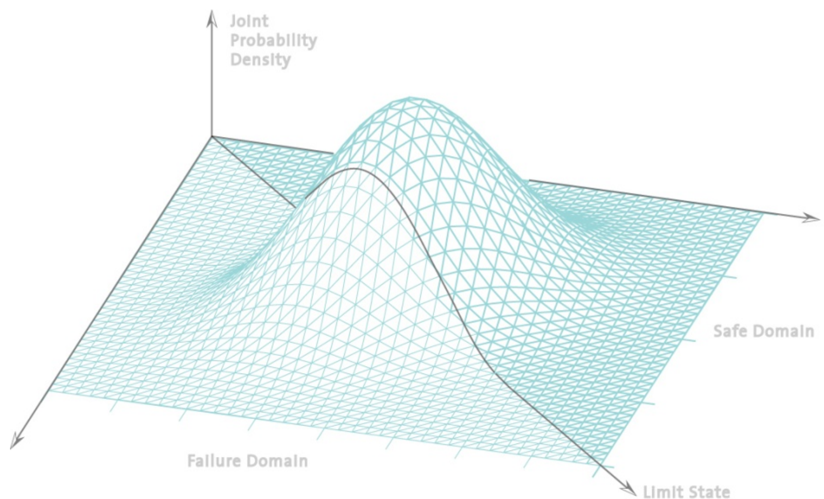


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 11

2. Teilprüfung am Donnerstag 27.Mai

Wann?

- Donnerstag, 27. Mai, 8:00 Uhr – 9:30 Uhr
- Bitte um 7:45 Uhr am Hörsaal sein!

Wo?

- Studierende mit Nachnamen A – J : HIL E 4
- Studierende mit Nachnamen K – Z : HCI G 3

2. Teilprüfung am Donnerstag 27.Mai

Inhalt

- Multiple Choice + 1 Übung zum Rechnen
- Gesamter Stoff bis einschliesslich Vorlesung 11 und Übung 10.

Erlaubte Hilfsmittel

- Alle Unterlagen erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt, auch programmierbare.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

Inhalt der heutigen Übung

- Gruppenaufgabe E.12: Maximum-Likelihood-Methode und χ^2 Test
- Aufgaben F.1: Fehlerfortpflanzungsgesetz
- Aufgabe F.2: Lineare Grenzzustandsfunktion
- Aufgabe F.3: Nicht lineare Grenzzustandsfunktion
- Vorstellen der Gruppenaufgabe F.4: Nicht lineare Grenzzustandsfunktion

Aufgabe E.12 Gruppenaufgabe

Anhand eines Teiles des in der ersten Vorlesung erhobenen Datensatzes, welcher die Körpergrösse aller Frauen beinhaltet, soll folgendes durchgeführt werden:

b) Passe die Normalverteilung den Beobachtungen an. Bestimme dazu die Parameter μ und σ mit der Maximum Likelihood Methode.

c) Teste die Güte der Anpassung für die Normalverteilung mit dem χ^2 Test auf einem Signifikanzniveau von 10%.

Aufgabe E.12 Gruppenaufgabe

b) Passe die Normalverteilung den Beobachtungen an. Bestimme dazu die Parameter μ und σ mit der Maximum Likelihood Methode.

Nr.	Grösse [cm]	Nr.	Grösse [cm]	Nr.	Grösse [cm]	Nr.	Grösse [cm]
1	158	11	164	21	170	31	175
2	158	12	165	22	170	32	175
3	158	13	165	23	172	33	176
4	160	14	165	24	172	34	176
5	160	15	166	25	172	35	176
6	162	16	166	26	173	36	177
7	162	17	168	27	174	37	178
8	164	18	168	28	174	38	183
9	164	19	169	29	175		
10	164	20	170	30	175		

$$x_M = 168.92cm$$
$$S_M = 6.41cm$$

Aufgabe F.1

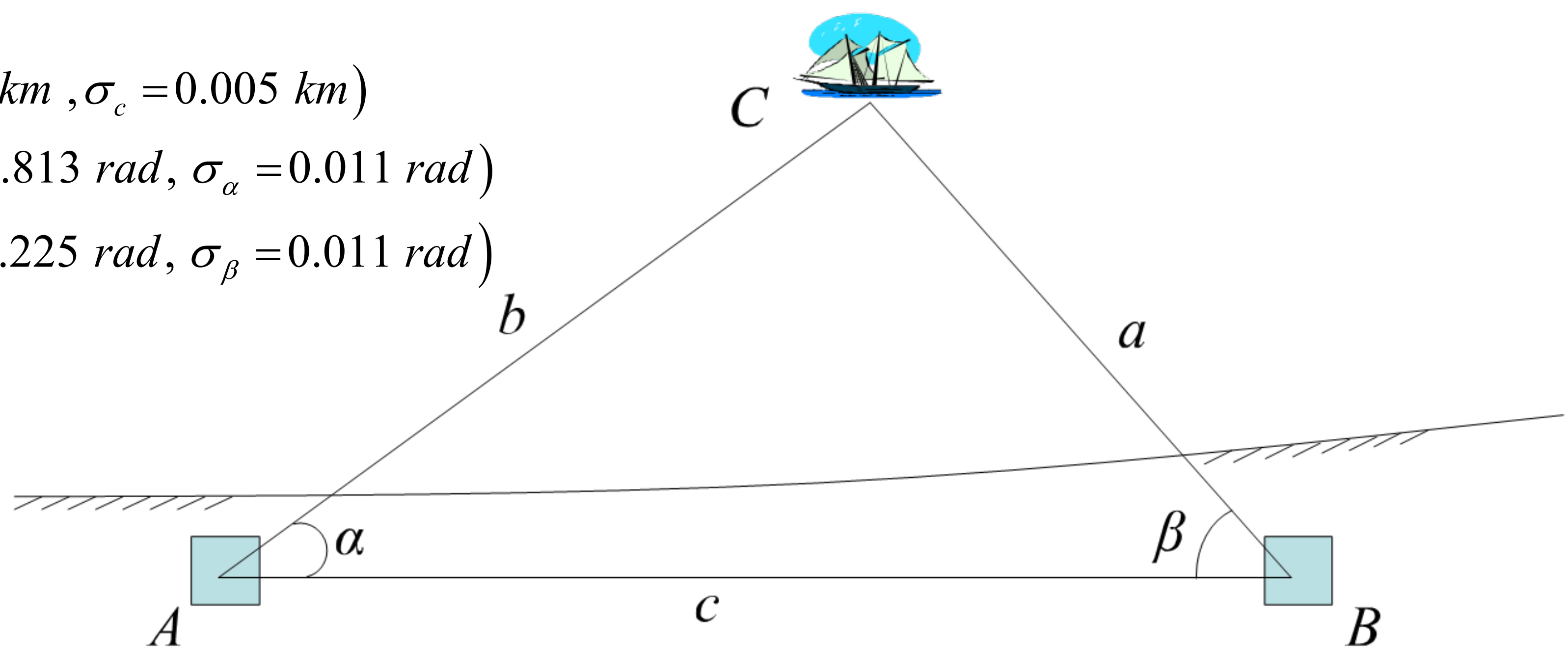
Die Position eines Schiffs kann ausgehend von zwei Punkten A und B, welche sich auf dem Festland befinden, eindeutig bestimmt werden. Die Winkel α und β werden von der Basislinie AB aus gemessen.

Bestimme den Fehler in b, wenn folgende Daten bekannt sind:

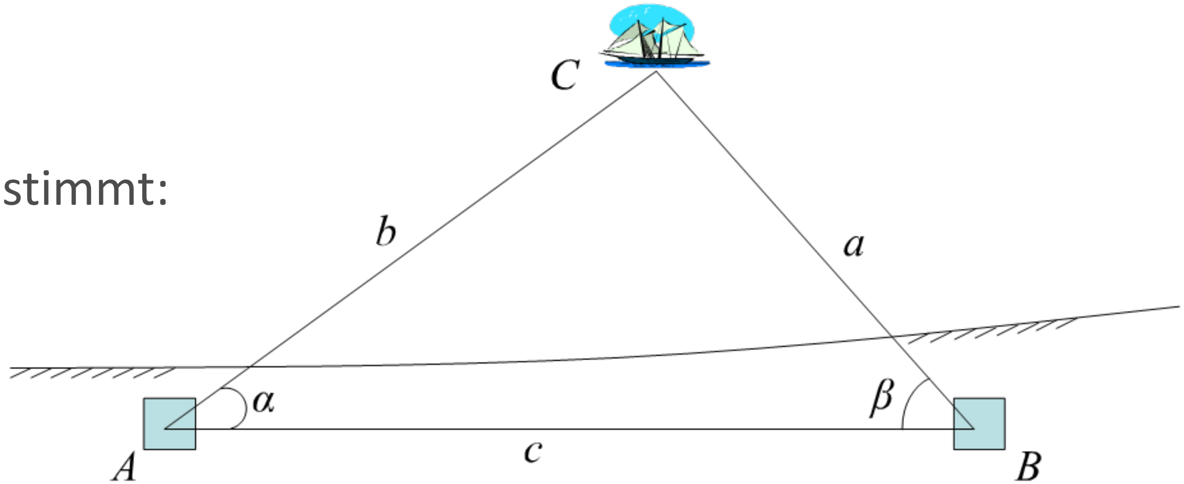
$$c \sim N\left(\mu_c = 6\ km\ , \sigma_c = 0.005\ km\right)$$

$$\alpha \sim N\left(\mu_\alpha = 0.813\ rad, \sigma_\alpha = 0.011\ rad\right)$$

$$\beta \sim N\left(\mu_\beta = 1.225\ rad, \sigma_\beta = 0.011\ rad\right)$$



Aufgabe F.1



b ist durch α, β und c bestimmt:

$$b = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}c$$

Die Frage lautet also: Wie kann die Unsicherheit in b anhand der Unsicherheiten in α, β und c berechnet werden?

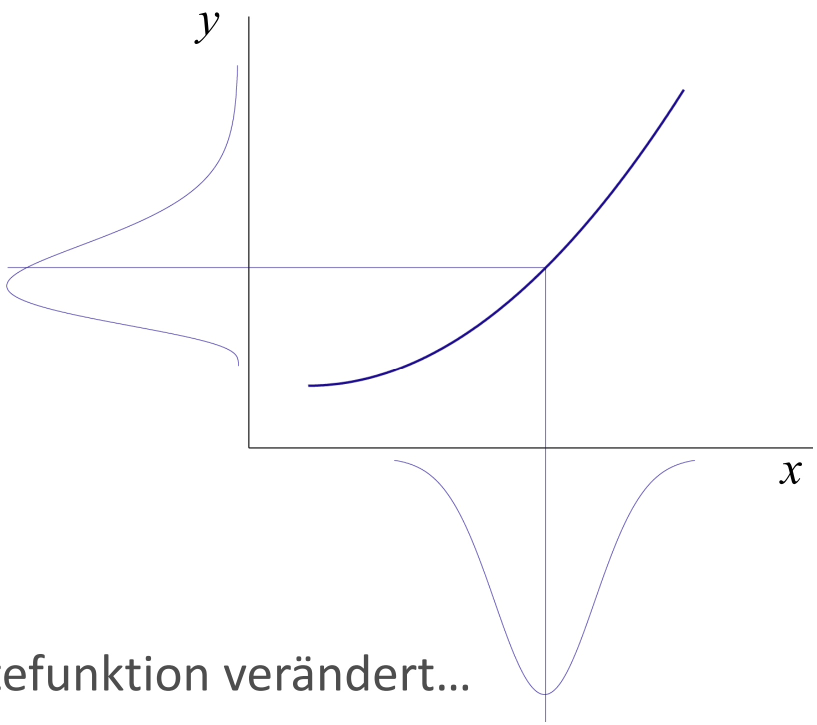
$$\left.\begin{array}{l} c \sim N\left(\mu_c = 6\ km\ , \sigma_c = 0.005\ km\right) \\ \alpha \sim N\left(\mu_\alpha = 0.813\ rad,\ \sigma_\alpha = 0.011\ rad\right) \\ \beta \sim N\left(\mu_\beta = 1.225\ rad,\ \sigma_\beta = 0.011\ rad\right) \end{array}\right. \xrightarrow{b = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}c} b \sim N\left(\mu_b\ ???\ km, \sigma_b = ???\ km\right)$$

Oder allgemein:

$$\text{Unsicherheit } X \xrightarrow{Y = h(X)} \text{Unsicherheit } Y$$

Fehlerfortpflanzungsgesetz

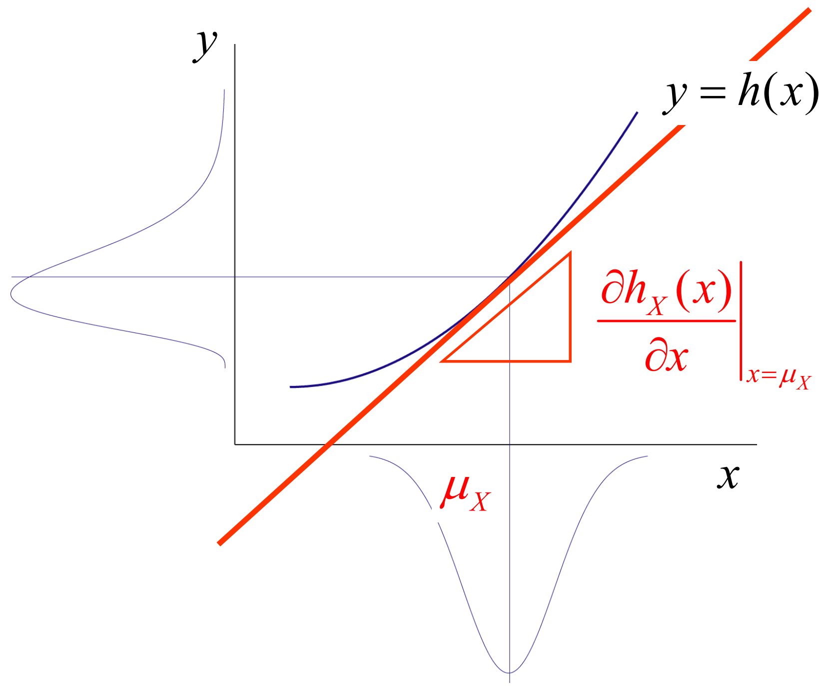
Wie überträgt sich die Unsicherheit in X
auf die Unsicherheit in $Y = h(X)$?



Bei einer Transformation wird die Dichtefunktion verändert...

Wie verhält sich dabei der Mittelwert?
Was passiert mit der Standardabweichung?

Fehlerfortpflanzungsgesetz



$$y = h(\mu_X) + \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x=\mu_X} (x - \mu_X)$$

Zur Erinnerung:

$E[aX+b]=aE[X]+b$
$Var[aX+b]=a^2 Var[X]$

Das bedeutet:

Wenn Y linear von X abhängt, kann der Mittelwert von Y aus dem von X berechnet werden.

Der Zusammenhang zwischen X und Y kann wie folgt angenähert werden:

$$y \approx h(\mu_X) + \left.\frac{\partial h(X)}{\partial x}\right|_{X=\mu_X} (X - \mu_X)$$

Fehlerfortpflanzungsgesetz

Unter Verwendung dieser Annäherung können wir den Mittelwert und die Standardabweichung von Y berechnen:

$$E[Y] = E\left[h(\mu_X) + \left.\frac{\partial h(X)}{\partial x}\right|_{X=\mu_X} (X-\mu_X) \right]$$

$$\boxed{E[aX+b] = aE[X]+b}$$

$$= h(\mu_X) + \left.\frac{\partial h(X)}{\partial x}\right|_{X=\mu_X} \cdot E\left[X-\mu_X\right]$$

$$E\left[X-\mu_X\right] = 0$$

$$= h(\mu_X)$$

$$Var[Y] = Var\left[h(\mu_X) + \left.\frac{\partial h(X)}{\partial x}\right|_{X=\mu_X} (X-\mu_X) \right]$$

$$\boxed{Var[aX+b] = a^2 Var[X]}$$

$$= \left(\left.\frac{\partial h(X)}{\partial x}\right|_{X=\mu_X} \right)^2 Var\left[X-\mu_X\right]$$

$$= \left(\left.\frac{\partial h(X)}{\partial x}\right|_{X=\mu_X} \right)^2 Var\left[X\right]$$

Fehlerfortpflanzungsgesetz

Für den Fall der "multivariaten Verteilung", ist die Annäherung:

$$Y = h(\mathbf{X}) = h(X_1, X_2, ..., X_n)$$

$$= h(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_{X_i}) \left.\frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}}$$

Der Erwartungswert und die Varianz sind:

$$E[Y] = h(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})$$

(Skript: Gleichung F.14 & F.15 oder D.25)

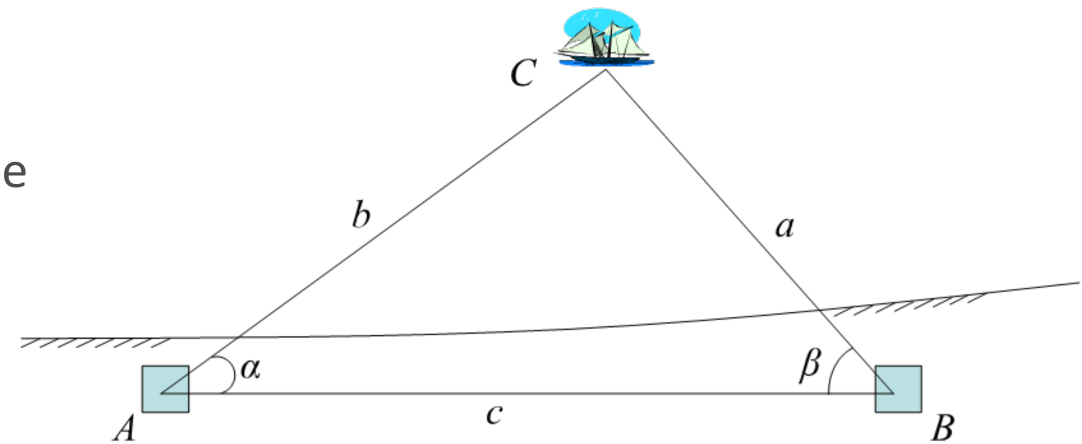
$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}} \right)^2 Var[X_i] + \underline{2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} \left(\left.\frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}} \right) \left(\left.\frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_j}\right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}} \right) C_{X_i, X_j}}$$

Wenn X_i und X_j unkorreliert sind, dann ist dieser Term 0

Aufgabe F.1

Angewendet auf unsere Aufgabe

$$b = h(\alpha, \beta, c) = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} c$$



Der Erwartungswert ist:

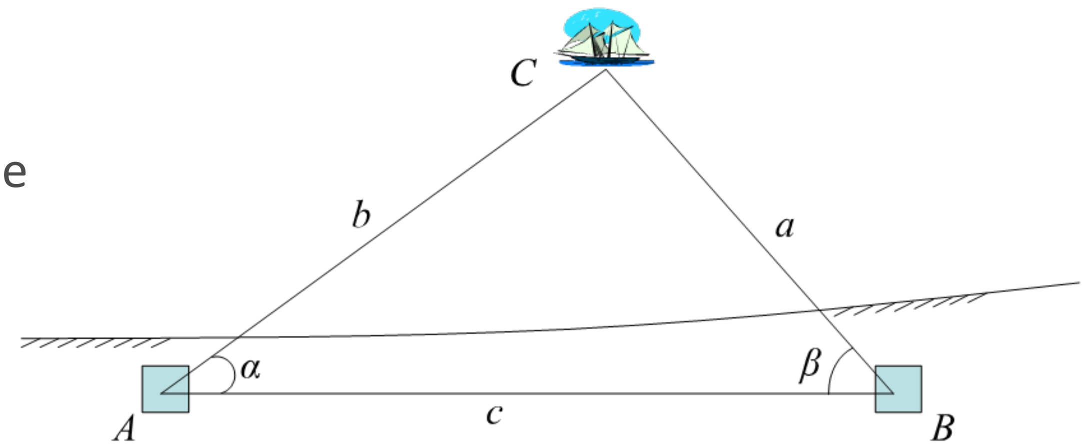
$$E[Y] \approx E[h(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})] = \sum_{i=1}^{n} E[h\left(\mu_{X_i}\right)]$$

$$E[b] = \frac{\sin \mu_\beta}{\sin(\mu_a + \mu_\beta)} \mu_C = \underline{\underline{6.32\ [km]}}$$

Aufgabe F.1

Angewendet auf unsere Aufgabe

$$b = h(\alpha, \beta, c) = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} c$$



Die Varianz ist:

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}} \right)^2 Var[X_i] + \underbrace{2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} \left(\left. \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}} \right) \left(\left. \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}} \right) C_{X_i, X_j}}_{=0}$$

$$Var[b] = \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot Var[\alpha] + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta}\right)^2 \cdot Var[\beta] + \left(\frac{\partial h}{\partial c}\right)^2 \cdot Var[c] =$$

$$3.1894^2 \cdot 0.011^2 + 5.4671^2 \cdot 0.011^2 + 1.0537^2 \cdot 0.005^2 = 0.00488$$

$$\sigma_b = \sqrt{Var[b]} = \underline{\underline{0.07\,[km]}}$$

Aufgabe F.2

Ein Junge will ein Computerspiel kaufen, das erst in Kürze in den Läden erhältlich sein wird. Der Preis des Computerspieles wurde noch nicht bekannt gegeben, aber basierend auf verschiedenen Informationen nimmt er an, dass der Preis durch eine Normalverteilung mit μ = 50 CHF, σ = 10 CHF beschrieben werden kann.
Der Junge verfügt momentan über 20 CHF, und er erwartet, dass er bis zum Erscheinen des Computerspieles noch Taschengeld von seinen Eltern bekommt. Er geht davon aus, dass der Taschengeldbetrag durch eine Normalverteilung mit μ = 20 CHF, σ = 5 CHF beschrieben werden kann.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

Aufgabe F.2

Stelle die “Grenzzustandsfunktion” auf.

Preis des Computerspieles: Zufallsvariable X
Taschengeld: Zufallsvariable Y

Z sei eine weitere Zufallsvariable und ist wie folgt definiert:

$$Z = 20 + Y - X$$

Wenn $Z \geq 0$, dann kann er das Computerspiel kaufen, sonst nicht.

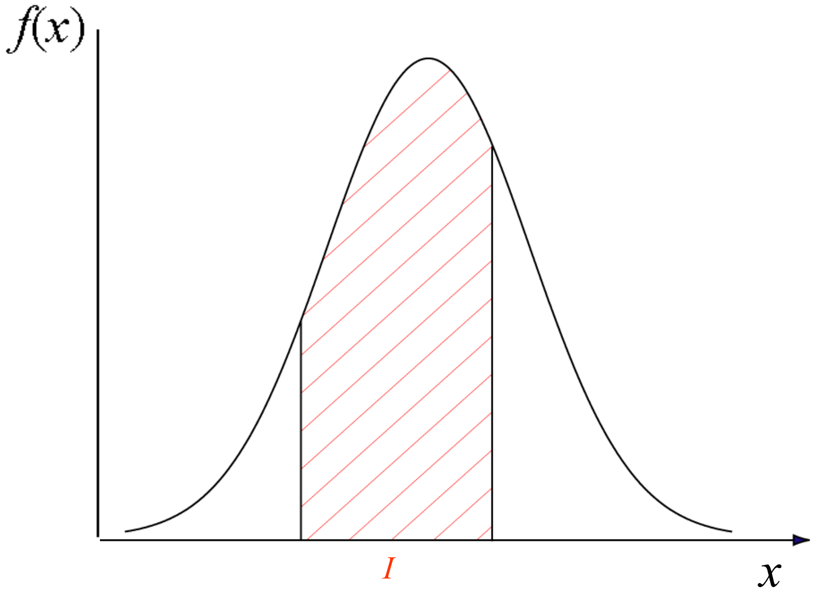
Folglich kann die Wahrscheinlichkeit, dass er das Videospiel nicht kaufen kann, wie folgt beschrieben werden:

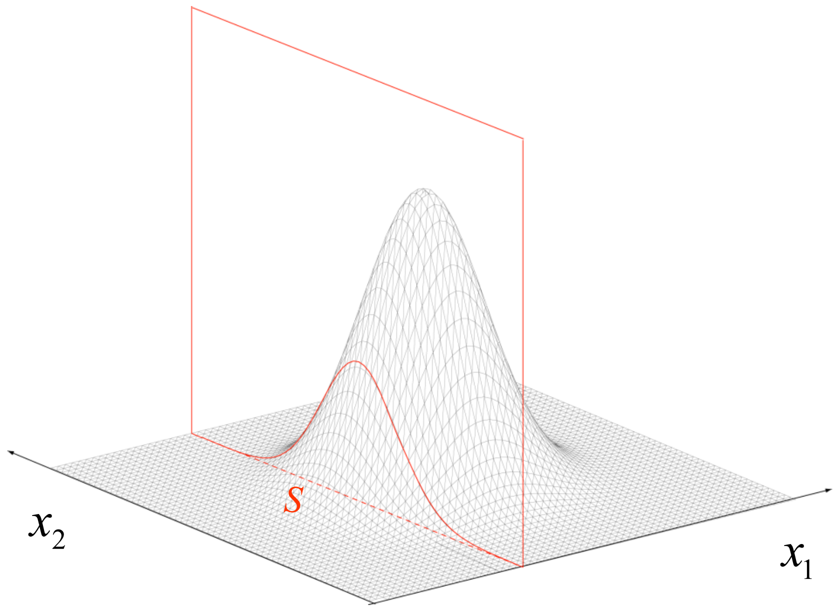
$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

Das Problem: Wie bestimme ich diese Wahrscheinlichkeit?

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

… durch Integration:





$$P[X \in I] = \int_I f_X(x)dx$$

$$P[\mathbf{X} \in S] = \int_S f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über den entsprechenden Abschnitt integriert wird.

Aufgabe F.2

Vor dem Integrieren wird die Grenzzustandsfunktion mit den standardnormal verteilten Variablen transformiert:

$$X \sim N(50,10) \qquad \longrightarrow \qquad X = 50 + 10U, \quad U \sim N(0,1)$$

$$Y \sim N(20,5) \qquad \qquad Y = 20 + 5V, \quad V \sim N(0,1)$$

Die Grenzzustandsfunktion lautet demzufolge:

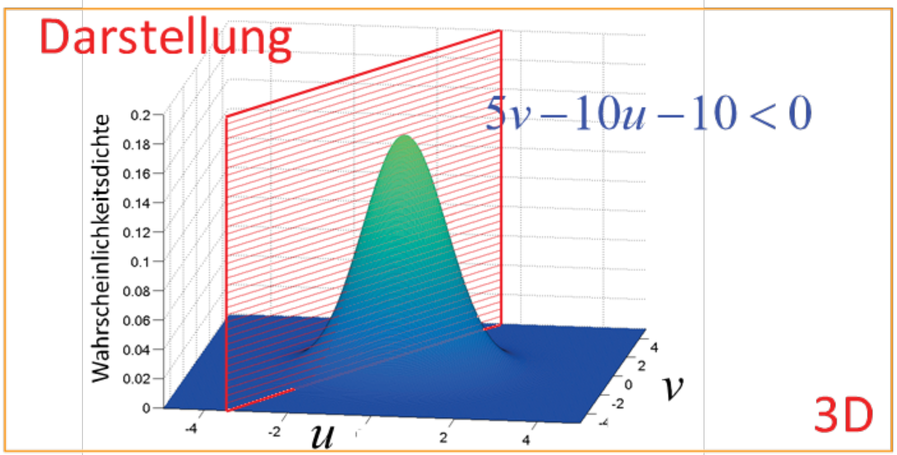
$$\begin{aligned} Z &= 20 + Y - X \\ &= 20 + (20 + 5V) - (50 + 10U) \\ &= 5V - 10U - 10 \end{aligned}$$

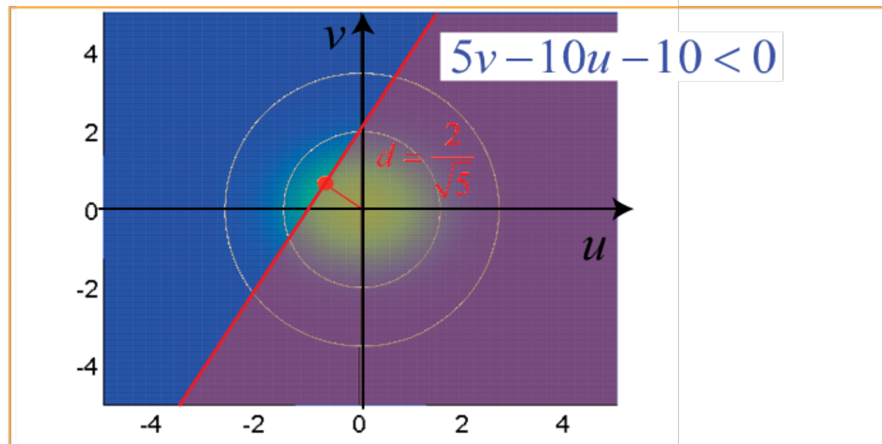
Wir suchen jedoch die Wahrscheinlichkeit:

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0]$$

Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)\,du\,dv$$





Abstand d zum Ursprung:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-u)^2 + (0-v)^2} \qquad v = 2u + 2$$

$$d = \sqrt{u^2 + (2u-2)^2}$$

$$d = \sqrt{5u^2 + 8u + 4}$$

Kürzester Abstand d zum Ursprung:

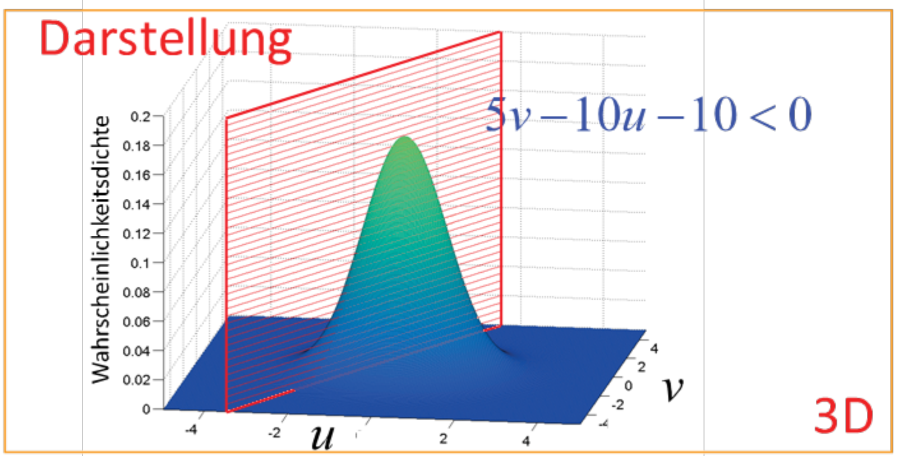
$$d'(u) = \frac{10u+8}{2\cdot\sqrt{5u^2+8u+4}} = \frac{5u+4}{\sqrt{5u^2+8u+4}} = 0$$

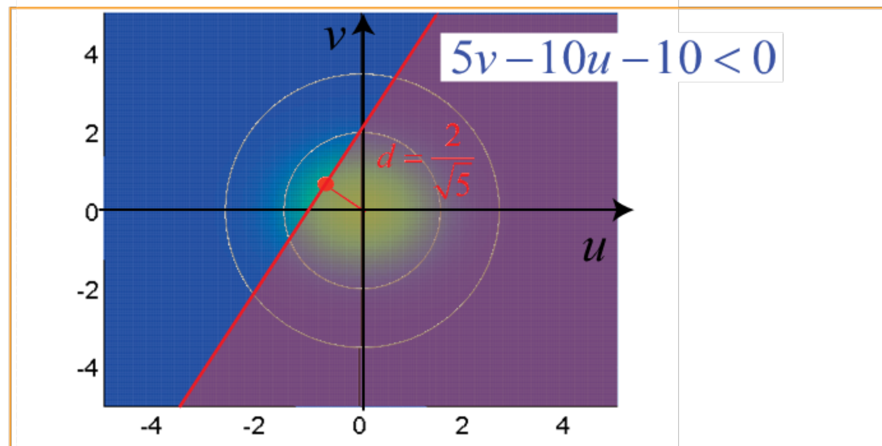
$$5u + 4 = 0 \qquad \rightarrow u = \frac{-4}{5}$$

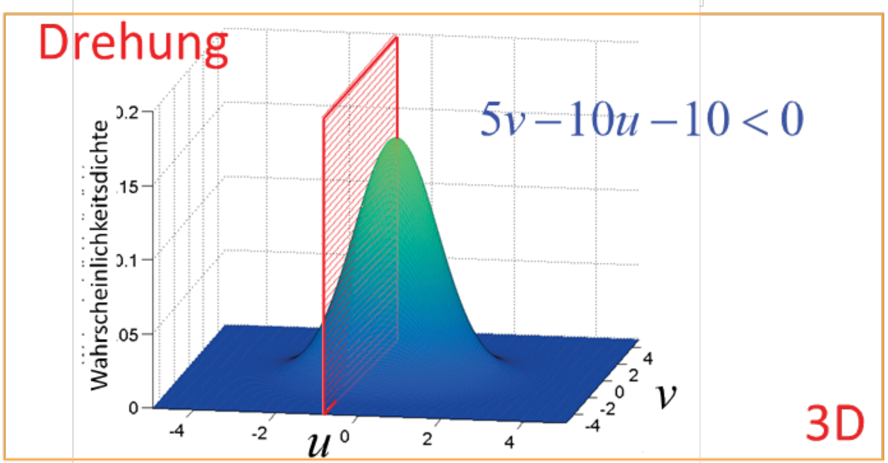
$$d = \sqrt{5u^2+8u+4} = \sqrt{5\left(\frac{-4}{5}\right)^2 + 8\left(\frac{-4}{5}\right) + 4} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

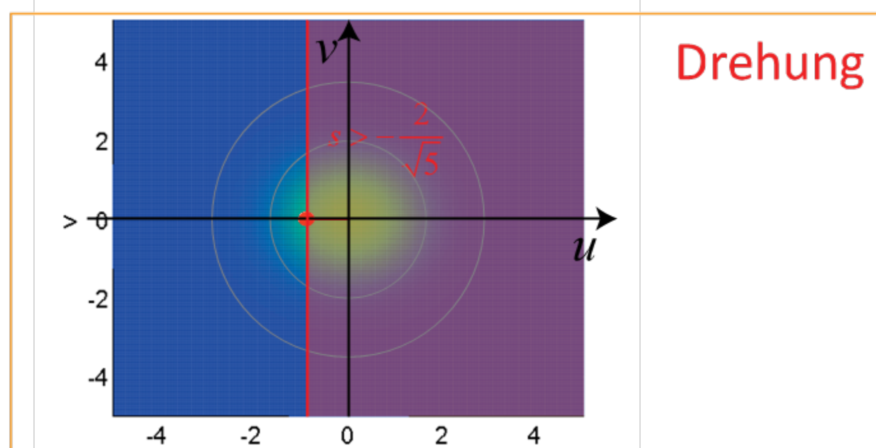
Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)\,du\,dv$$



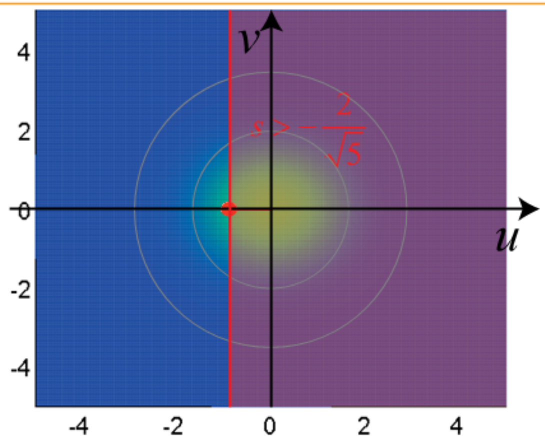






Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)\,du\,dv$$



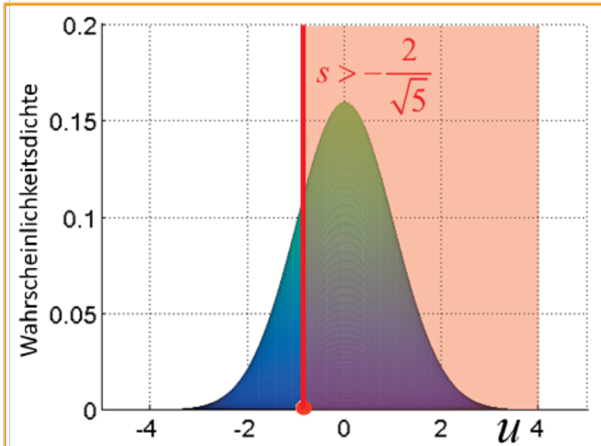
Drehung

Integration

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{-2/\sqrt{5}}^{\infty} \phi(s)\,ds$$

$$= 1 - \Phi(-2/\sqrt{5})$$

$$= 0.8133$$



2D

Die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird beträgt 0.8133.

Lineare Grenzzustandsfunktion

Das Ziel ist, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses(ausgedrückt mit der Grenzzustandsfunktion) zu berechnen.

1)Grenzzustandsfunktion mit normalverteilter Zufallsvariable standardisieren und transformieren (das ist erlaubt, da eine lineare Funktion einer normalverteilten Variable ebenfalls normalverteilt ist).

2)Achsen drehen (das ist erlaubt, weil die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer normalverteilten Variable symmetrisch ist).

3) Wahrscheinlichkeit berechnen (das ist möglich, weil die Grenzzustandsfunktion linear ist).

✓Was wäre wenn eine Zufallsvariable nicht normalverteilt ist?
-> Wird im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt.
✓Was wäre wenn die Grenzzustandsfunktion nicht linear ist?
-> das wird Aufgabe F.3 gelöst…

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$X \sim N(50,10)$$

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$Y \sim N(20,5)$$

Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit P_F:

$$P_F = P[Z < 0]$$

$$P_F = \Phi\left(\frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta)$$

(Skript Gleichung F.9)

Zuverlässigkeitsindex

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$$

(Skript Gleichung F.10)

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$X \sim N(50,10) \qquad \mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$Y \sim N(20,5)$$

Bestimmung von Mittelwert μ_Z und Standardabweichung σ_Z der Sicherheitsmarge Z.

$$\mu_Z = 20 + E(Y) - E(X) = 20 + 20 - 50 = -10$$

$$\sigma_Z = \sqrt{Var(Y) + Var(X)} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

(Skript Gleichung D.25)

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$\mu_Z = -10$$

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$\sigma_Z = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Bestimmung des Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(Skript Gleichung F.10)

Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit P_F :

$$P_F = \Phi(-\beta) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.89) = 0.8133$$

(Skript Gleichung F.9)

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$\mu_Z = -10$$

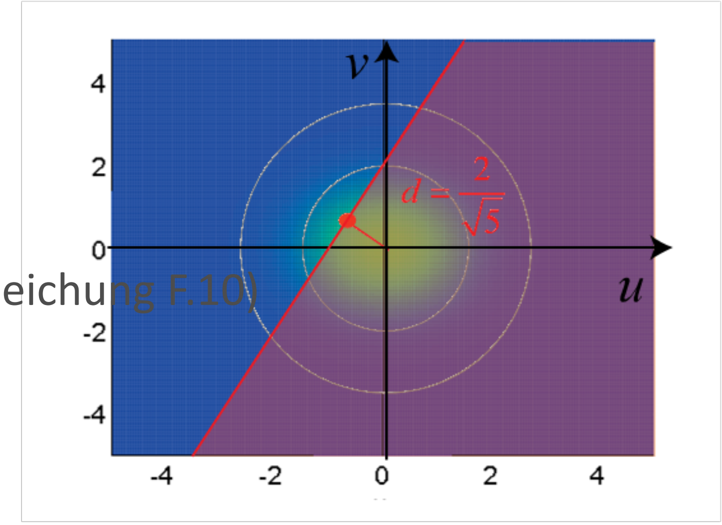
$$P[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$\sigma_Z = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Bestimmung des Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(Skript Gleichung F.10)



Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit P_F :

$$P_F = \Phi(-\beta) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.89) = 0.8133$$

(Skript Gleichung F.9)

Aufgabe F.3

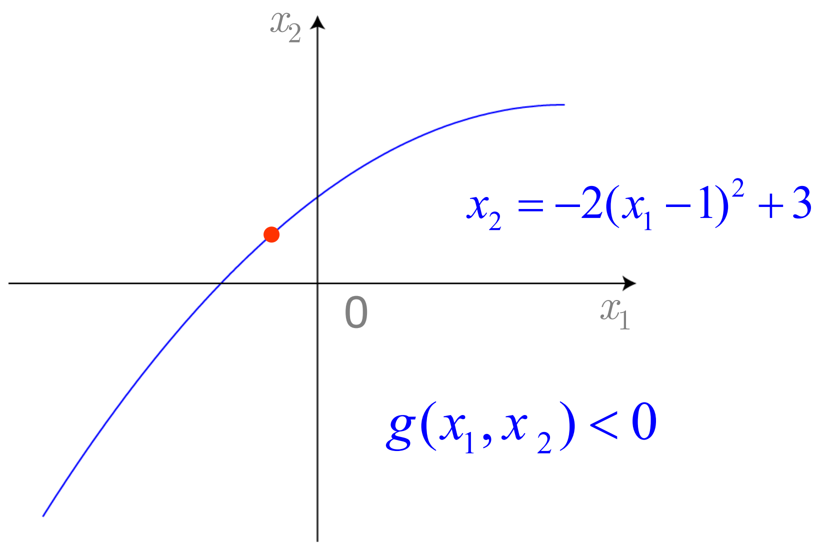
Wie in der Aufgabe F.2 ersichtlich, kann die Versagenswahrscheinlichkeit durch eine Grenzzustandsfunktion beschrieben werden. X_1 und X_2 sind durch eine Standardnormalverteilung beschrieben, und die Grenzzustandsfunktion sei beschrieben als:

$$g(X_1, X_2) = 2(X_1 - 1)^2 + X_2 - 3$$

Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit: $P[g(X_1, X_2) < 0]$

Aufgabe F.3

Gebiet des Integrals



Linearisieren der Grenzzustandsfunktion

In welchem Punkt???

In dem Punkt auf g, der den geringsten Abstand zum Nullpunkt aufweist.

Warum???

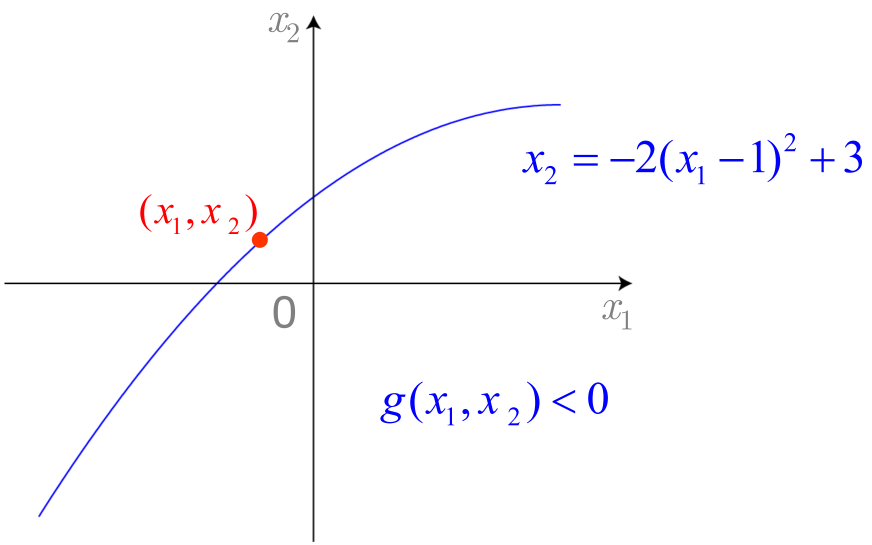
Weil die Wahrscheinlichkeit in diesem Punkt am meisten zur tatsächlichen gesamten Wahrscheinlichkeit beiträgt.

Linearisieren (Taylor-Entwicklung erster Ordnung) wird in demjenigen Punkt auf g durchgeführt, der den geringsten Abstand zum Nullpunkt aufweist.

Wie kann dieser Punkt bestimmt werden?

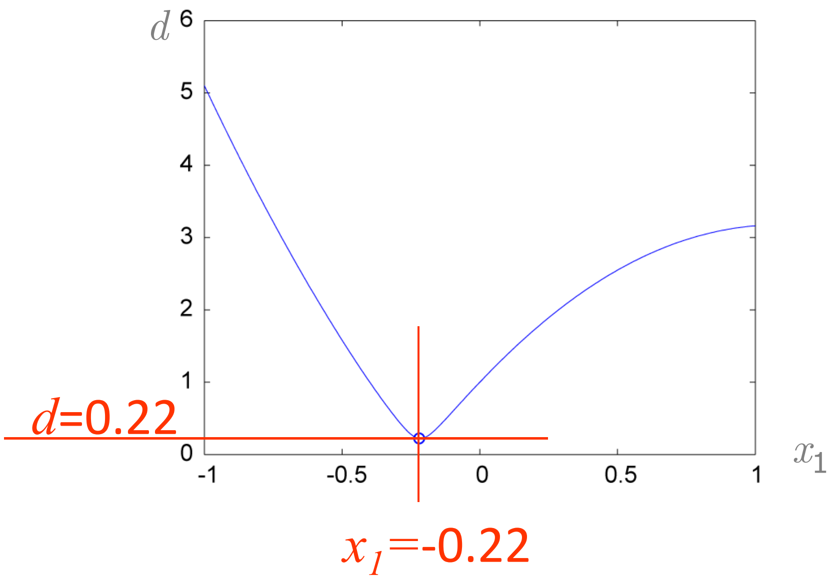
Aufgabe F.3

Ein einfaches Vorgehen:



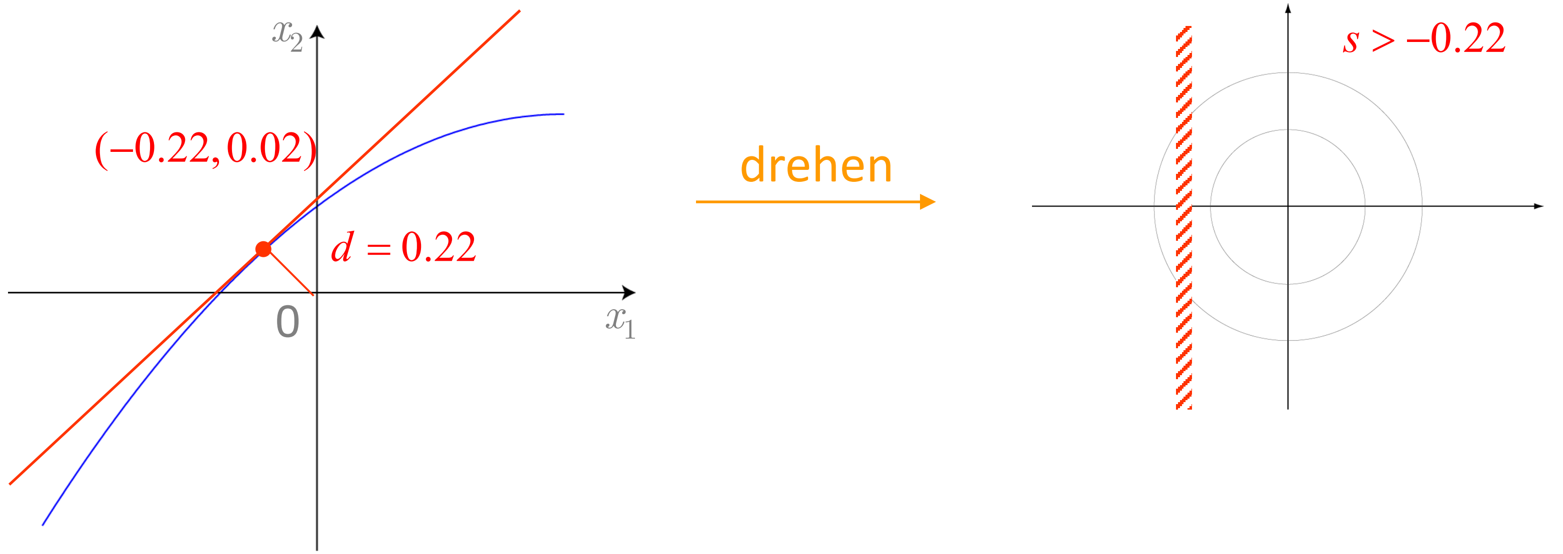
Der Abstand zwischen (x_1,x_2) und (0,0):

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + \left(-2(x_1-1)^2+3\right)^2}$$



Aufgabe F.3

Man bestimmt den nächsten Punkt und dessen Abstand zum Nullpunkt.

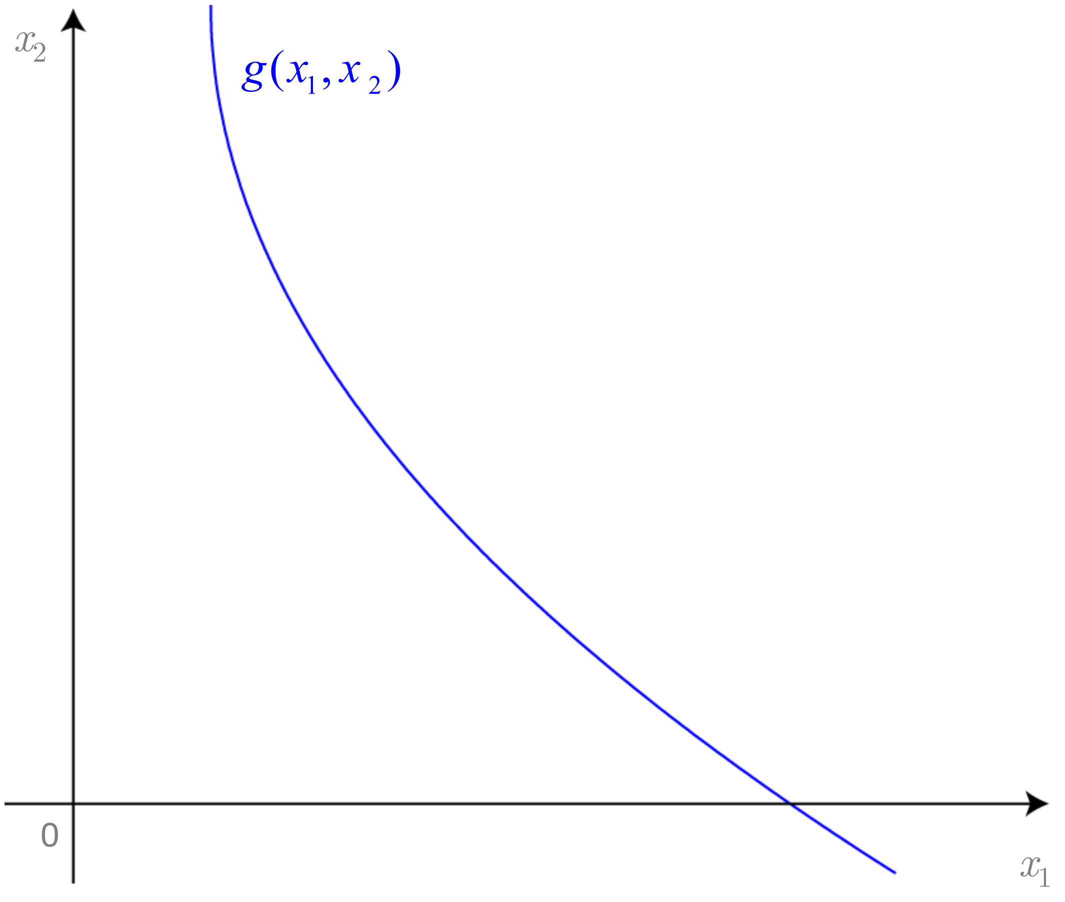


$$
\begin{aligned}
P[g(X_1, X_2) < 0] &= P[S > -0.22] \\
&= 1 - \Phi(-0.22) \\
&= 0.587
\end{aligned}
$$

FORM

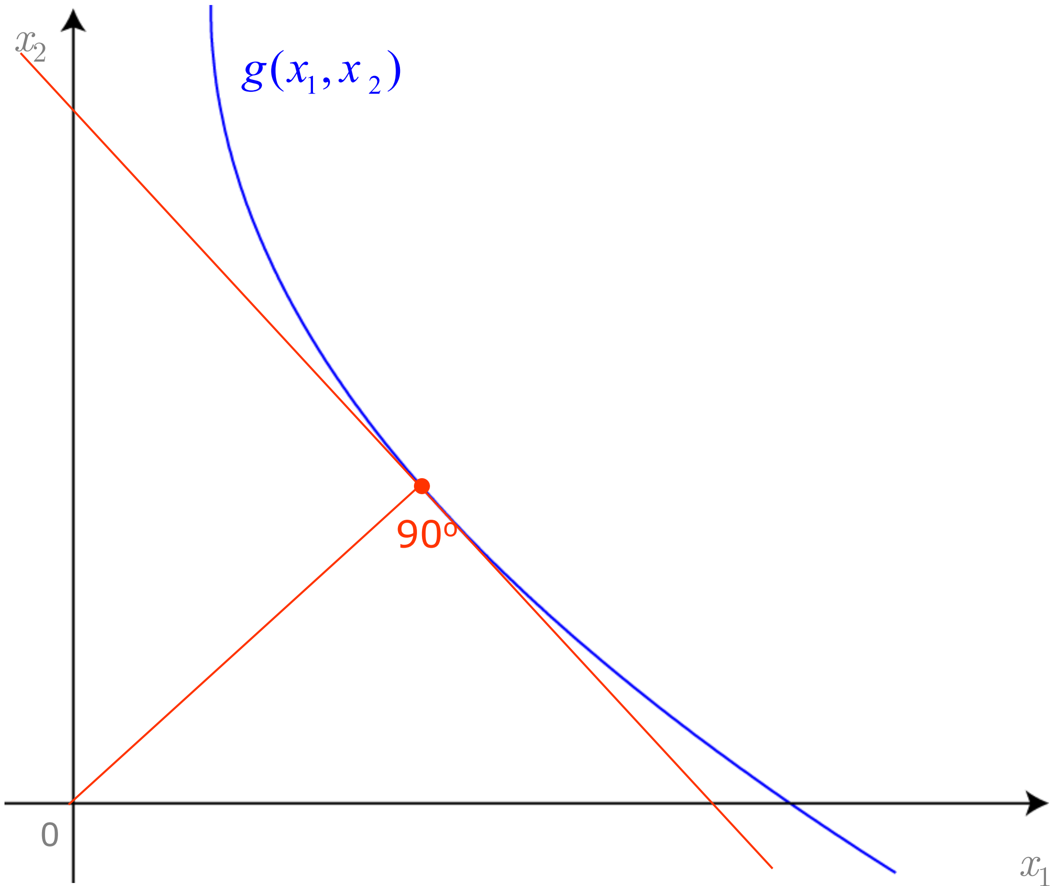
Ein anderer Weg: First Order Reliability Methods (FORM)

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



FORM

Eine andere Weg: First Order Reliability Methods (FORM)
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:

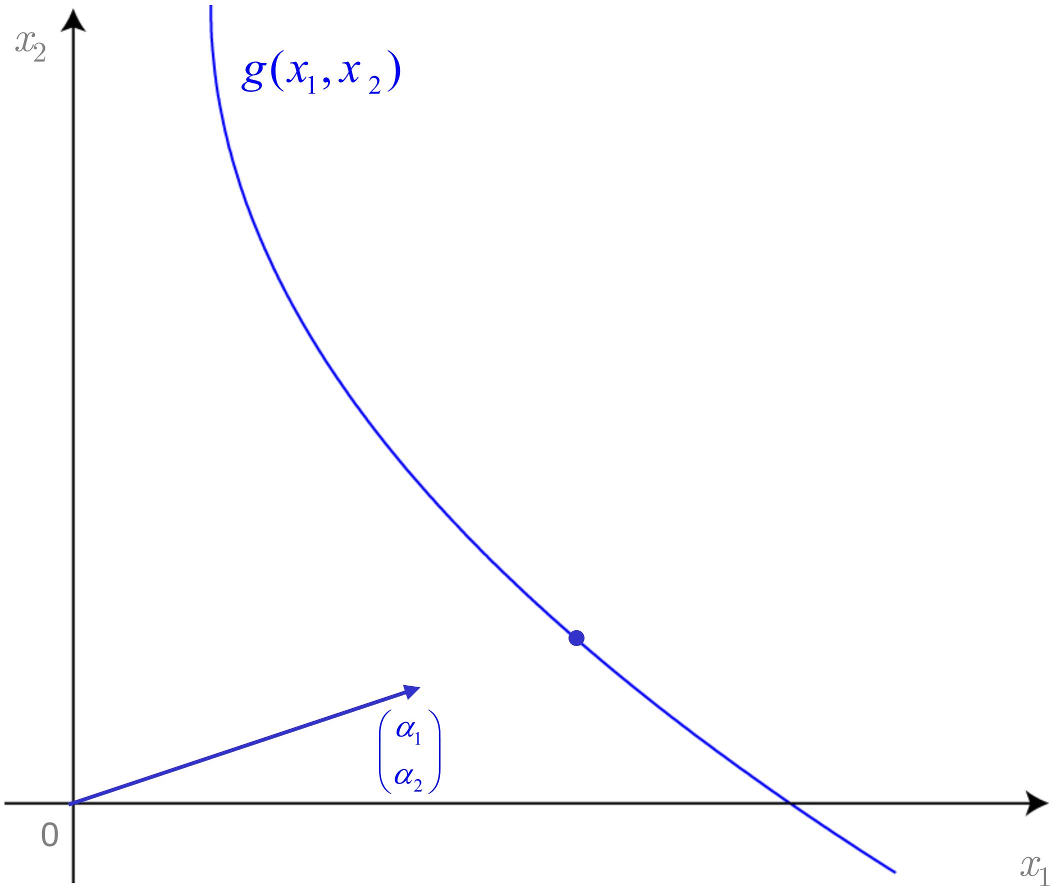


Der Punkt auf g
mit dem kleinsten Abstand
zum Ursprung
ist gesucht.

FORM

Eine andere Weg: First Order Reliability Methods (FORM)

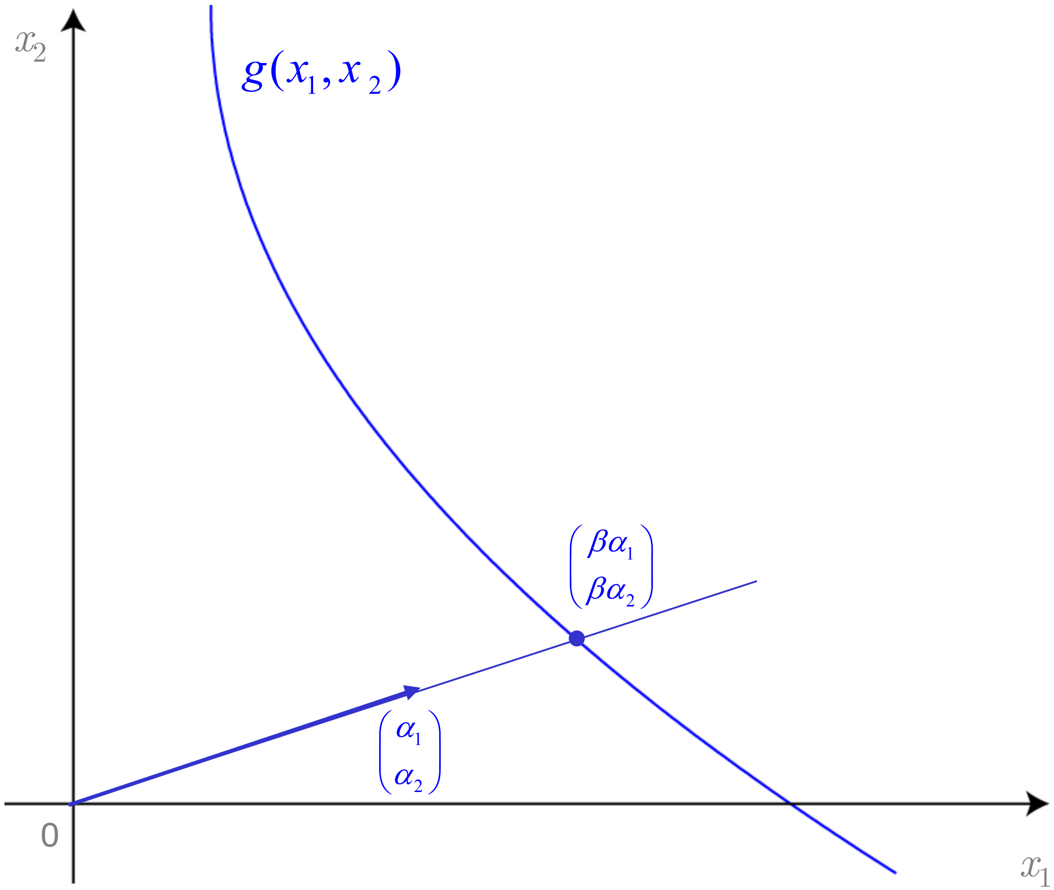
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Startwert für $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ raten.

FORM

Eine andere Weg: First Order Reliability Methods (FORM)
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



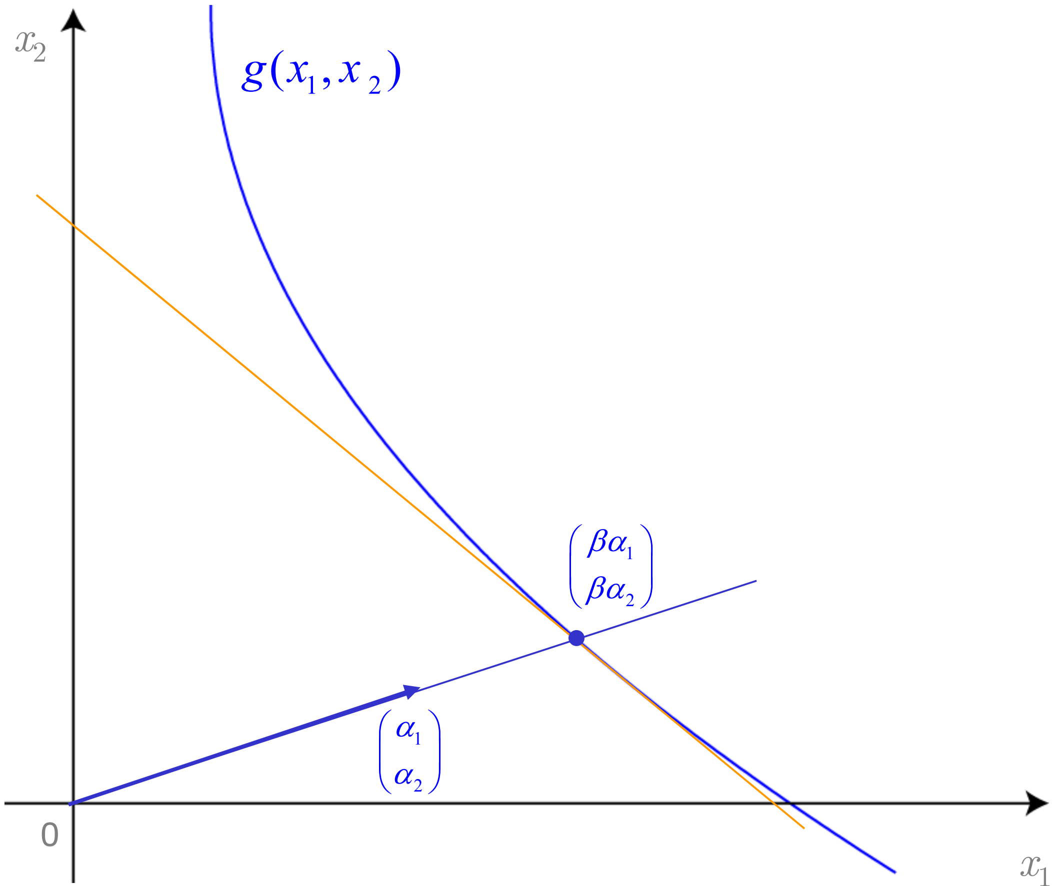
β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

FORM

Eine andere Weg: First Order Reliability Methods (FORM)

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

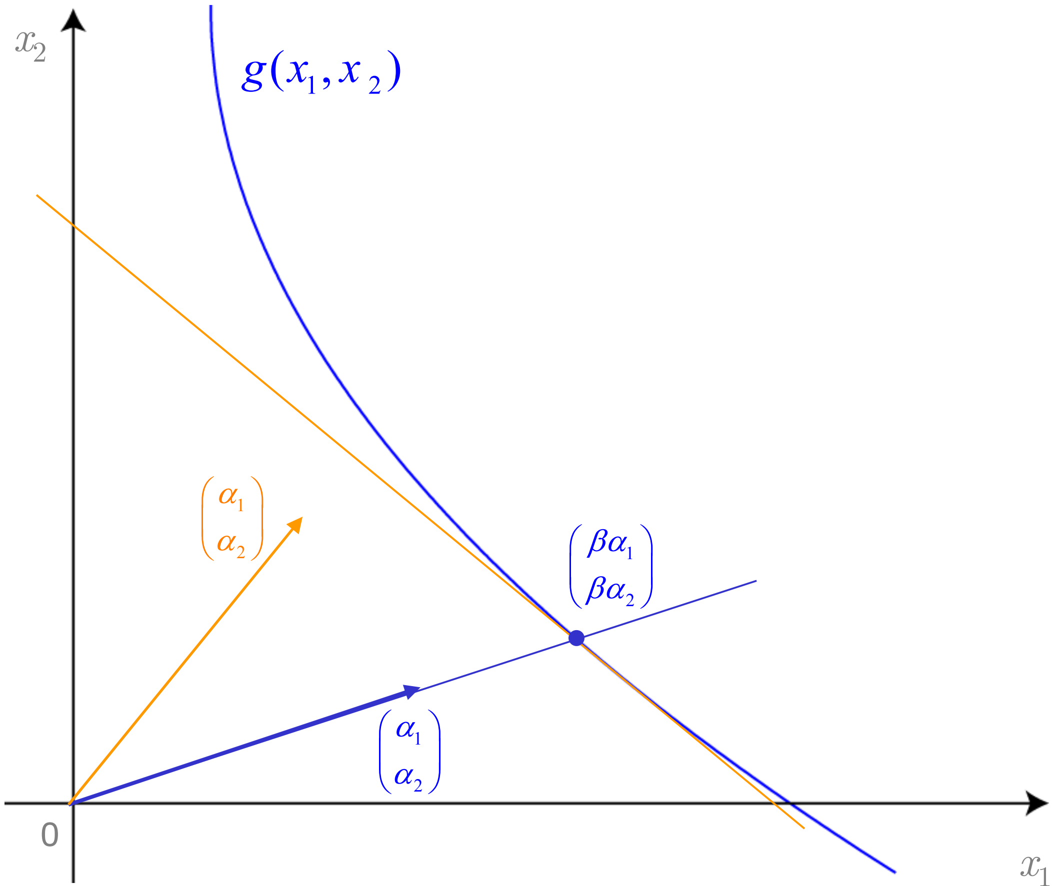
und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

FORM

Eine andere Weg: First Order Reliability Methods (FORM)

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

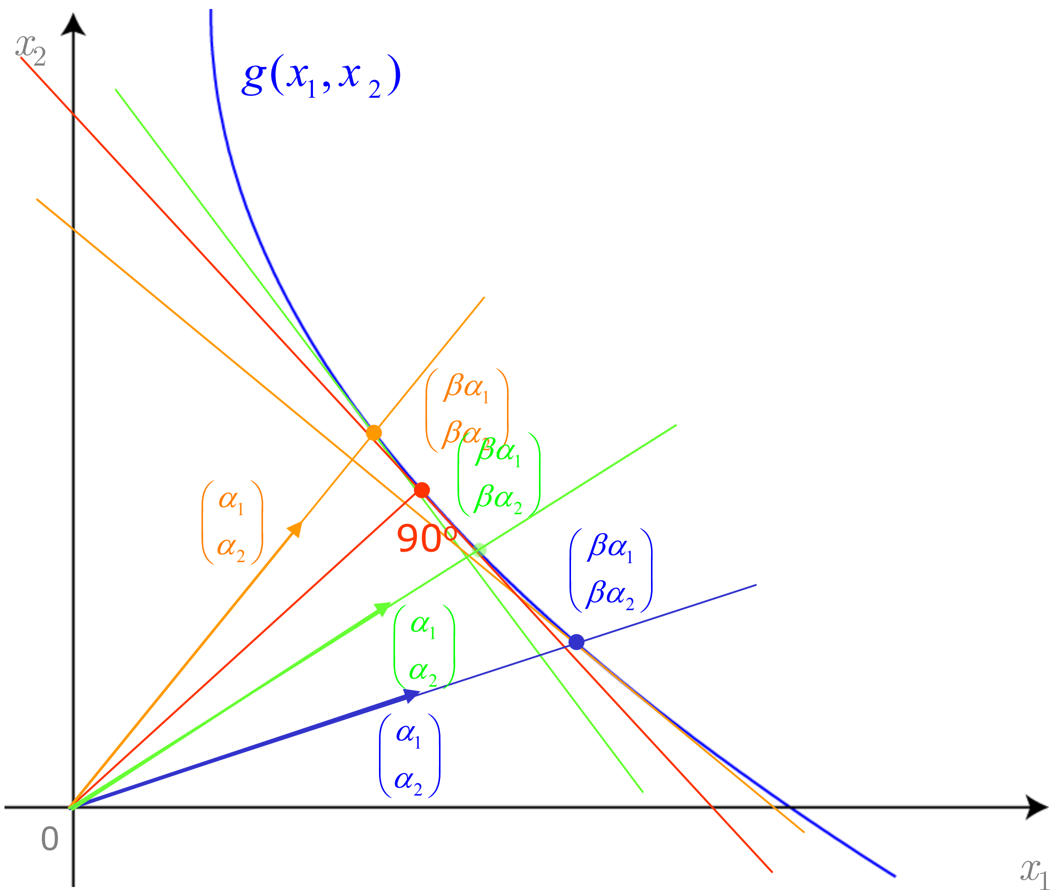
und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

FORM

Eine andere Weg: First Order Reliability Methods (FORM)

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

Aufgabe F.3

Vorgehen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 4x_1 - 4 = 4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{1_{neu}} = \frac{4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4}{\sqrt{\left(4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4\right)^2 + 1^2}}$$

$$\alpha_{2_{neu}} = \frac{1}{\sqrt{\left(4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4\right)^2 + 1^2}}$$

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow 2(\beta\alpha_1 - 1)^2 + \beta\alpha_2 - 3 = 0$$

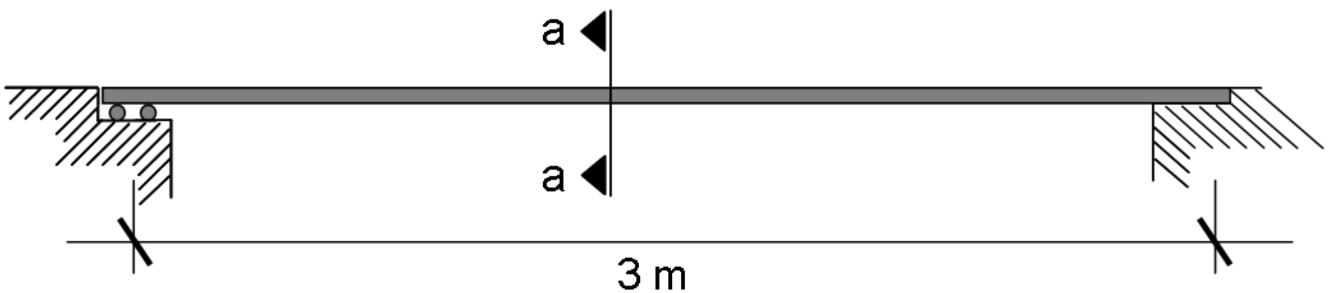
$$\Leftrightarrow \beta_{neu} = \frac{1}{2\beta_{alt}\alpha_{1_{alt}}^2 - 4\alpha_{1_{alt}} + \alpha_{2_{alt}}}$$

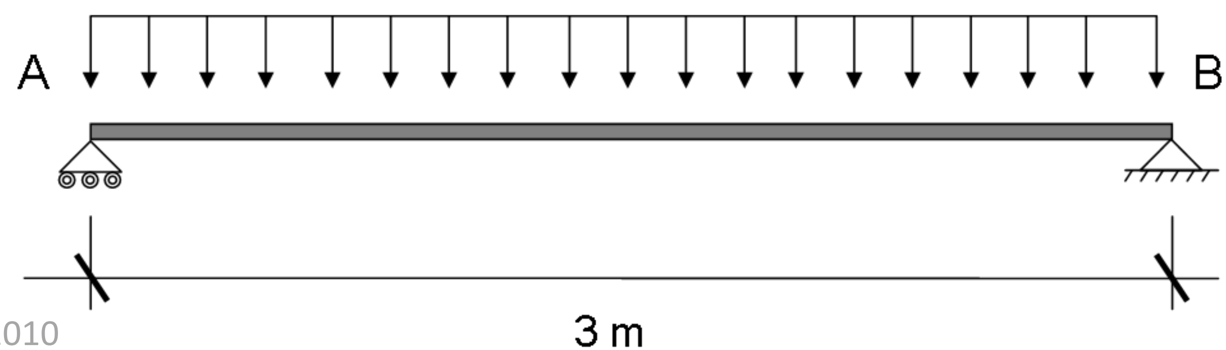
	Start	1	2	3	4	5
β	-1.0000	-0.26800	-0.21584	-0.22058	-0.22013	-0.22017
α_1	0.6000	0.97758	0.97935	0.97949	0.97950	0.97950
α_2	-0.6000	-0.21054	-0.20218	-0.20138	-0.20144	-0.20143

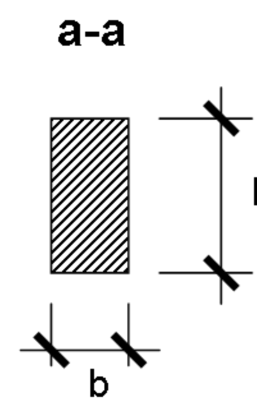
$$P[g(X_1, X_2) < 0] = \Phi(-\beta) = \Phi(0.22) = 0.587$$

Aufgabe F.4 Gruppenaufgabe

Ein Träger verfügt über einen rechteckigen Querschnitt, eine Breite $b = 50mm$ und eine Länge $l = 3m$.
Die Trägerhöhe h ist über die Trägerlänge uniform und wird mit einer Normalverteilung mit einem Mittelwert $\mu_h = 100mm$ und einer Standardabweichung $\sigma_h = 5mm$ repräsentiert.

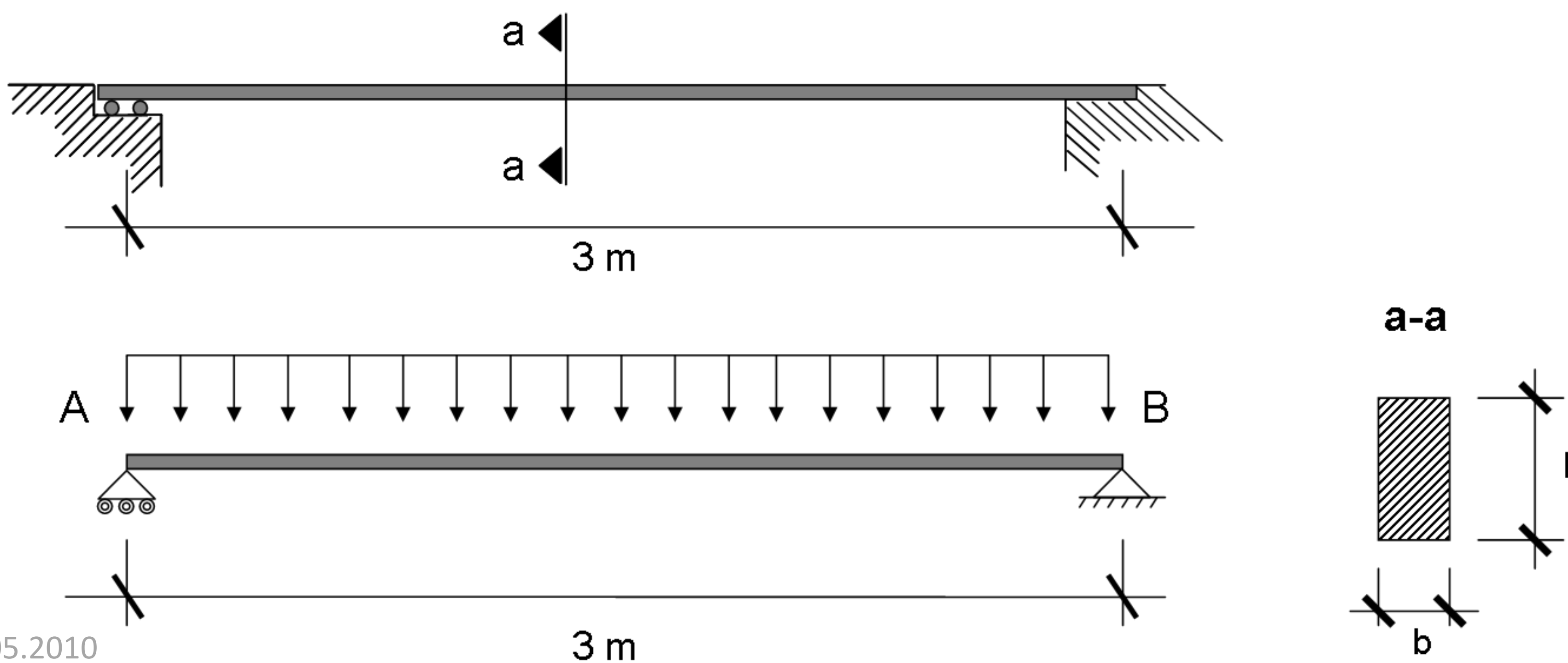






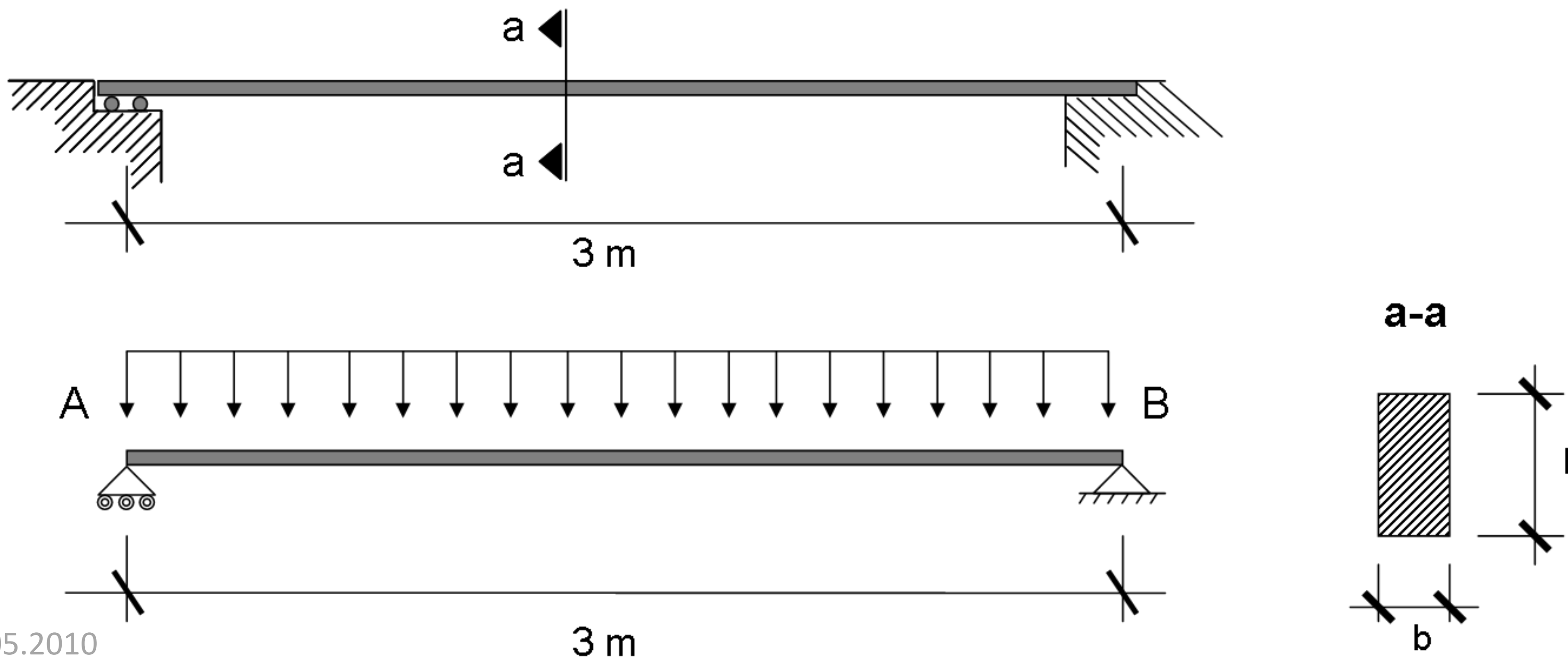
Aufgabe F.4 Gruppenaufgabe

Der Träger wird mit einer Gleichstreckenlast q belastet, welche mit einen Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_q = 5kN/m^2$ und Standardabweichung $\sigma_q = 1kN/m^2$ repräsentiert wird.



Aufgabe F.4 Gruppenaufgabe

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Auslenkung w des Trägers in dessen Mitte bei Belastung einen Wert von 8 mm überschreitet?
Es wird angenommen, dass das Eigengewicht des Trägers vernachlässig werden kann.



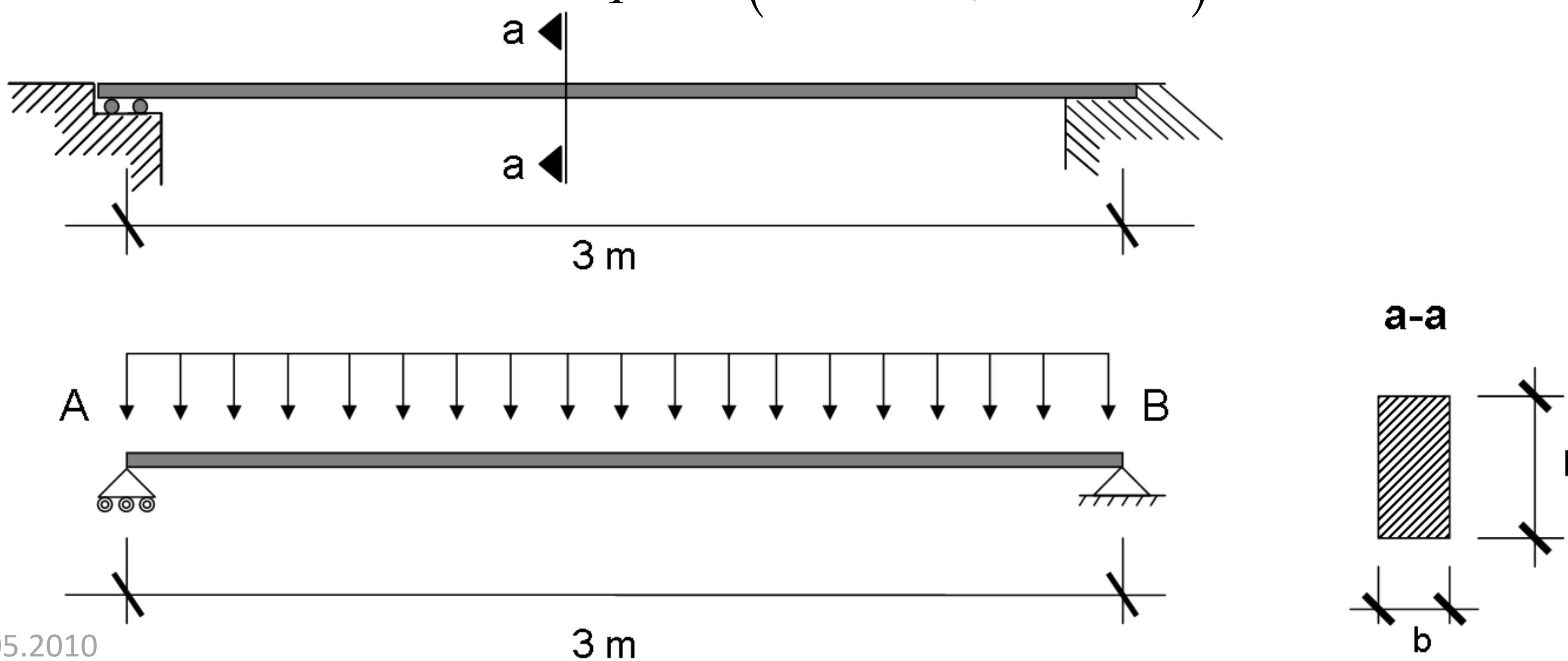
Aufgabe F.4 Gruppenaufgabe

Masse des Balken:

Länge	$l = 3m$
Breite	$b = 50mm$
Trägerdicke	$h \sim N(100mm, 5mm)$

Belastung:

Gleichstreckenlast	$q \sim N(5kN/m^2, 1kN/m^2)$

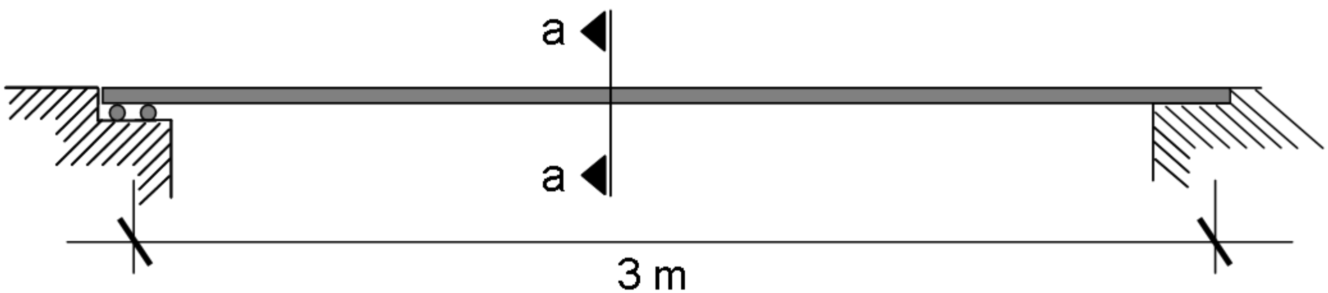


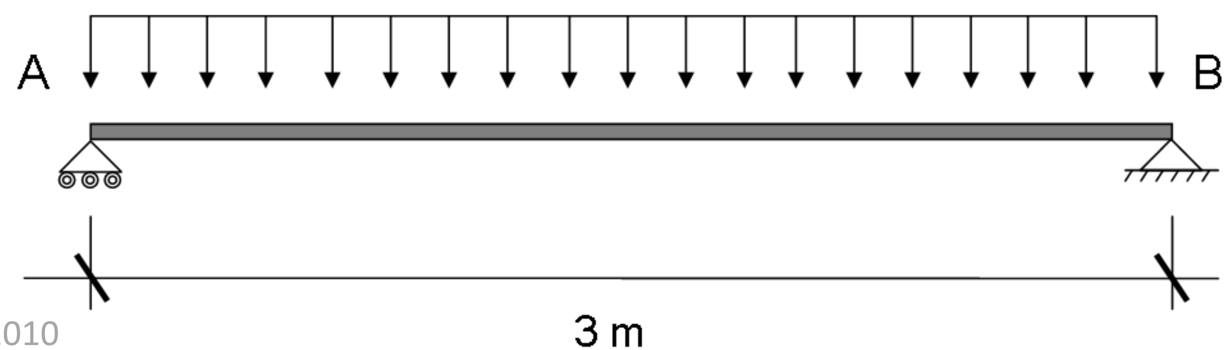
Aufgabe F.4 Gruppenaufgabe

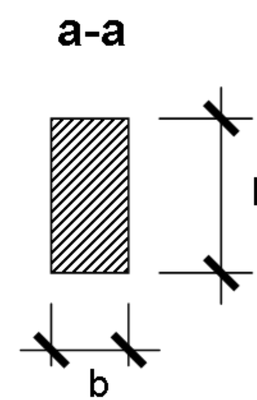
Auslenkung: $$w = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

wobei das Flächenträgheitsmoment $I = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$

und der Elastizitätsmodul $E = 205 kN / mm^2$ ist.



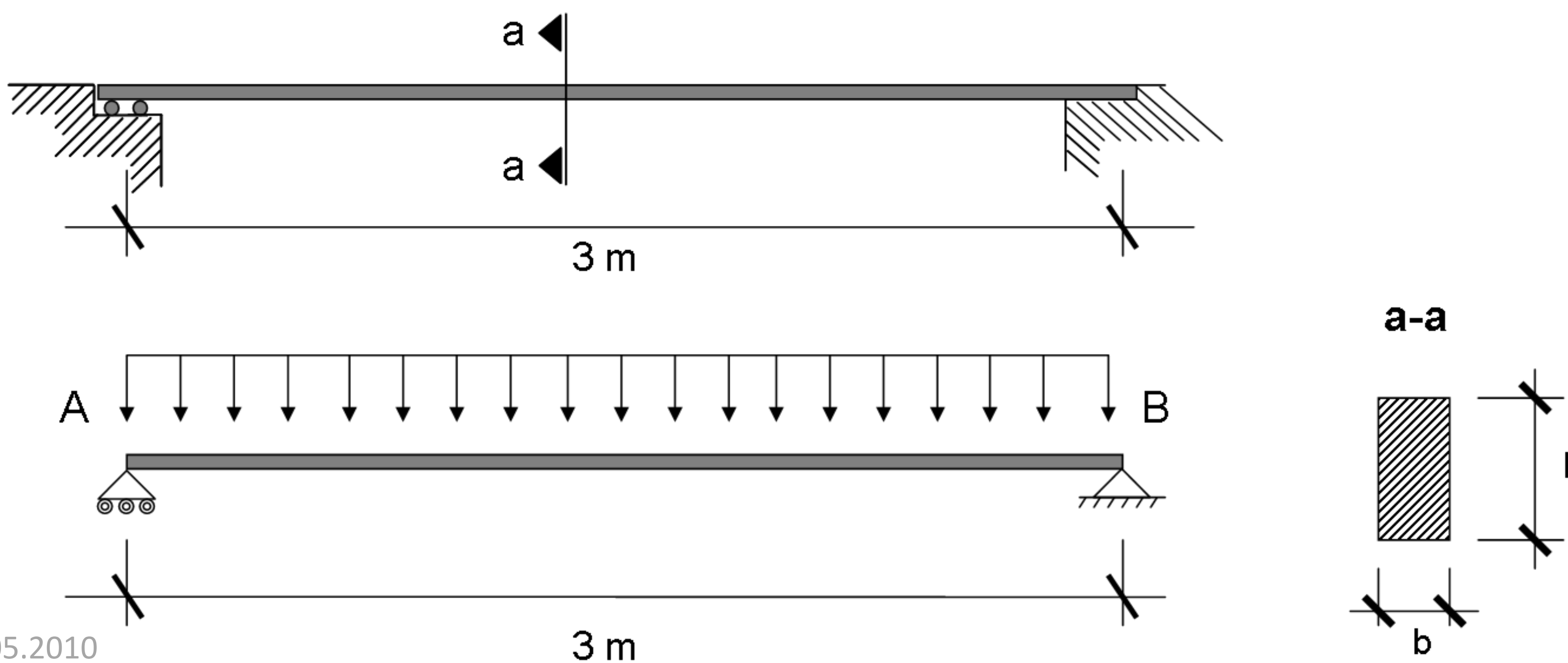




Aufgabe F.4 Gruppenaufgabe

Grenzzustandsfunktion:

$$g(x) = 8mm - w$$



Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit…

Mathias Graf

HIL E22.3
graf@ibk.baug.ethz.ch
044 633 70 34