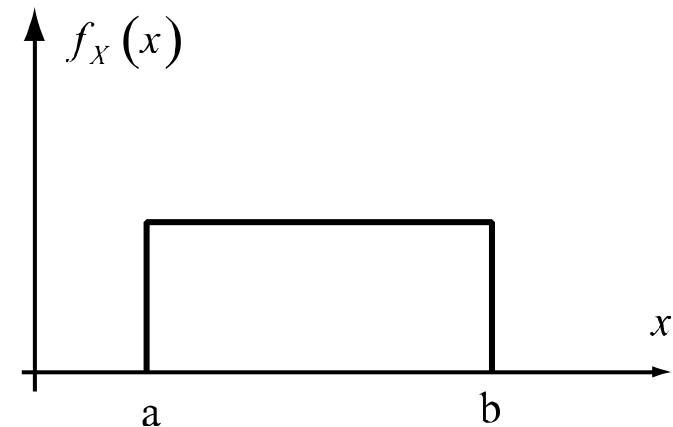
- Der Variationskoeffizient ist nützlich, um die Variabilität der Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert zu beschreiben.

Zufallsvariablen

Beispiel: Gleichverteilte Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte- und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$f_X(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



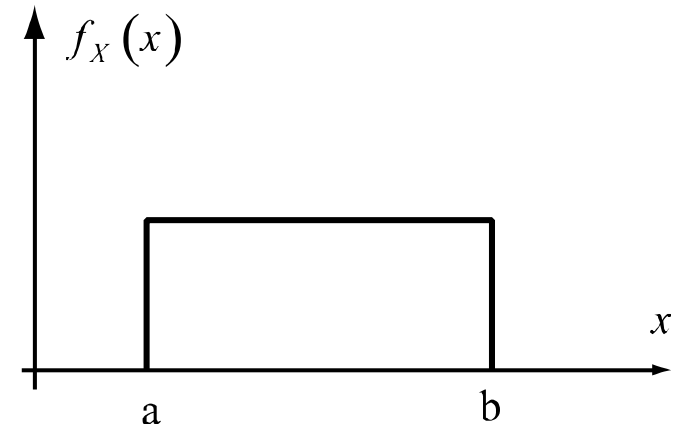
$$F_X(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x f_X(y; a, b) dy = \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Zufallsvariablen

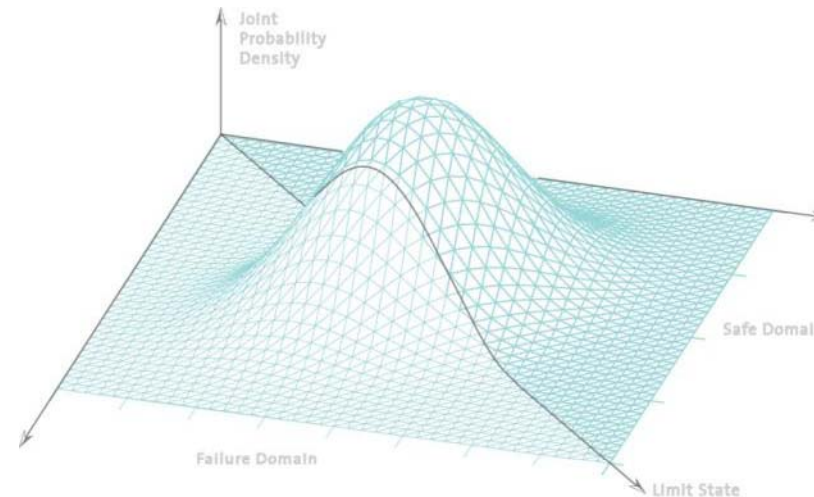
Beispiel: Gleichverteilte Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte- und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$\begin{aligned}\mu_X &= E[X] = \int_a^b x f_X(x; a, b) dx \\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{(b+a)}{2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[(X - \mu_X)^2] = \int_a^b (x - \mu_X)^2 f_X(x; a, b) dx \\ &= \int_a^b \frac{(x - \mu_X)^2}{(b-a)} dx = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2\mu_X + x\mu_X^2}{(b-a)} \Big|_a^b = \frac{1}{12}(b-a)^2\end{aligned}$$



Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Michael H. Faber