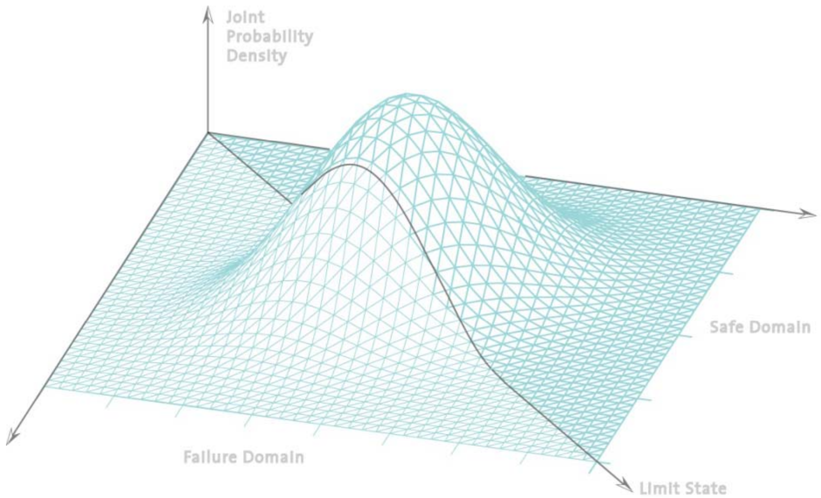


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

2. Vorlesung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber

Inhalt der heutigen Vorlesung

- Risiko und Motivation für Risikobeurteilungen
- Übersicht über die Wahrscheinlichkeitstheorie
- Interpretation von Wahrscheinlichkeit
- Stichprobenraum und Ereignisse
- Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Warum Statistik und Wahrscheinlichkeits-rechnung im Ingenieurwesen?

Risiko ist eine Charakteristik einer Aktivität bezogen auf mögliche Ereignisse n_E welche mit der Aktivität zusammenhängen.

Das Risiko R_{E_i} des Ereignisses E_i ist definiert als das Produkt der Eintretenswahrscheinlichkeit des Ereignisses P_{E_i} und den Konsequenzen des Ereignisses C_{E_i}.

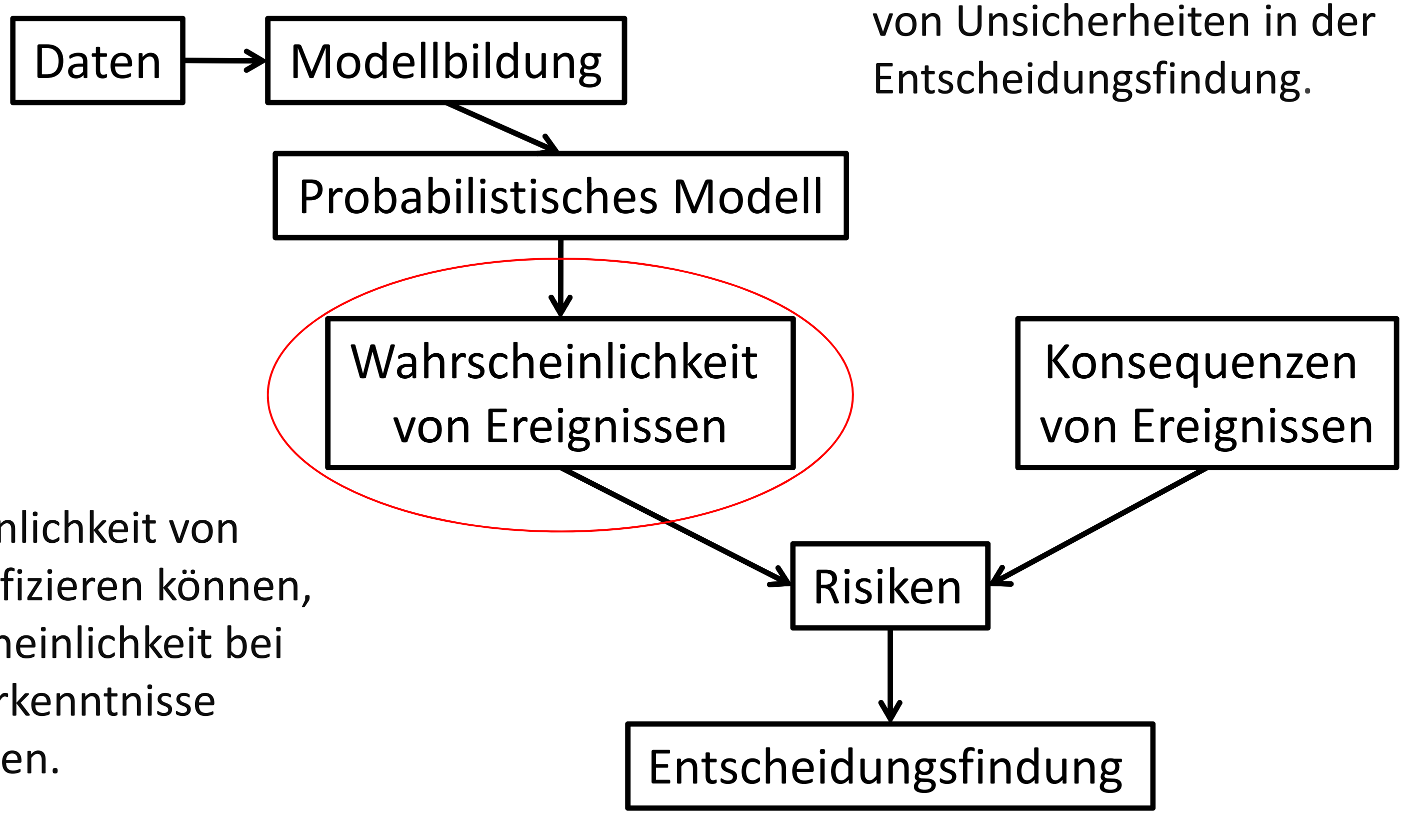
Das mit der Aktivität R_A verbundene Risiko errechnet sich wie folgt:

$$R_A = \sum_{i=1}^{n_E} R_{E_i} = \sum_{i=1}^{n_E} P_{E_i} \cdot C_{E_i}$$

Übersicht: Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel und Motivation der heutigen Vorlesung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie liefert die Grundlagen für die konsistente Berücksichtigung von Unsicherheiten in der Entscheidungsfindung.



Wir sollten die Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignissen quantifizieren können, und diese Wahrscheinlichkeit bei Auftreten neuer Erkenntnisse aktualisieren können.

Ereignisraum und Ereignisse

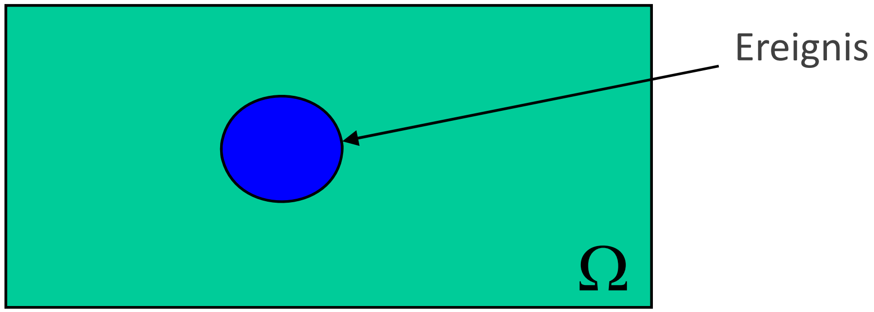
Die Menge aller möglichen Beobachtungen eines Zustandes unserer Umwelt nennen wir den Ereignisraum Ω .

Dieser Ereignisraum könnte beispielsweise alle Beobachtungen (Messungen, Werte) aus Druckfestigkeitsuntersuchungen an Beton beinhalten und würde folgendermassen geschrieben: $\Omega =]0;\infty[$

Ein Ereignis beinhaltet eine spezifische Sammlung von Beobachtungen und ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

Ereignisraum und Ereignisse

Der Ereignisraum und die Ereignisse können mit Venn Diagrammen dargestellt werden:



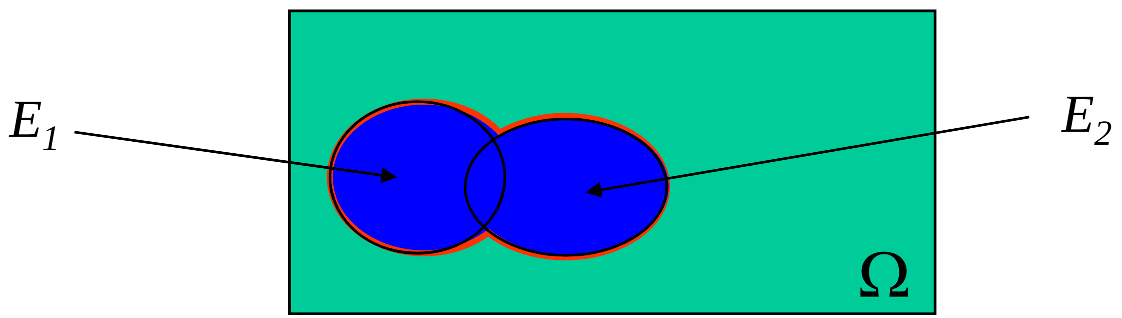
Ein Ereignis ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

- Wenn die Untermenge leer ist, ist das Ereignis unmöglich.
- Wenn die Untermenge alle möglichen Beobachtungen enthält, ist das Ereignis sicher.

Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse E_1 und E_2.

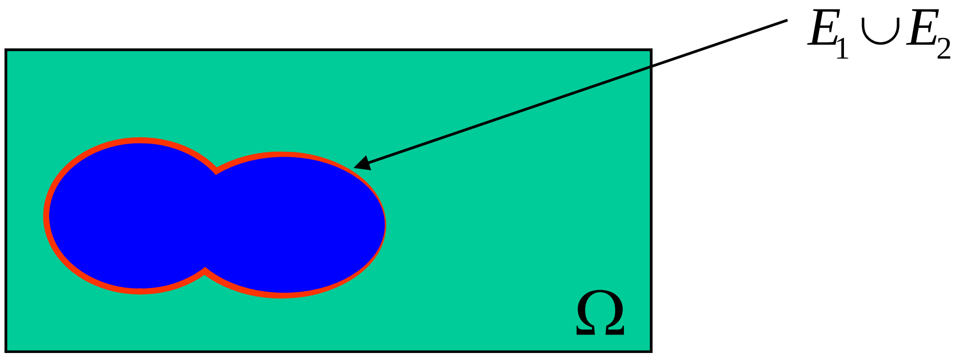
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis E_1 **und/oder** dem Ereignis E_2 gehören, heisst die **Vereinigung** von E_1 und E_2 und wird geschrieben als $E_1 \cup E_2$.



Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse E_1 und E_2.

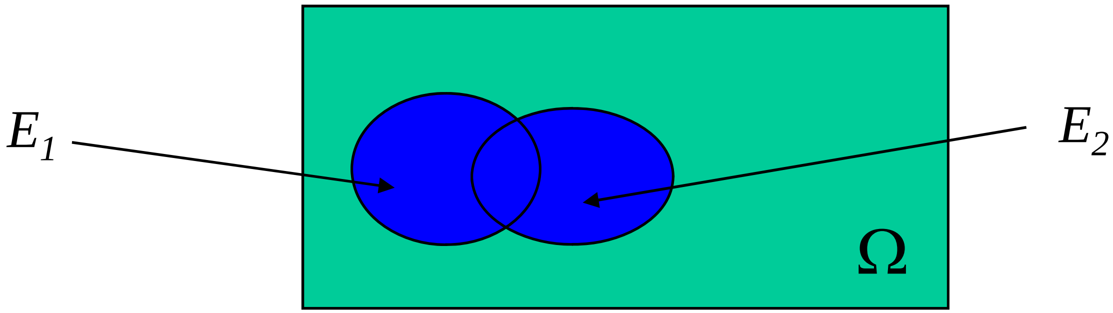
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis E_1 **und/oder** dem Ereignis E_2 gehören, heisst die **Vereinigung** von E_1 und E_2 und wird geschrieben als $E_1 \cup E_2$.



Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse E_1 und E_2.

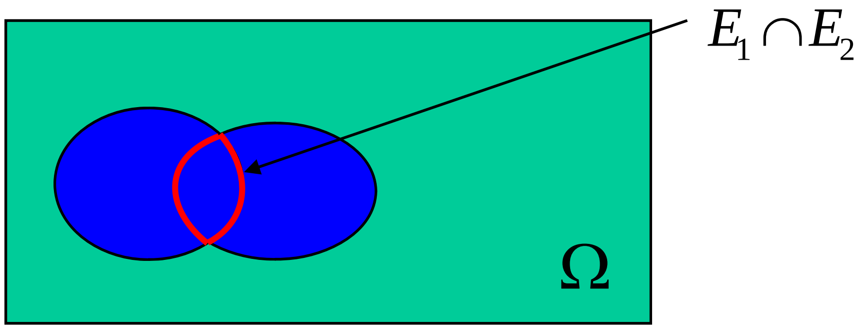
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis E_1 **und** dem Ereignis E_2 gehören, heisst die **Schnittmenge** von E_1 und E_2 und wird geschrieben als $E_1 \cap E_2$.



Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse E_1 und E_2.

Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis E_1 **und** dem Ereignis E_2 gehören, heisst die **Schnittmenge** von E_1 und E_2 und wird geschrieben als $E_1 \cap E_2$.

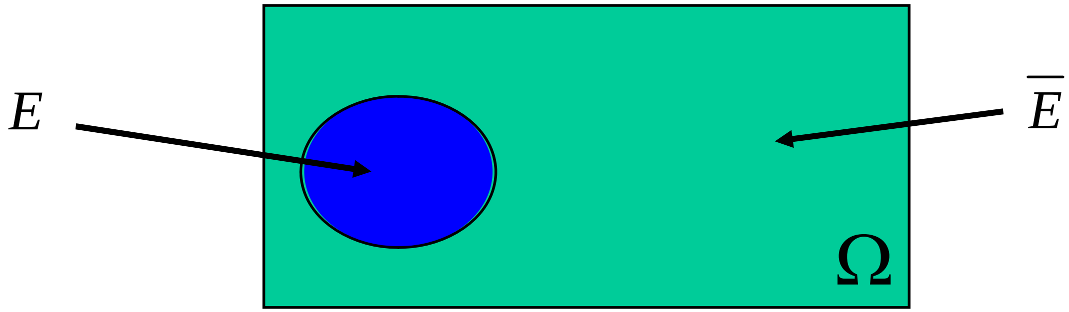


Ereignisraum und Ereignisse

Das Ereignis, welches alle Beobachtungen in Ω enthält, welche nicht im Ereignis E enthalten sind, heisst das Komplementärereignis $\overline{E}$.

Daraus folgt $\quad E \cup \overline{E} = \Omega$

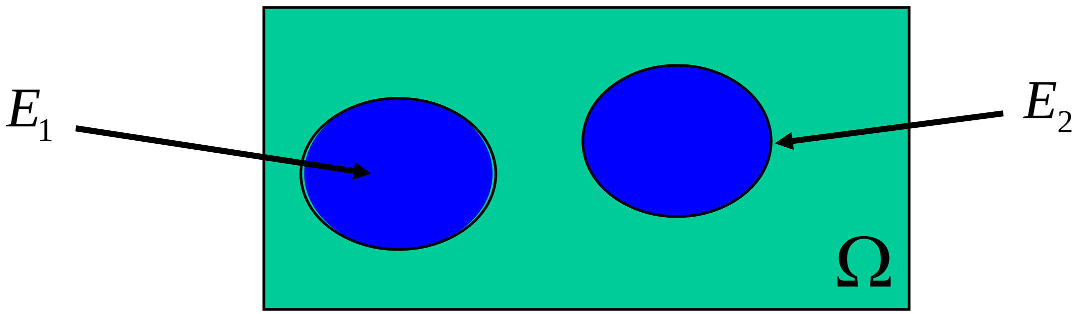
und $\quad E \cap \overline{E} = \varnothing$



Ereignisraum und Ereignisse

Ereignisse, welche keine gemeinsame Schnittmenge haben, werden sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse genannt.

Somit ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$



Ereignisraum und Ereignisse

Es kann gezeigt werden, dass die Berechnungen von Vereinigungs- und Schnittmengen dem Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz folgen:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

Kommutativgesetz

$$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$$

$$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$$

Assoziativgesetz

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$

$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$$

Distributivgesetz

Ereignisraum und Ereignisse

Aus den Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz können die Gesetze von DeMorgan abgeleitet werden:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

$$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$$

$$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$$

$$\Rightarrow$$

$$E_1 \cap E_2 = \overline{\overline{E_1} \cup \overline{E_2}}$$

$$E_1 \cup E_2 = \overline{\overline{E_1} \cap \overline{E_2}}$$

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$

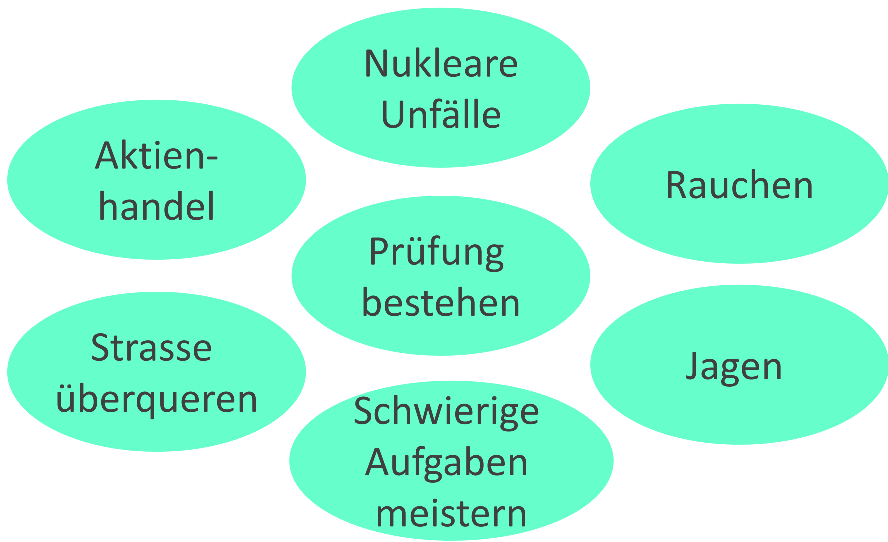
$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$$

Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Wir haben alle eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit
und brauchen oft Wörter wie

- Chance
- Möglichkeit
- Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit



Interpretationen von "Wahrscheinlichkeit"

Zustände unserer Umwelt für die wir uns interessieren sind beispielsweise

- Der Einsturz einer Brücke aufgrund ausserordentlicher Lasten
- Das Überfüllen eines Wasserrückhaltebeckens
- Das Ausfallen eines Elektrizitätsnetzes
- Das Nichteinhalten eines Zeitplanes

Diese Zustände werden im folgenden „Ereignisse" genannt.

Wir sind generell daran interessiert, die Eintrittswahrscheinlichkeit solcher Ereignisse innerhalb einer bestimmten Periode zu quantifizieren.

Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Prinzipiell gibt es drei Interpretationen von Wahrscheinlichkeit:

Frequentistisch

$$P(A) = \lim \frac{N_A}{n_{\exp}} \qquad \text{für} \quad n_{\exp} \to \infty$$

Klassisch

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{tot}}$$

Bayes

$$P(A) = \text{ Grad der persönlichen Überzeugung, dass das Ereignis } A \text{ eintreten wird}$$

Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, „Kopf“ bzw. „Zahl“ zu erhalten, wenn Sie eine Münze werfen:

Frequentistisch $$P(A) = \frac{510}{1000} = 0.51$$

Klassisch $$P(A) = \frac{1}{2}$$

Bayes $$P(A) = 0.5$$

Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie baut auf den drei Axiomen von Kolmogorov auf:

Axiom 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ wenn $E_1, E_2, \ldots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen

Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Aus Axiom 3: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ wenn $E_1, E_2, \dots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen.

folgt, dass die **Vereinigung** zweier sich ausschliessender Ereignisse E_1 *und* E_2 einfach aus der Summe der zwei Wahrscheinlichkeiten besteht.

Wenn E_1 *und* E_2 sich nicht gegenseitig ausschliessen, dann ist

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Hypothesen formulieren

Wissen und Erfahrung nutzen

Mit Daten kombinieren

Lernen, wie Wissen entwickelt werden kann!

Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind von besonderem Interesse, da sie die Basis für die Verwendung von neuer Information für die Entscheidungsfindung darstellen.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisse, E_1 wenn Ereignis E_2 eingetreten ist, wird definiert als

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

nicht definiert wenn $P(E_2) = 0$

Die Ereignisse werden als unabhängig bezeichnet wenn

$$P(E_1|E_2) = P(E_1)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Aus $$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

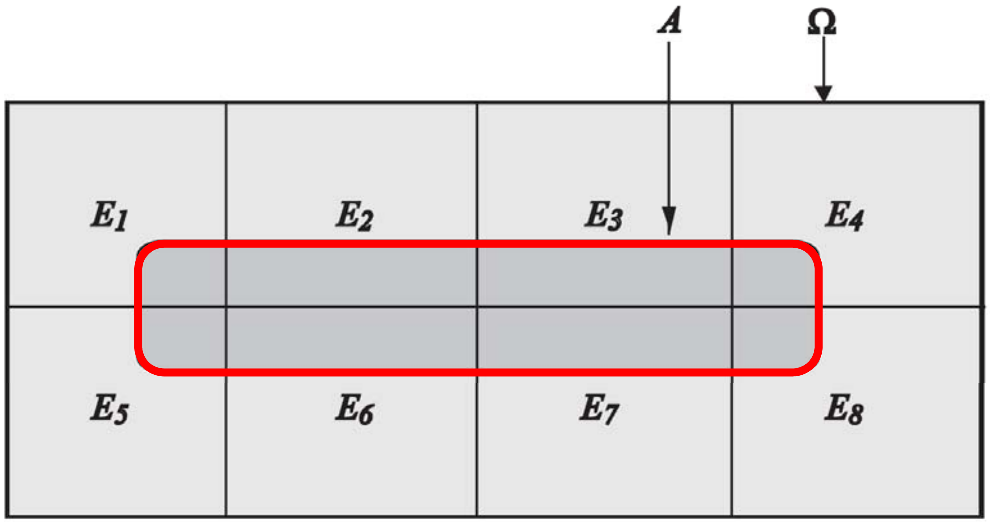
folgt $$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) P(E_1 | E_2)$$

und wenn E_1 und E_2 statistisch unabhängig sind dann

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) P(E_1)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei der Ereignisraum Ω aufgeteilt in n sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$



$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n) =$$

$$P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n) =$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

"Likelihood"

A Priori

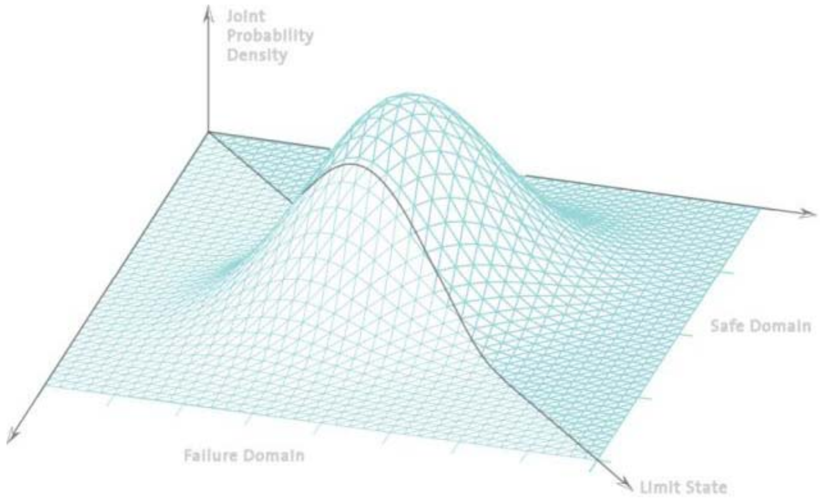
folgt

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

A Posteriori

Satz von Bayes

Reverend Thomas Bayes (1702-1764)



Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber