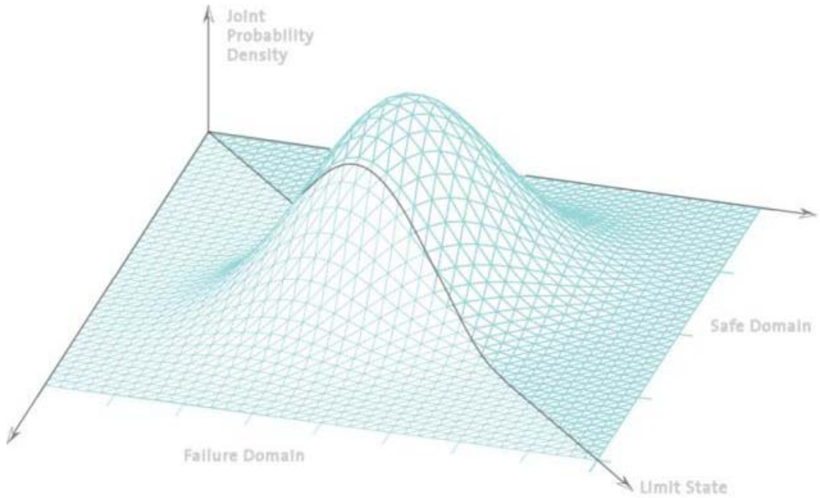
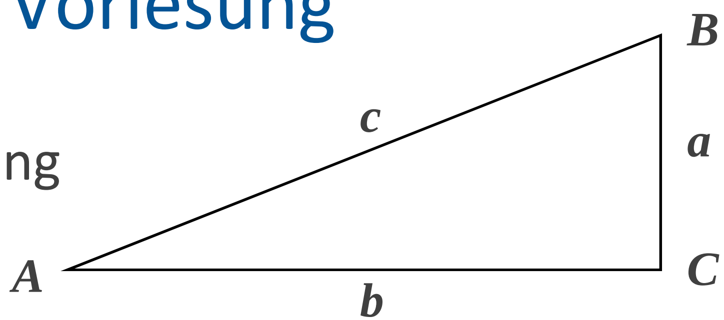


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber

Korrektur zur letzten Vorlesung



- Bsp. Fehlerfortpflanzung in einer Messung

$$E[c]=\sqrt{\mu_a^2+\mu_b^2}$$

$$Var[c]=\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}}\right)^2\sigma_{X_i}^2=\left(\frac{\mu_a}{\sqrt{\mu_a{}^2+\mu_b{}^2}}\right)^2\sigma_a^2+\left(\frac{\mu_b}{\sqrt{\mu_a{}^2+\mu_b{}^2}}\right)^2\sigma_b^2$$

$$E[c]=\sqrt{12.2^2+5.1^2}=13.22$$

$$Var[c]=\frac{12.2^2}{12.2^2+5.1^2}0.4^2+\frac{5.1^2}{12.2^2+5.1^2}0.3^2=0.1496$$

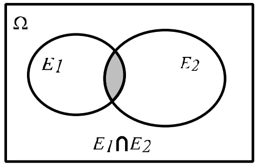
$$P_f=P(C>13.5)=1-P(C\le 13.5)=1-\Phi\left(\frac{13.5-13.22}{\sqrt{0.15}}\right)=0.235$$

(vergleiche Skript S. 181/182)

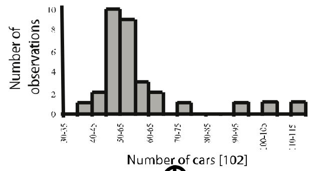
Lehrveranstaltung im Überblick

Modul A
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

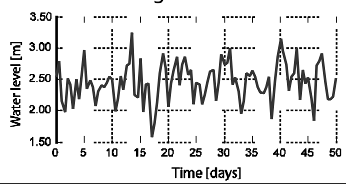
Modul B - Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie



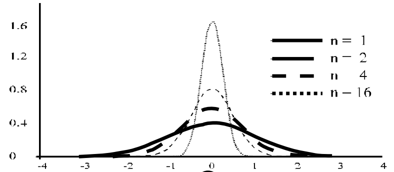
Modul C - Beschreibende Statisktik



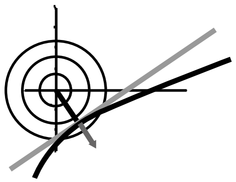
Modul D - Modellierung von Unsicherheiten



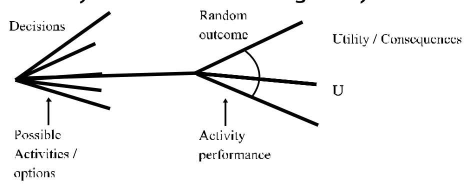
Modul E - Parameterschätzung und Modellerstellung



Modul F - Methoden der strukturellen Zuverlässigkeit

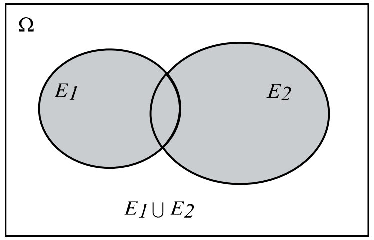


Modul G - Bayes'sche Entscheidungsanalyse

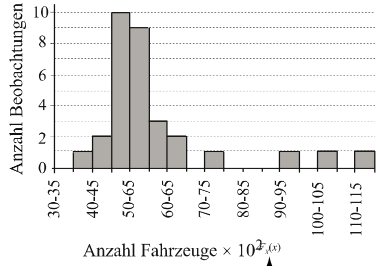


Überblick über die Kapitel

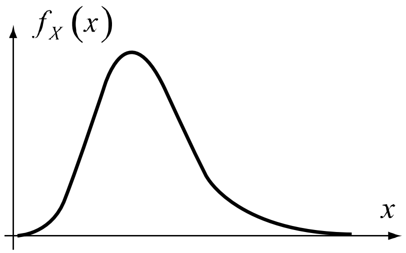
Wahrscheinlichkeits-theorie



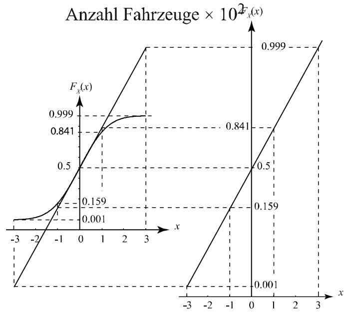
Grafische /numerische Interpretation von Beobachtungen



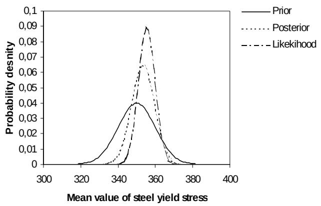
Verteilungs-funktionen, Momente, Extreme



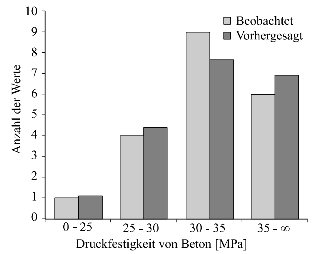
Modellierung und Datenbeschreibung



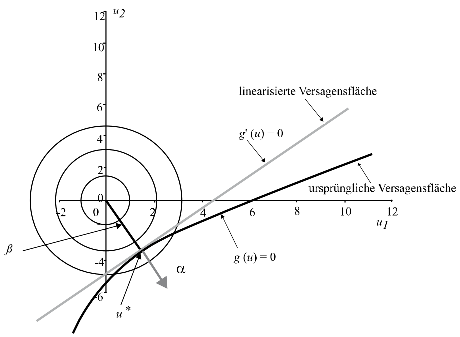
Bayes'sche Modellierung



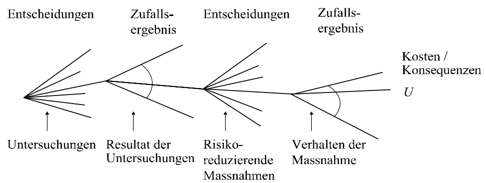
Modellevaluation



Zuverlässigkeits-analyse



Entscheidungs-findung



Inhalt der heutigen Vorlesung

- Einführung in die Entscheidungstheorie
  - Das Problem
  - Der Entscheidungsbaum
  - A-priori Analyse
  - A-posteriori Analyse
  - Prä-posteriori Analyse

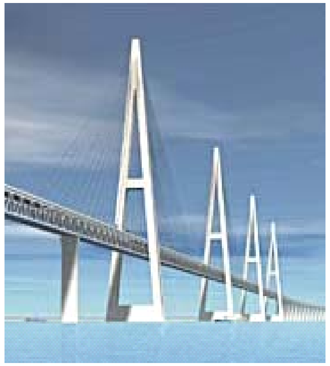
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

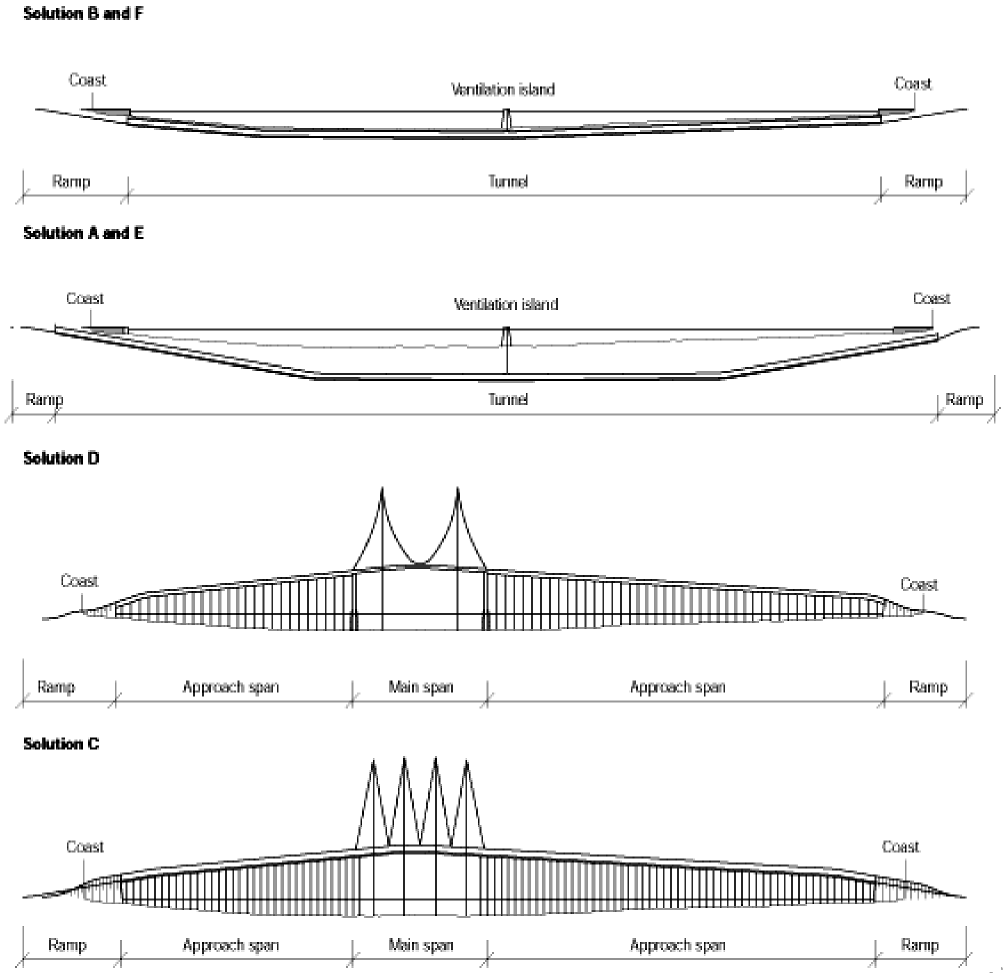
- Das grundlegende Ingenieurproblem

Mehrere mögliche Lösungen sind denkbar

Die vorhandene Information ist unsicher

Eine Entscheidung muss getroffen werden!



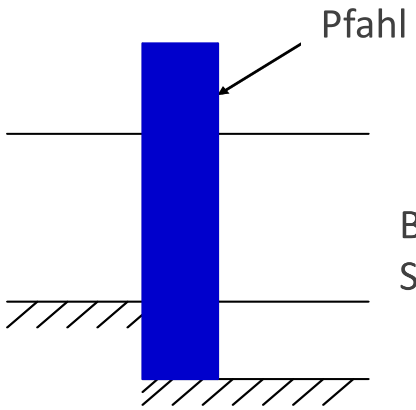


Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Vorgehen
  1. Formulierung des Entscheidungsproblems
     - Identifizierung des Entscheidungsträgers und seiner Präferenzen
     - Darstellen des Entscheidungsprozesses
     - Identifizierung aller möglichen Entscheidungsalternativen
     - Identifizierung der Unsicherheiten
  2. Identifizierung potentieller Konsequenzen und ihres Nutzens (Kosten und Ertrag)
  3. Beurteilung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Konsequenzen
  4. Vergleich der unterschiedlichen Entscheidungsalternativen basierend auf dem Erwartungswert ihres Nutzens
  5. Entscheidung und Dokumentation der Annahmen, auf welchen die gewählte Alternative beruht

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Der Entscheidungsbaum



Beträgt die Tiefe zur tragenden Schicht 40 oder 50 Meter?

Entscheidungs-alternativen	Zustand	Konsequenz	Kosten
Pfahl 40m	Tiefe=40m	Keine	0
	Tiefe=50m	Verbindung zweier Pfähle	400
Pfahl 50m	Tiefe=40m	Pfahl kürzen	100
	Tiefe=50m	Keine	0

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Zuordnung von Nutzen
  - Der Nutzen spiegelt die Präferenzen des Entscheidungsträgers wider.
  - Nutzenfunktionen können als lineare Funktionen definiert werden, ausgedrückt in monetären Einheiten.
  - Alle monetären Konsequenzen sind in der Nutzenfunktion zu integrieren.

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Zuordnung von Nutzen

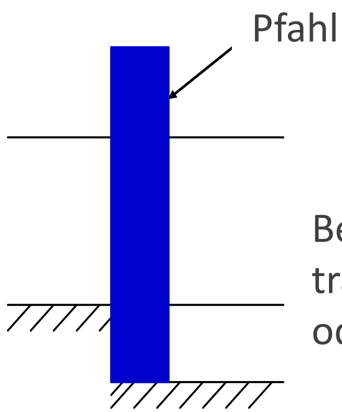
$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j u(K_j)$$

$u(a_i)$	Nutzen (Kosten und Ertrag) der aus der Handlungs-alternativen a_i entsteht
$p_j u(K_j)$	Erwartungswert des Nutzens der Konsequenz K_j
p_j	Eintrittswahrscheinlichkeit der Konsequenz K_j
$u(K_j)$	Nutzen der Konsequenz K_j
K_j	Potentielle Konsequenz aus der Handlungsalternativen a_i

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Die unterschiedlichen Typen der Analyse in der Entscheidungstheorie:

- A-priori Analyse
- A-posteriori Analyse
- Prä-posteriori Analyse



Beträgt die Tiefe zur tragenden Schicht 40 oder 50 Meter?

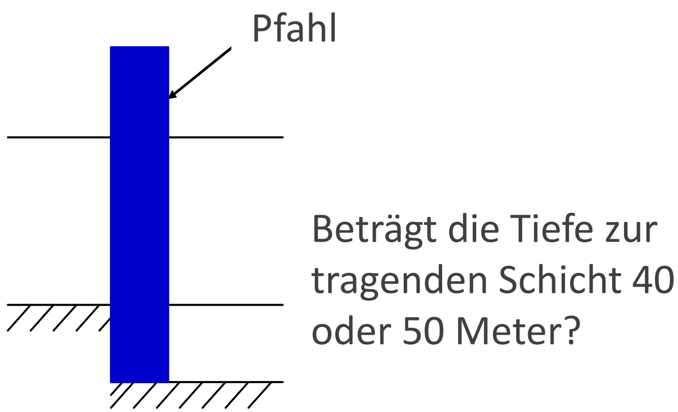
Beispiel

Welche Pfahllänge sollte eingesetzt werden?

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Beispiel

Welche Pfahllänge sollte eingesetzt werden?



Alternativen:

a_0 : Wahl eines Pfahls mit 40 Metern Länge

a_1 : Wahl eines Pfahls mit 50 Metern Länge

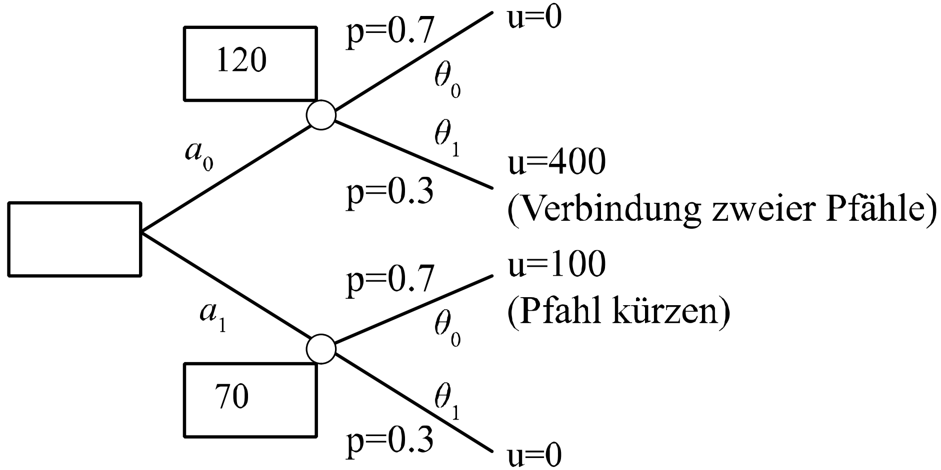
Zustände der Natur (Tiefe des Untergrundes):

θ_0: Untergrund in 40 Metern Tiefe $P'(\theta_0) = 0.7$

θ_1: Untergrund in 50 Metern Tiefe $P'(\theta_1) = 0.3$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-priori Analyse



θ_0 : Untergrund in 40 Metern Tiefe; $P'(\theta_0) = 0.7$

θ_1 : Untergrund in 50 Metern Tiefe; $P'(\theta_1) = 0.3$

a_0 : Wahl eines Pfahls mit 40 Metern Länge

a_1 : Wahl eines Pfahls mit 50 Metern Länge

Wenn Tiefe > Pfahllänge: Verbinden = 400 CHF

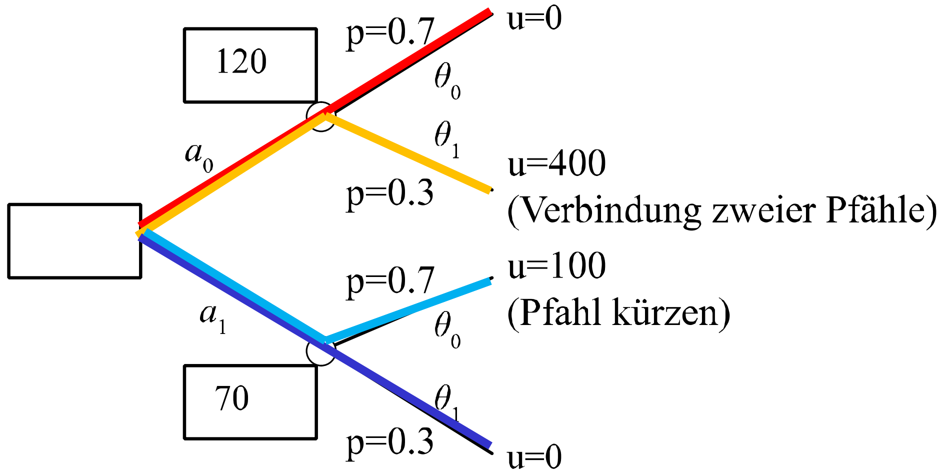
Wenn Pfahllänge > Tiefe: Kürzen = 100 CHF

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-priori Analyse

$$P'(\theta_0) = 0.7$$

$$P'(\theta_1) = 0.3$$



$$\begin{aligned} E'[u] &= \min\{u[a_0]\ , u[a_1]\} \\ &= \min\{P'[\theta_0]\cdot u[\theta_0|a_0] + P'[\theta_1]\cdot u[\theta_1|a_0]\ , \\ &\qquad P'[\theta_0]\cdot u[\theta_0|a_1] + P'[\theta_1]\cdot u[\theta_1|a_1]\} \\ &= \min\{0.7\cdot 0 + 0.3\cdot 400,\ 0.7\cdot 100 + 0.3\cdot 0\} \\ &= \min\{120, 70\} = 70 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Entscheidung für a_1: Pfahl 50 m

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

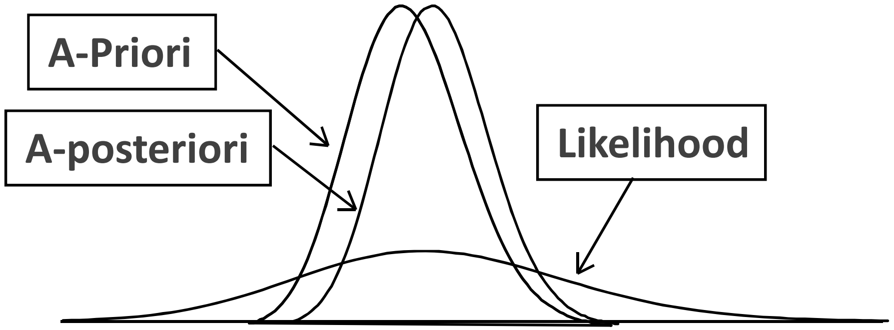
A-posteriori Analyse

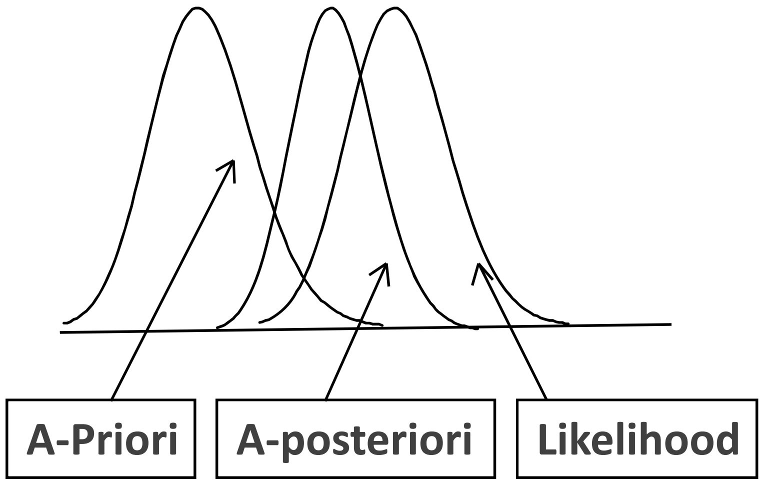
$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

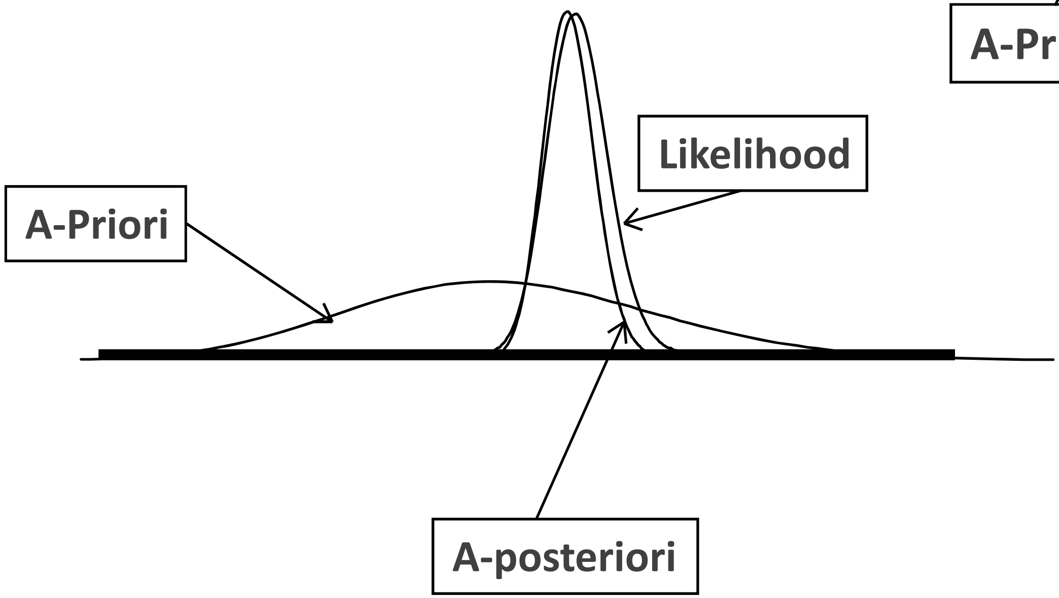
$$\left(\text{A-posteriori Wahrscheinlichkeit für Zustand } \theta_i \text{ gegebene die Beobachtung}\right) = \left(\text{Normierungsfaktor}\right) \left(\text{Likelihood der Beobachtung gegeben Zustand } \theta_i\right) \left(\text{A-priori Wahrscheinlichkeit für Zustand } \theta_i\right)$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse







Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

Ultraschalltests werden durchgeführt,

um die Tiefe des Untergrundes festzustellen.

Wahrer Zustand / Testresultat	θ_0 40 m Tiefe	θ_1 50 m Tiefe
z_0 40 m Indikation	0.6	0.1
z_1 50 m Indikation	0.1	0.7
z_2 45 m Indikation	0.3	0.2

Likelihoods der verschiedenen Indikationen (Testresultate) je Zustand der Natur.

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

Nehmen wir an, der Test zeigt 45 Meter an:

$$P''[\theta_0] = P[\theta_0 | z_2] \propto P[z_2 | \theta_0] P[\theta_0] = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$$

$$P''[\theta_1] = P[\theta_1 | z_2] \propto P[z_2 | \theta_1] P[\theta_1] = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

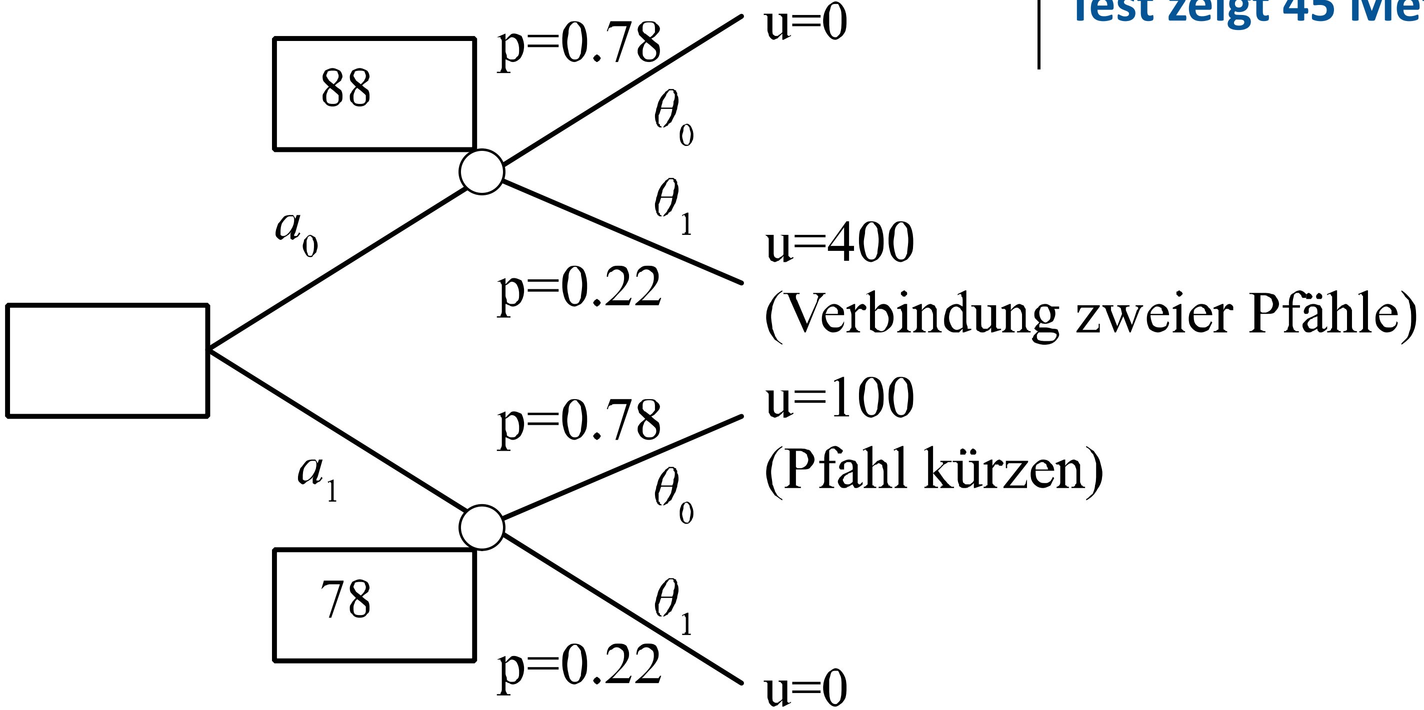
$$P''[\theta_0 | z_2] = \frac{0.21}{0.21 + 0.06} = 0.78$$

$$P''[\theta_1 | z_2] = \frac{0.06}{0.21 + 0.06} = 0.22$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel

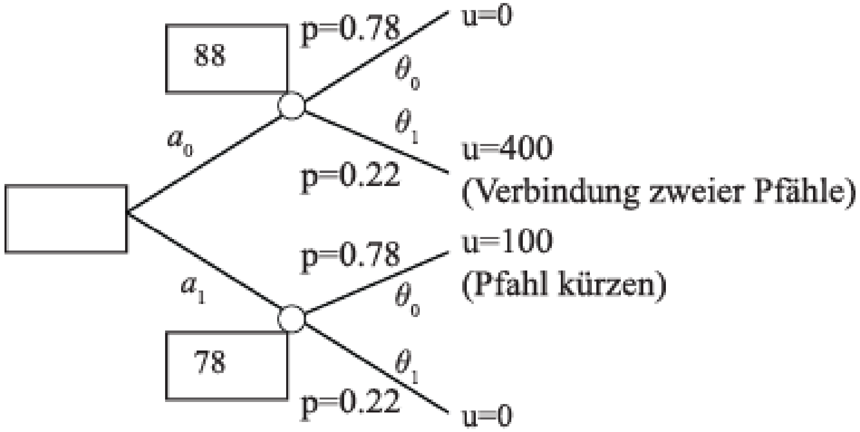
Test zeigt 45 Meter an (z_2)



$\Longrightarrow$ **Entscheidung für a_1: Pfahl 50 m**

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel



$$E''\left[u \middle| z_2\right] = \min_j \{E''\left[u(a_j) \middle| z_2\right]\}$$

$$= \min\{P''[\theta_0]\cdot 0 + P''[\theta_1]\cdot 400,\ P''[\theta_0]\cdot 100 + P''[\theta_1]\cdot 0\}$$

$$= \min\{0.78\cdot 0 + 0.22\cdot 400,\ 0.78\cdot 100 + 0.22\cdot 0\}$$

$$= \min\{88\ ,\ 78\} = 78$$

$\Longrightarrow$ **Entscheidung für a_1: Pfahl 50 m**

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prä-Posteriori Analyse

- Betrachten wir das gleiche Beispiel – Pfähle
- Nun hat der Ingenieur die Möglichkeit im Vorfeld zwischen verschiedenen Untersuchungsoptionen zu wählen, z.B.:
  - e_0 keine Untersuchungen -> keine Kosten
  - e_1 Ultraschall -> 20 CHF
  - e_2 Probeborung -> 50 CHF
- Die Möglichen Zusatzuntersuchungen beinhalten Kosten
- Wie kann nun entschieden werden, welche Option die grösste Kosteneffizienz hat?

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

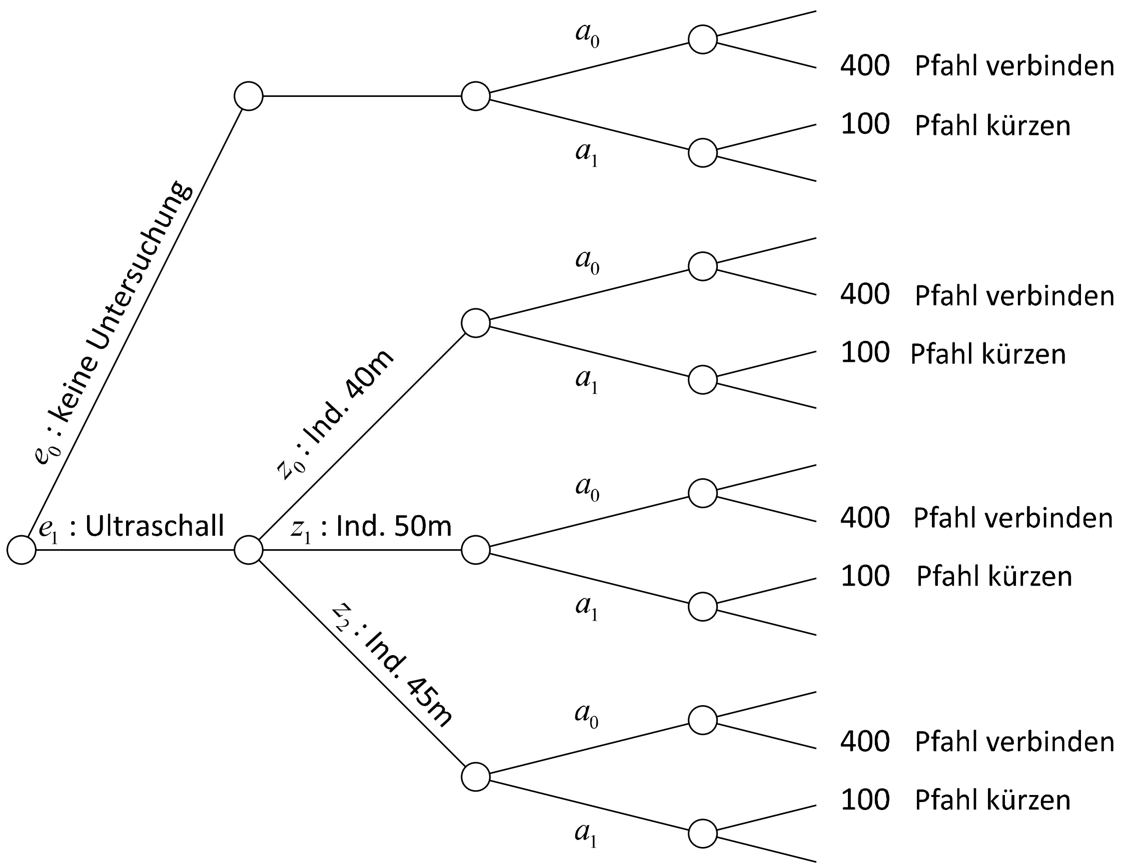
Prä-Posteriori Analyse

$$E[u]=\sum_{i=1}^{n} P'[z_i]\times E''[u|z_i]=$$

$$\sum_{i=1}^{n} P'[z_i]\times \min_{j=1,m}\{E''[u(a_j)|z_i]\}$$

a_0 Pfahllänge 40 m

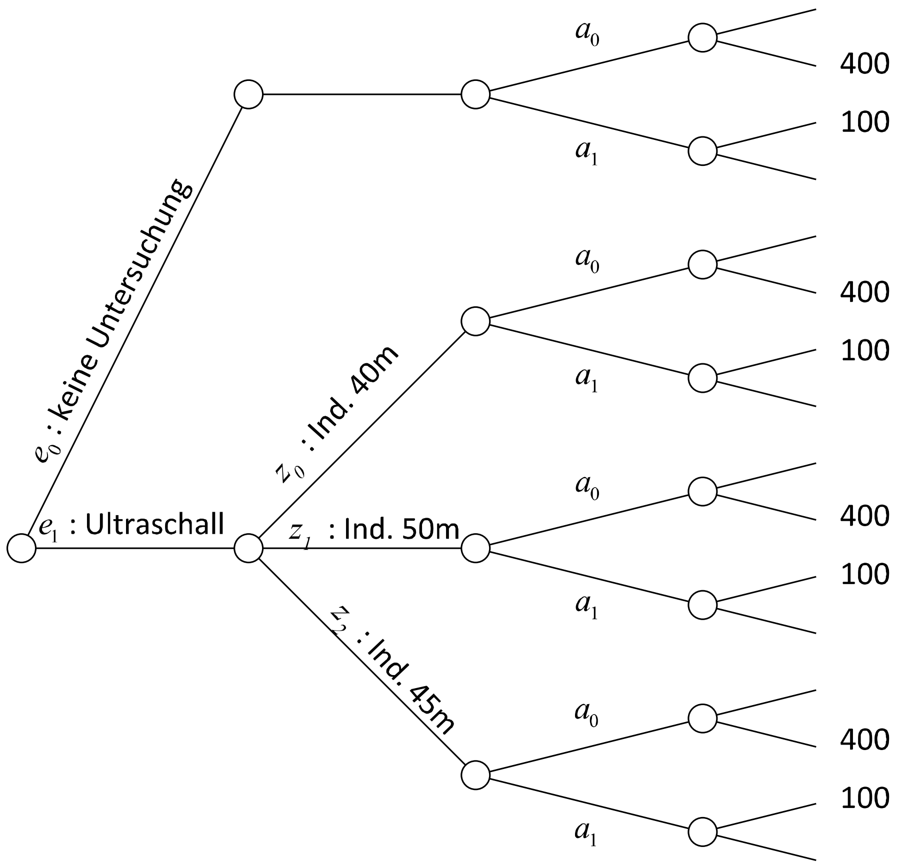
a_1 Pfahllänge 50 m



$$P'[z_i]=P[z_i|\theta_0]\times P'[\theta_0]$$
$$+P[z_i|\theta_1]\times P'[\theta_1]$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prä-Posteriori Analyse



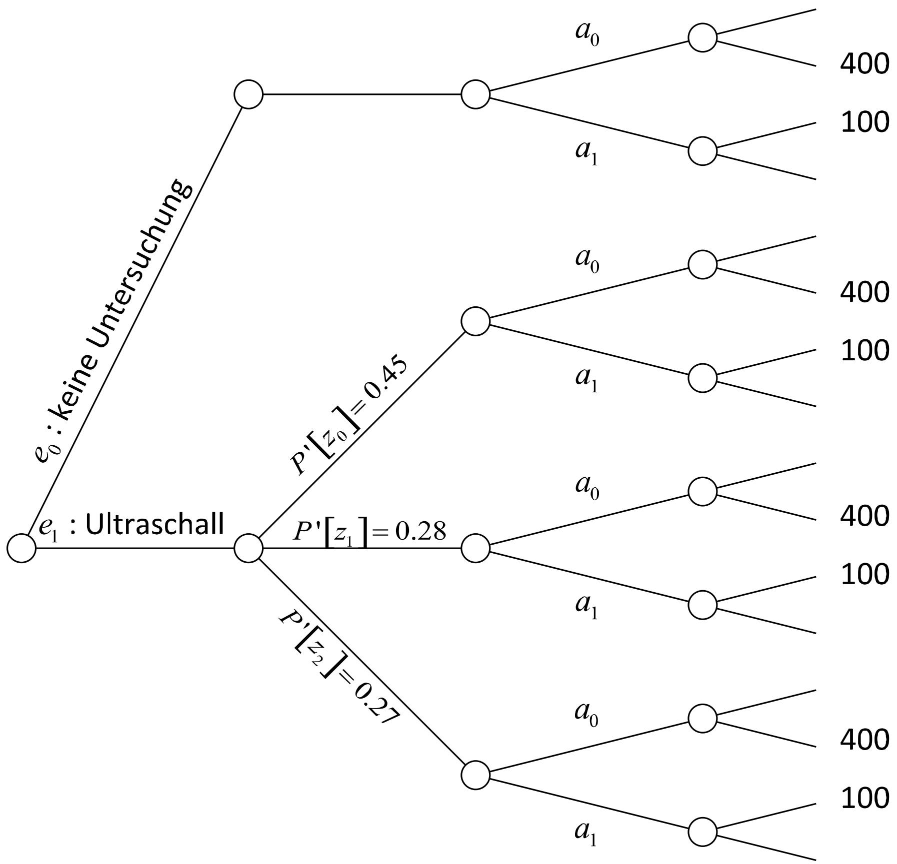
$$P'[z_0] = P[z_0|\theta_0] \times P'[\theta_0] + P[z_0|\theta_1] \times P'[\theta_1]$$
$$= 0.6 \times 0.7 + 0.1 \times 0.3 = 0.45$$

$$P'[z_1] = P[z_1|\theta_0] \times P'[\theta_0] + P[z_1|\theta_1] \times P'[\theta_1]$$
$$= 0.1 \times 0.7 + 0.7 \times 0.3 = 0.28$$

$$P'[z_2] = P[z_2|\theta_0] \times P'[\theta_0] + P[z_2|\theta_1] \times P'[\theta_1]$$
$$= 0.3 \times 0.7 + 0.2 \times 0.3 = 0.27$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prä-Posteriori Analyse



$$P'[z_0]=P[z_0|\theta_0]\times P'[\theta_0]+P[z_0|\theta_1]\times P'[\theta_1]$$
$$=0.6\times 0.7+0.1\times 0.3=0.45$$

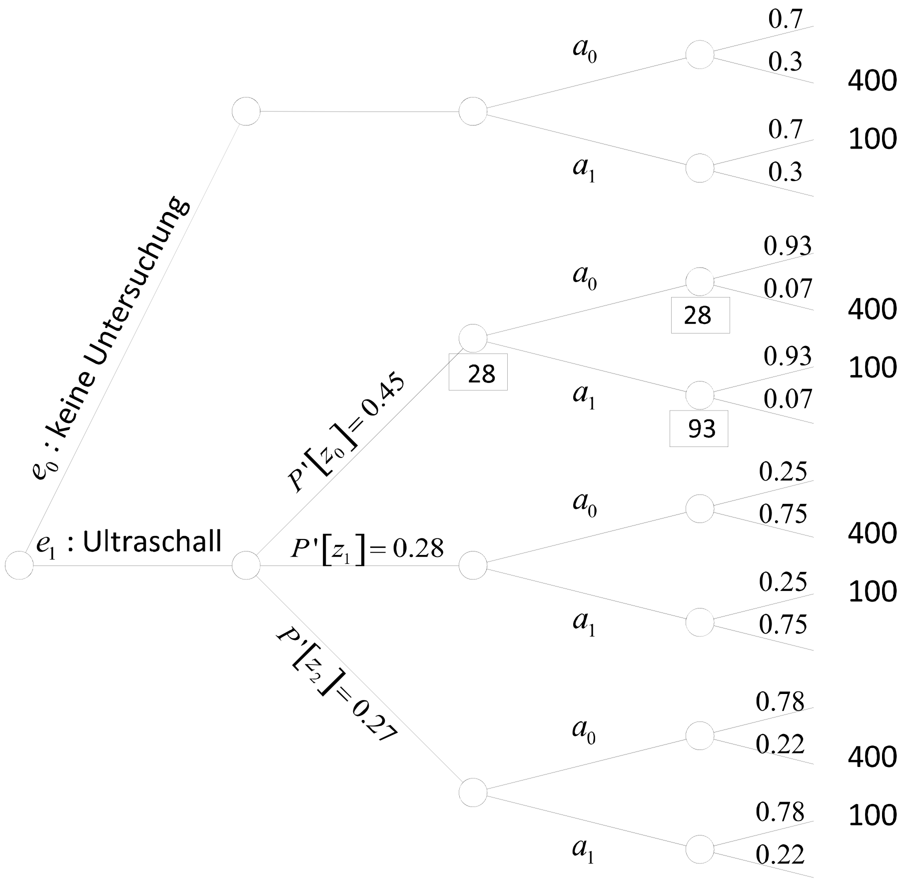
$$P'[z_1]=P[z_1|\theta_0]\times P'[\theta_0]+P[z_1|\theta_1]\times P'[\theta_1]$$
$$=0.1\times 0.7+0.7\times 0.3=0.28$$

$$P'[z_2]=P[z_2|\theta_0]\times P'[\theta_0]+P[z_2|\theta_1]\times P'[\theta_1]$$
$$=0.3\times 0.7+0.2\times 0.3=0.27$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prä-Posteriori Analyse

$$E''\left[u \middle| z_0\right] = \min_j \{E''\left[u(a_j)\middle| z_0\right]\} =$$



$$\overbrace{\min\{\underbrace{P''\left[\theta_0 \middle| z_0\right]\times 0}_{\text{Nichts tun}} + \underbrace{P''\left[\theta_1 \middle| z_0\right]\times 400}_{\text{verbinden}},}^{\mathbf{a_0}}$$

$$\underbrace{\overbrace{P''\left[\theta_0 \middle| z_0\right]\times 100}^{\text{Kürzen}} + \overbrace{P''\left[\theta_1 \middle| z_0\right]\times 0\}}^{\text{nichts tun}}}_{\mathbf{a_1}}$$

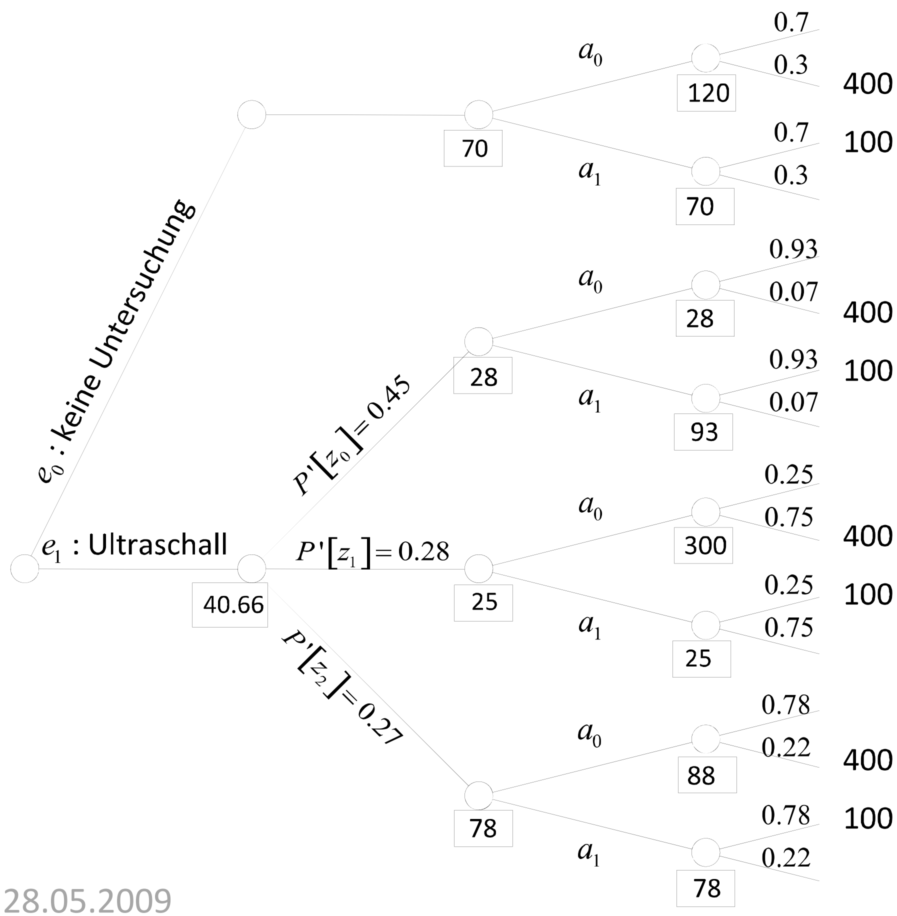
$$\min\{0.93\times 0 + 0.07\times 400,$$

$$0.93\times 100 + 0.07\times 0\} =$$

$$0.07\times 400 + 0.93\times 0 = 28$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prä-Posteriori Analyse



Minimal erwartete Kosten, basierend auf **Prä-posteriori Analyse** zur Entscheidungsfindung (Kosten der Versuche nicht beinhaltend)

$$E[u] = \sum_{i=1}^{n} P'[z_i] \times E''[u|z_i]$$

$$= 28 \times 0.45 + 25 \times 0.28 + 78 \times 0.27$$

$$= 40.66$$

Zulässige Kosten für die Versuche

$$E'[u] - E[u] = 70.00 - 40.66 = 29.34$$

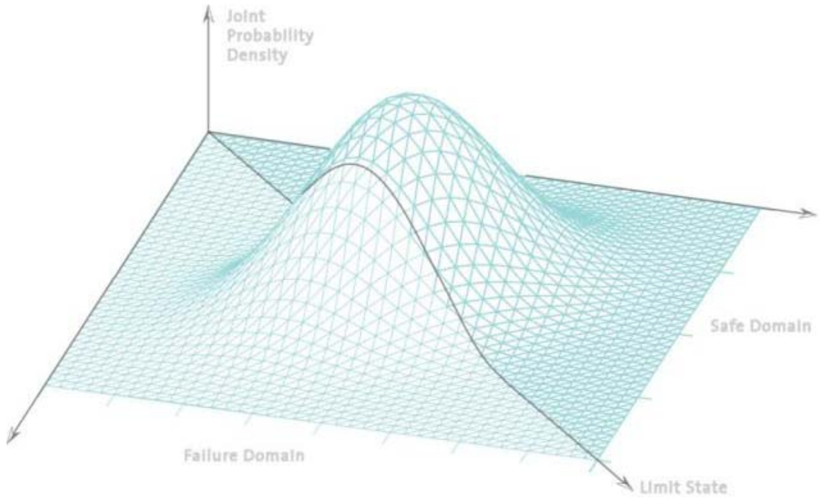
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Zusammenfassung

- Je nach Problemstellung kommen verschiedene Entscheidungsanalysen zum Einsatz.
  - A-priori Analyse: Bei gegebener (Ist-)Information
  - A-posteriori Analyse: Bei neuer Information
  - Prä-posteriori Analyse: Bei mehreren möglichen Zusatzuntersuchungen.
- Es wurden hier die einfachen Grundprinzipien dieser Entscheidungsmodelle vorgestellt.
- Die Prinzipien lassen sich auf beliebig komplexe Problemstellung erweitern.

Zusammenfassung der Vorlesung

- Unsicherheiten im Ingenieurwesen
- Zusammenfassung von Daten – nummerisch, graphisch
- Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten – bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes
- Zufallsvariablen und Prozesse
- Momente, Parameter und deren Schätzung
- Hypothesentests und Konfidenz, für Stichprobenstatistiken und Verteilungen
- Methoden der Zuverlässigkeit – Grenzzustände und Wahrscheinlichkeiten
- Entscheidungstheorie



Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Michael Havbro Faber