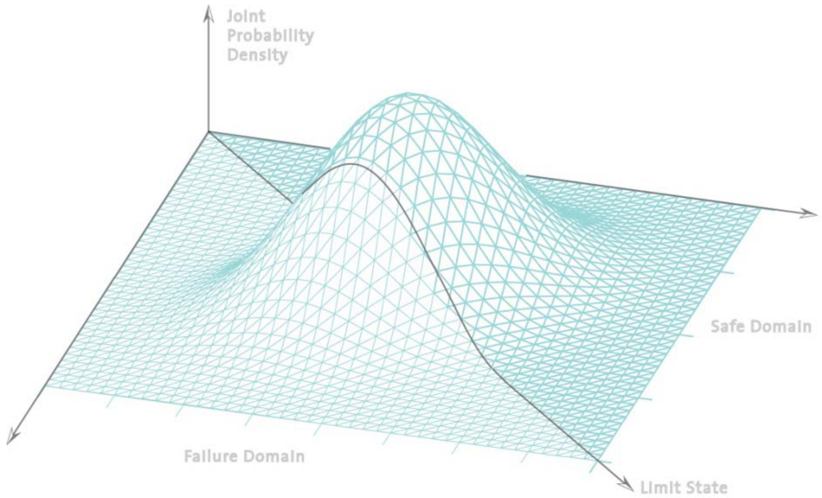


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 7

Am Donnerstag (22. April):
Vorlesung!
Start 7:45 Uhr, HIL E 4

Inhalt der heutigen Übung

- Informationen zur 1. Teilprüfung
- Vorrechnen der Gruppenaufgabe D.9
- Gemeinsames Lösen der Übungsaufgaben
  - D.10: Poissonprozess
  - D.11: Wiederkehrperiode
  - D.12: Extremwertverteilung
- Vorstellen der Gruppenaufgabe E.7.1

1. Teilprüfung

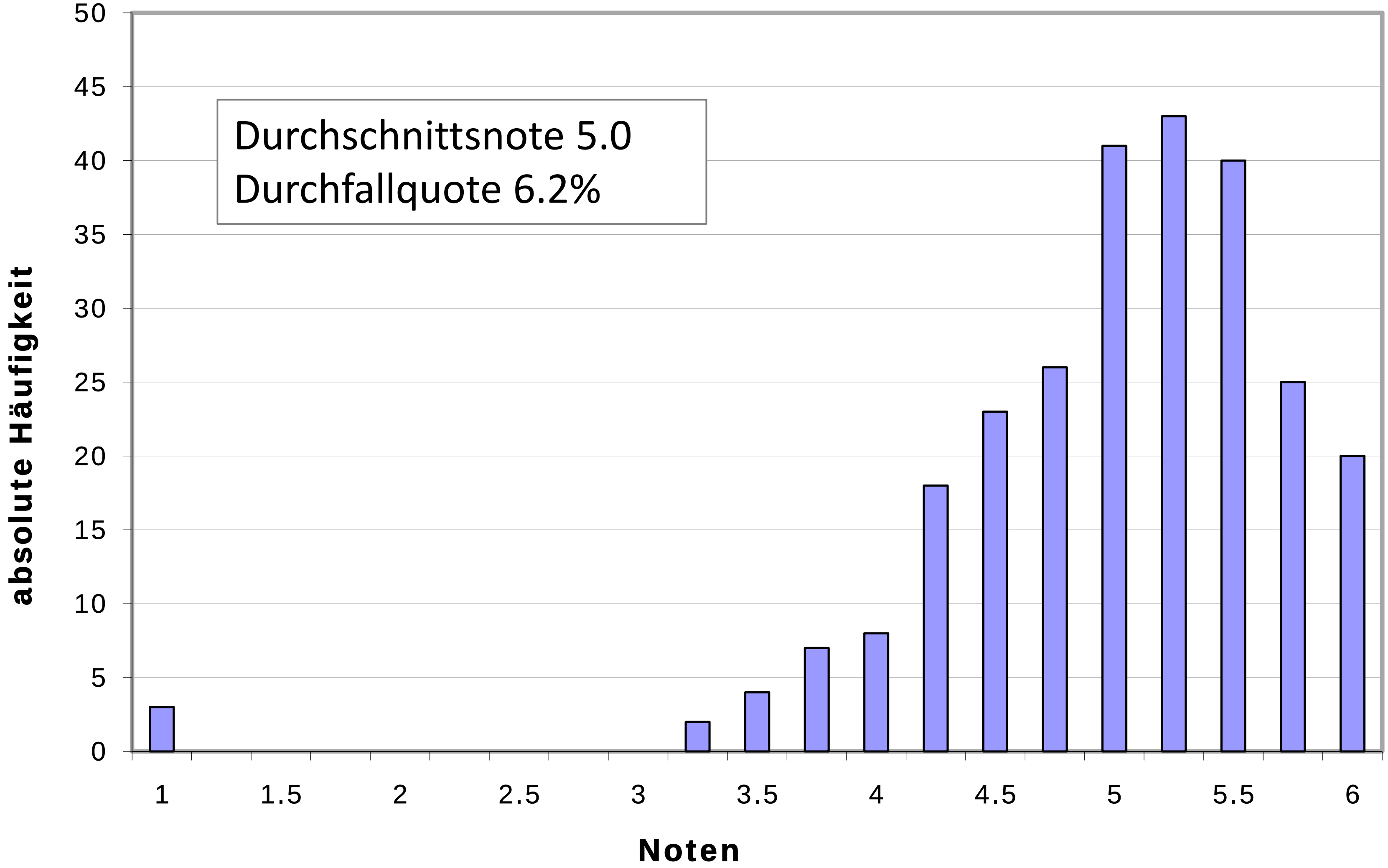
- Die Resultate und die Musterlösung sind online auf der Statistikwebpage:

  http://www.ibk.ethz.ch/fa/fa/education/ss_statistics/index

- Termine für die Prüfungseinsicht:
  Dienstag, 20.4.2010, 12-13 Uhr, HIL E 36.1
  Donnerstag, 22.4.2010, 12-13 Uhr, HIL E 10.2

  Anmeldung für die Einsicht bei einem der Statistik-Assistenten!

1. Teilprüfung - Notenspiegel



1. Teilprüfung

- Gewichtung der Teilprüfung:
  1. Teilprüfung: 1/6
  2. Teilprüfung: 1/6
  Basisprüfung: 2/3

- 2. Teilprüfung am Dienstag, den 27.05.2010

- Tipps:
  - Multiple Choice Aufgaben nie unbearbeitet lassen.
  - Rechenaufgabe: Lösungsweg aufschreiben.

Aufgabe D.9 (Gruppenaufgabe)

Aus Daten der letzten Jahre ist ersichtlich, dass von allen eingereichten Projektvorschlägen eines Planungsbüros im Umweltingenieurwesen 27% erfolgreich einen Zuschlag erhalten haben.
Als neuer Besitzer dieses Planungsbüros setzt du dich nun mit der Wirtschaftsplanung der kommenden Jahre auseinander. In diesem Zusammenhang interessiert dich,

a) wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass spätestens der 12. Projektvorschlag einen Zuschlag erhält.

b) wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass nur der letzte der nächsten 10 Projektvorschläge erfolgreich sein wird.

c) wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass höchstens 2 der nächsten 13 Projektvorschläge erfolgreich sein werden.

Zufallsprozesse

- Für viele Ingenieurfragen müssen wir die zufälligen Schwankungen über die Zeit spezifischer erfassen können:

- Diskreter Zufallsprozess:

  Das zufällige Eintreten von Ereignissen zu diskreten Zeitpunkten (Unfälle, Steinschlag, Erdbeben, Stau, Versagen, usw.)
  → Poissonprozess, Exponentialverteilung, Gammaverteilung

- Kontinuierlicher Zufallsprozess:
  Die zufälligen Ausprägungen von Ereignissen, welche kontinuierlich über die Zeit eintreten (Winddruck, Wellendruck, Temperaturen, usw.)
  → (Normalprozess)

Hochwasserereignis (diskret)

Belastungsschwankungen aufgrund Wellen (kontinuierlich)

Poissonprozess

Hochwasserereignis (diskret)

Ein Poissonprozess unterliegt folgenden Annahmen:

1. Die Wahrscheinlichkeit von zwei oder mehr Ereignissen in einem kleinen Zeitintervall sind vernachlässigbar klein.

2. Die auftretenden Ereignisse sind voneinander unabhängig.

→Die Abfolge von Ereignissen, die sich mit einer Poissonverteilung beschreiben lässt, nennt man Poissonprozess

Wartezeit zwischen zwei Ereignissen: Exponentialverteilung, Gammaverteilung

Poissonprozess

Poissonprozess $P_n(t)$

$\nu(t)$ = Intensität (mittlere Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit t)

n = Anzahl Ereignisse

t = Zeitintervall [0;t[

u = Mittlere Anzahl Ereignisse in einem (Zeit-)Intervall t

Homogener Poissonprozess

$\nu(t)$ = konstant

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} \qquad E(X) = u = \nu(t)\,t$$

$$u = \nu(t)\,t \qquad Var(X) = u = \nu(t)\,t$$

Inhomogener Poissonprozess

$\nu(t)$= nicht konstant

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} \qquad E(X) = u = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau$$

$$u = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau \qquad Var(X) = u = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau$$

Poissonprozess

Die Wahrscheinlichkeit von **keinem** Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall t:

$$P_0(t) = \exp(-u)$$

Homogener Poissonprozess

$$P_0(t) = \exp\left(-\nu(t)t\right)$$

Inhomogener Poissonprozess.

$$P_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)$$

Die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der (Warte-)Zeit bis zum **ersten Ereignis** T_1

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - P_0(t_1) = 1 - \exp(-u)$$

Homogener Poissonprozess

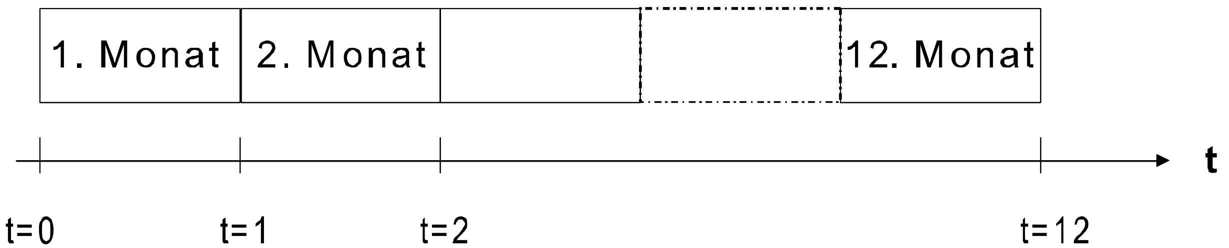
$$F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\nu(t)t_1)$$

Inhomogener Poissonprozess.

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\int_0^{t_1} \nu(\tau)d\tau)$$

Aufgabe D.10

a) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird durch einen **homogenen** Poissonprozess mit der Intensität $\nu(t)$ (mittlere Anzahl von Regenereignissen pro Zeiteinheit t) angegeben, wobei t in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,12] definiert ist.



$$\nu(t) = 2$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall vom 3. bis und mit 5. Monat

- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der Intensität $\nu(t) = 2$ folgen.

Aufgabe D.10

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall vom 3. bis und mit 5. Monat

- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der Intensität $\nu(t) = 2$ folgen.

$$\nu(t) = 2 \qquad u = \nu(t)\,t = 2 \cdot 3 = 6 \qquad P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

- kein Regenereignis

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-u} \qquad P_0(3) = \mathrm{e}^{-u} = e^{-6} = 0.0025$$

- genau ein Regenereignis

$$P_1(t) = \frac{u^1}{1!} e^{-u} \qquad P_1(3) = \frac{6^1}{1!} e^{-6} = 6e^{-6} = 0.0149$$

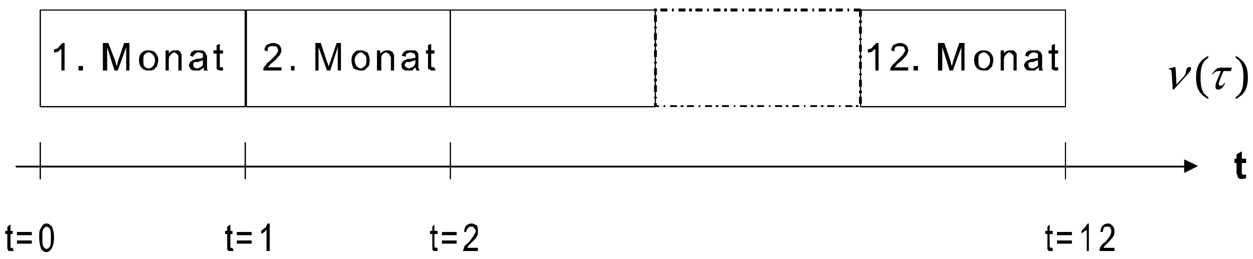
Aufgabe D.10

b) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird nun durch einen **inhomogenen** Poissonprozess mit der Intensität $\nu(\tau)$ angegeben, wobei τ in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,12] definiert ist.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

Aufgabe D.10

b) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird nun durch einen **inhomogenen** Poissonprozess mit der Intensität $\nu(\tau)$ angegeben, wobei τ in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,12] definiert ist.



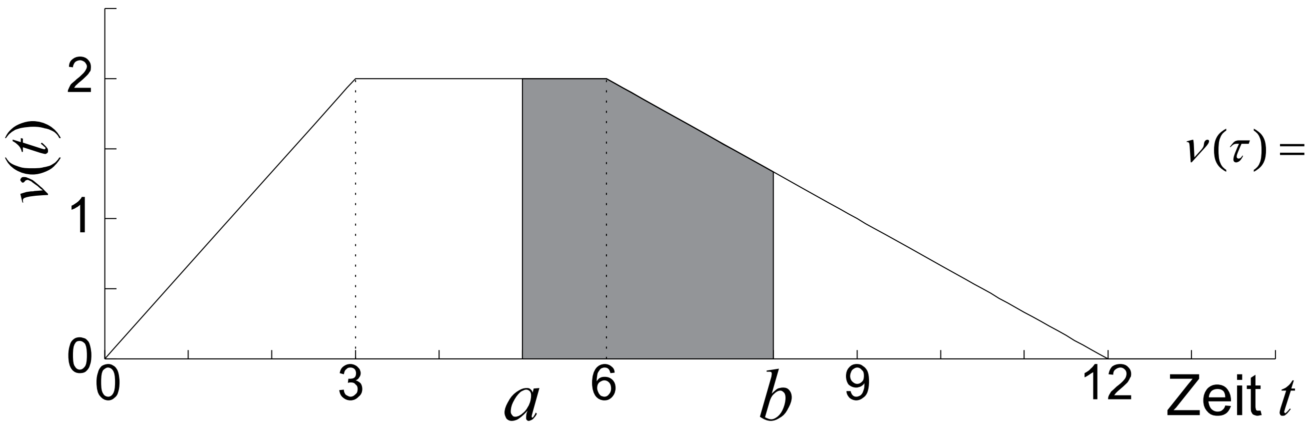
$$\nu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Hinweis: Für Prozesse, die einem inhomogenen Poissonprozess folgen, wird angenommen, dass $\nu(\tau)$ variabel mit der Zeit ist. Der Poisson-Parameter kann für jedes Zeitintervall (t_1, t_2) auf folgende Weise berechnet werden:

$$u = \int_{t_1}^{t_2} \nu(\tau)\, d\tau$$

Aufgabe D.10

Intensität $\nu(t)$ (Mittlere Auftretensrate pro Zeiteinheit t)



$$\nu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Mittlere Auftretensrate im Zeitintervall [a, b]: $u = \int_a^b \nu(\tau)dt$

$$P_n(t) = \frac{\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) \longrightarrow P_n(t) = \frac{u^n}{n!}e^{-u}$$

n = Anzahl Ereignisse

t = Zeitperiode, welche betrachtet wird

Aufgabe D.10

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

$$\nu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Vorgehen:

Zufallsvariable N = Anzahl Regenereignisse in den ersten fünf Monaten

Ermittle den Parameter u des Poissonprozesses $\quad P_n(t) = \dfrac{u^n}{n!} e^{-u}$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5)\right]$$

Aufgabe D.10

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

$$\nu(\tau)=\begin{cases}\frac{2\tau}{3} & \text{für } 0\le\tau\le 3\\ 2 & \text{für } 3<\tau\le 6\\ \frac{12-\tau}{3} & \text{für } 6<\tau\le 12\end{cases}$$

Bestimmung des Poisson Parameters $u=\int_a^b \nu(\tau)d\tau$

$$u=\int_{t_0}^{t_3}\nu(\tau)d\tau+\int_{t_3}^{t_5}\nu(\tau)d\tau=$$

$$\int_0^3\frac{2\cdot\tau}{3}d\tau+\int_3^5 2d\tau=\left.\frac{2\cdot\tau^2}{6}\right|_0^3+\left.2\cdot\tau\right|_3^5=$$

$$3+4=\underline{7=u}$$

Aufgabe D.10

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

$$\nu(\tau) = \begin{cases} \frac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \frac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5)\right] = \underline{\underline{0.97}}$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

$$P_0(5) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} = \frac{7^0}{0!} e^{-7} = e^{-7}$$

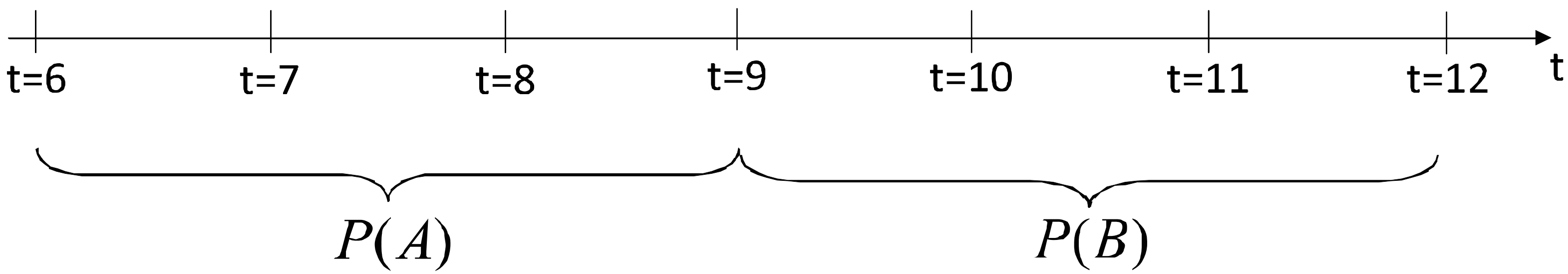
$$P_1(5) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} = \frac{7^1}{1!} e^{-7} = 7e^{-7}$$

$$P_2(5) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} = \frac{7^2}{2!} e^{-7} = \frac{49}{2} e^{-7}$$

Aufgabe D.10

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der zwei 3-monatigen Zeitintervallen vom 7. bis 9. Monat und vom 10. bis 12. Monat?

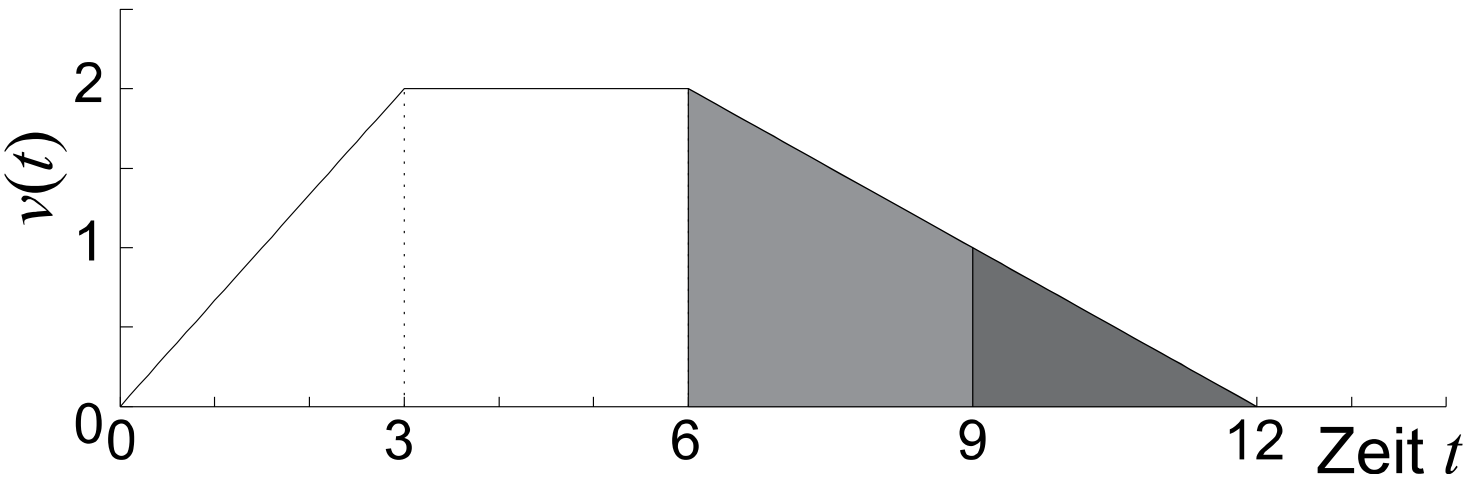
7. Monat	8. Monat	9. Monat	10. Monat	11. Monat	12. Monat



Ereignis A repräsentiert das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis in den Monaten 7,8 und 9.
Ereignis B repräsentiert das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis in den Monaten 10, 11 und 12.

$$P[A \cap B] = P(A) \cdot P(B)$$ Unabhängig!

Aufgabe D.10



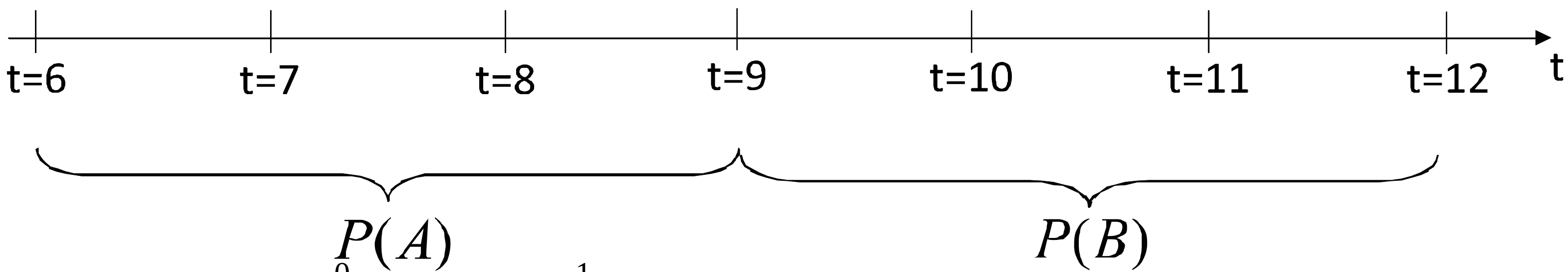
Als Mittelwert des Poissonprozesses ergeben sich für die beiden Intervalle in denen die Ereignisse unabhängig sind:

$$v(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{6-9} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_6^9 (12-\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{3}\left(12\cdot\tau - \dfrac{\tau^2}{2}\right)_6^9 = \underline{4.5} \\ u_{9-12} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_9^{12} (12-\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{3}\left(12\cdot\tau - \dfrac{\tau^2}{2}\right)_9^{12} = \underline{1.5} \end{cases}$$

Aufgabe D.10

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der zwei 3-monatigen Zeitintervalle vom 7. bis 9. Monat und vom 10 bis 12 Monat.

7. Monat	8. Monat	9. Monat	10. Monat	11. Monat	12. Monat



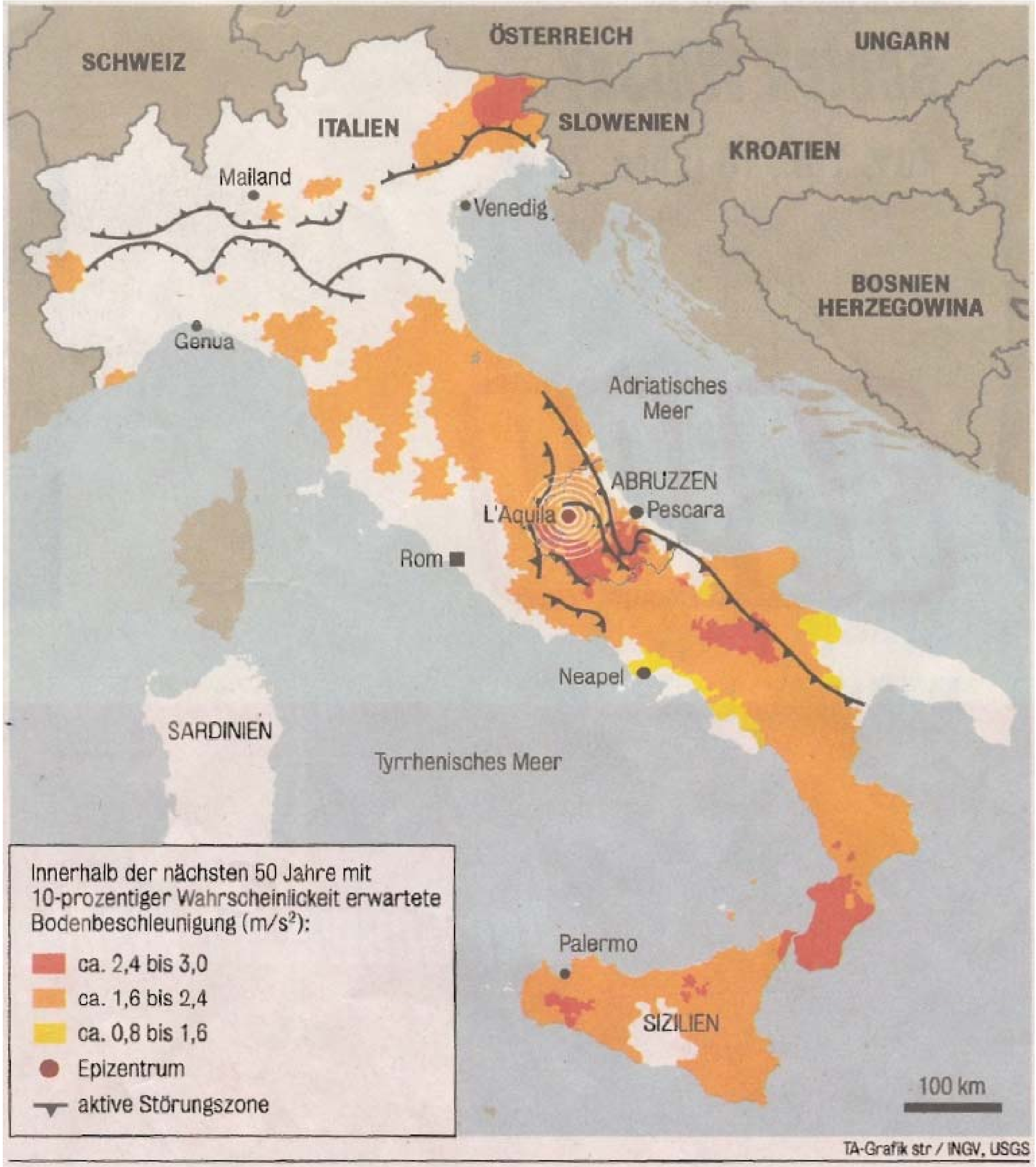
$$P(A) = \frac{4.5^0}{0!} e^{-4.5} + \frac{4.5^1}{1!} e^{-4.5} = \underline{6.11 \cdot 10^{-2}}$$

$$P(B) = \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} + \frac{1.5^1}{1!} e^{-1.5} = \underline{0.558}$$

$$P(A \cap B) = 6.11 \cdot 10^{-2} \cdot 0.558 = \underline{\underline{3.41 \cdot 10^{-2}}}$$

Aufgabe D.11

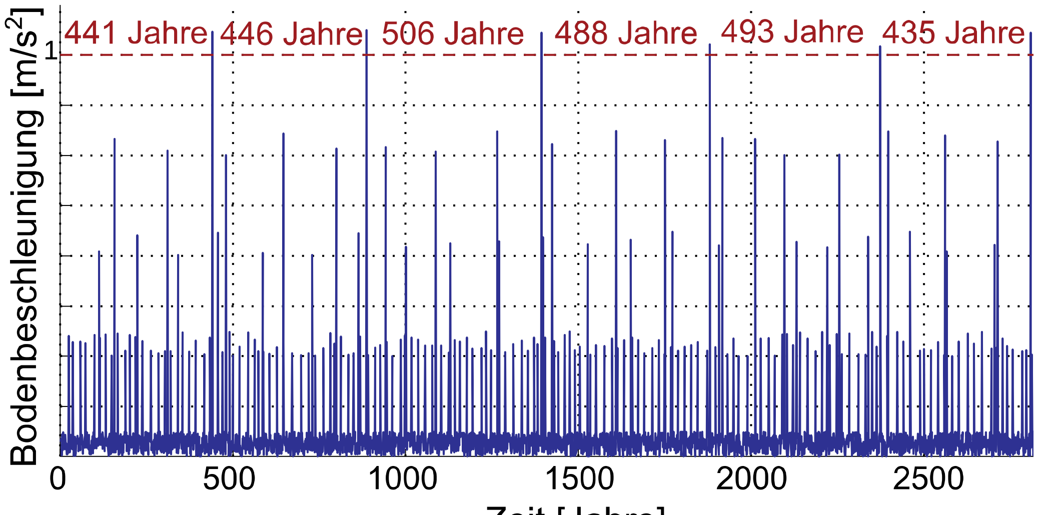
Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.



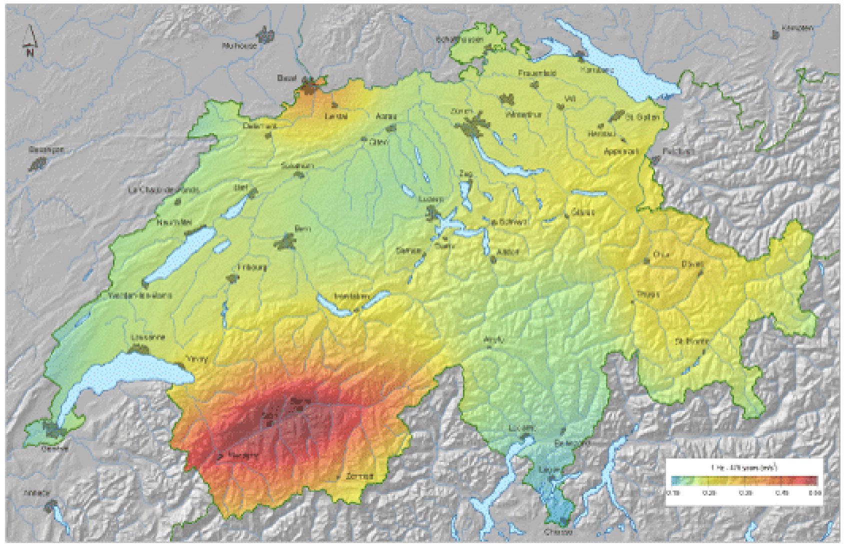
Tages-Anzeiger
Dienstag, 07. April 2009

Aufgabe D.11

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.



Mittlere Wiederkehrperidode = 475 Jahre



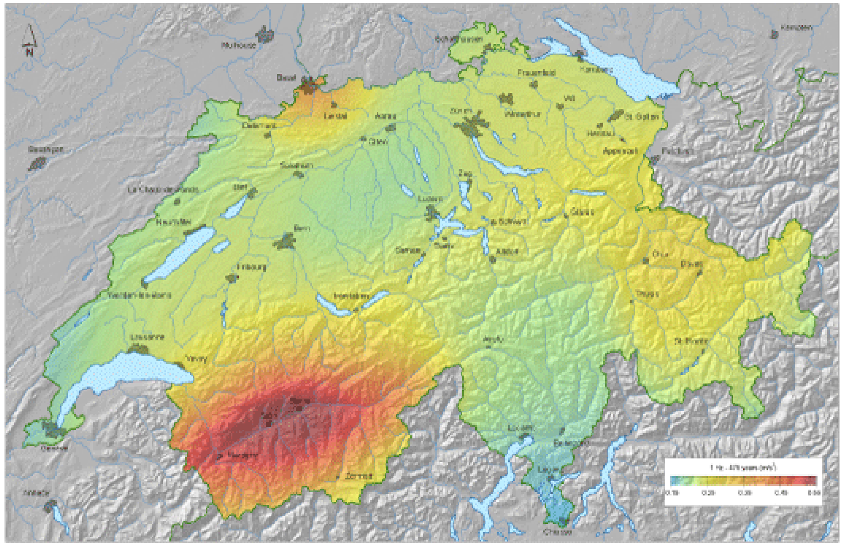
Erdbebengefährdung der Schweiz:
Horizontale Bodenbeschleunigung (m/s^2),
10% Überschreitungswahrscheinlichkeit
in 50 Jahren
www.earthquake.ethz.ch

Aufgabe D.11

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.

a) Zeigen Sie, dass die Wiederkehrperiode von 475 Jahren einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0.1 in 50 Jahren entspricht.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren tatsächlich innerhalb der 475 Jahre auftritt?



Erdbebengefährdung der Schweiz: Horizontale Bodenbeschleunigung (m/s^2), 10% Überschreitungswahrscheinlichkeit in 50 Jahren
www.earthquake.ethz.ch

Es wird angenommen, dass das Auftreten der Erdbeben einem homogenen Poissonprozess folgt.

Aufgabe D.11

a) Bestätige diese Beziehung:
Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer 10%igen Überschreitungswahrscheinlichkeit in 50 Jahren

Wiederkehrperiode T = 475 Jahre

jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{475}$
(Siehe Skript Seite D-25)

Durchschnittliche Zeit bis zu einem Auftreten: $E[T] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{475}} = 475$
(Siehe Skript Gleichung D.59)

Die Zeit zwischen Ereignissen des homogenen Poissonprozessen ist exponentialverteilt.
(Siehe Skript Gleichung D.64)

Aufgabe D.11

a) Bestätige diese Beziehung:
Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer 10%igen Überschreitungswahrscheinlichkeit in 50 Jahren.

Der Erwartungswert einer exponentiell verteilten Zufallsvariable T ist gegeben als:

$$E[T] = \frac{1}{\nu(t)} = 475 \qquad \nu(t) = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{475}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_A(50)$, dass Ereignis A in 50 Jahren auftritt, kann folgendermassen berechnet werden:

$$P\left[T \leq 50\, Jahre\right] = 1 - e^{-\nu(t)\cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475}\cdot 50} = 0.1$$

(Skript Gleichung D.65)

Aufgabe D.11

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren in den nächsten 475 Jahren auftritt?

Die Wahrscheinlichkeit $P_A(475)$, dass Ereignis A innerhalb eines Zeitraums von 475 Jahren auftritt, kann folgendermassen berechnet werden:

$$P\left[T \leq 475\ Jahre\right] = 1 - e^{-\nu \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475} \cdot 475} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert μ_X=10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s folgt.

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert μ_X=10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s folgt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert μ_X=10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s folgt.

Hinweis: Die Gumbel max Verteilungsfunktion hat nachfolgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert

σ_X – Standardabweichung

u – Parameter der Verteilung

α – Parameter der Verteilung

(Skript Tabelle D.2)

Aufgabe D.12

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$P[\,jährliches\ Max > 15'000] = 1 - F_X\left(15'000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

Parameter u und α ermitteln:

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_x\sqrt{6}} = \frac{\pi}{3'000\sqrt{6}} = \underline{4.2752 \cdot 10^{-4}}$$

$$u = \mu_x - \frac{0.57722}{\alpha} = 10'000 - \frac{0.57722}{4.2752 \cdot 10^{-4}} = \underline{8'649.809}$$

Aufgabe D.12

$$\alpha = 4.2752 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 8'649.809$$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

$$1 - F_X\left(15'000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

$$= 1 - e^{-e^{-4.2752\cdot 10^{-4}\,(15'000-8'649.81)}} = 1 - e^{-e^{-2.715}}$$

$$= 1 - 0.9359 = \underline{\underline{0.0641}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15‘000 m^3/s überschreitet, beträgt 0.0641.

Aufgabe D.12

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

Wiederkehrperiode = 100 Jahre

jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{100}$
(Skript Seite D-25)

$$1 - P[\,jährliches\ Max > x] = F_X(x)$$

$$1 - \frac{1}{100} = F_X(x)$$

Aufgabe D.12

$$\alpha = 4.2752 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 8'649.809$$

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher der Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

$$1 - \frac{1}{100} = F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}} = 0.99$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(0.99)) = -\alpha(x-u) \Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(0.99))}{-\alpha} + u = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(0.99))}{-4.2752\,10^{-4}} + 8649.809 = x \Leftrightarrow 10'760.08 + 8'649.809 = x$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{19'409.889}}$$

Die Überschwemmung, welche einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht, ist 19‘410 m^3/s.

Aufgabe D.12

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

Extremwertverteilungen

Wenn die Extremwerte innerhalb einer Periode T eines ergodischen Zufallsprozesses $X(t)$ unabhängig sind und der Verteilung

$$F_{X,T}^{\max}(x)$$

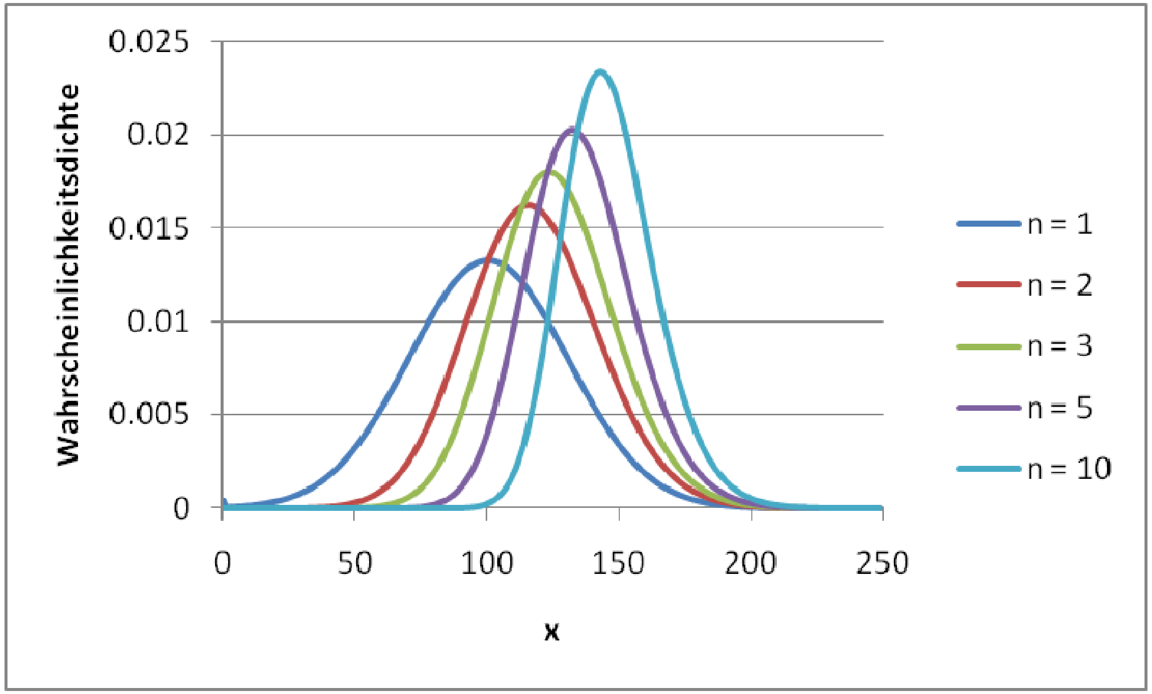
folgen, dann werden die Extremwerte des gleichen Prozesses innerhalb der Periode

$$n \cdot T$$

folgender Verteilung folgen:

$$F_{X,nT}^{\max}(x) = \left[F_{X,T}^{\max}(x) \right]^n$$

Skript, Gleichung D.78



Aufgabe D.12

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

Für unabhängige Zufallsvariablen ist die kumulative Verteilungsfunktion der grössten Extremwerte innerhalb eines Zeitintervalls nT gegeben als:

$$F_{X,nT}^{\max}(x) = \left[F_{X,T}^{\max}(x) \right]^n$$

Skript, Gleichung D.78

Für das 20jährige Abfluss-Maximum (y) mit n=20 bedeutet dies:

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = \left[F_X(x) \right]^{20} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}} \right)^{20} = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

Aufgabe D.12

$$\alpha = 4.2752 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 8'649.809$$

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

$$\left[F_X(x)\right]^{20} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{20} = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

$$1 - F_Y(15'000) = 1 - e^{-20e^{-4.2756\cdot 10^{-4}(15'000-8'649.81)}}$$

$$= 1 - e^{-1.324} = 1 - 0.266 = \underline{\underline{0.734}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die 20-jährige maximale Überschwemmung 15‘000 m^3/s überschreitet, beträgt 0.734.

Aufgabe E.7.1 *Gruppenaufgabe*

Um die Druckfestigkeit von Beton einer bestimmten Produktionsmarge zu modellieren, wurden 20 Stichproben gemessen. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt. Es wird angenommen, dass die Grundgesamtheit der Stichproben einer Lognormalverteilung $LN(\lambda, \varsigma)$ folgt.

Schätze die unbekannten Parameter λ, ς anhand der Momentenmethode.

Nummer der Messung	Druckfestigkeit [N/mm²]	Nummer der Messung	Druckfestigkeit [N/mm²]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7