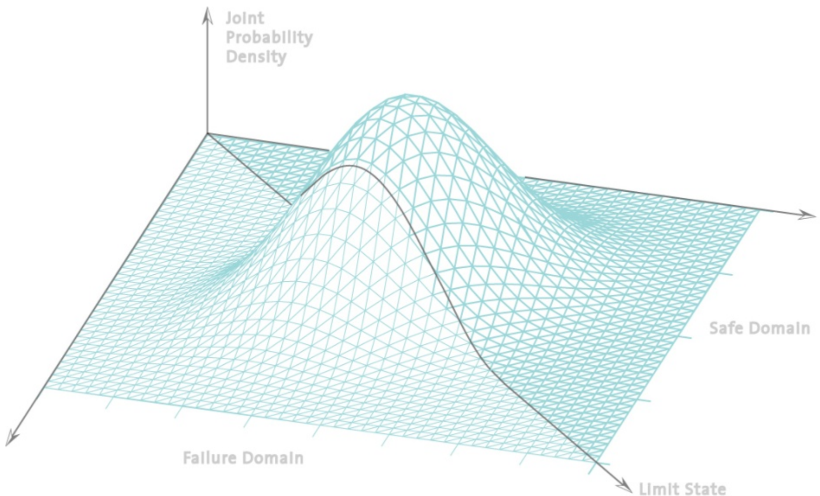


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 8

Inhalt der heutigen Übung

Gruppenaufgabe E.1: Methode der Momente

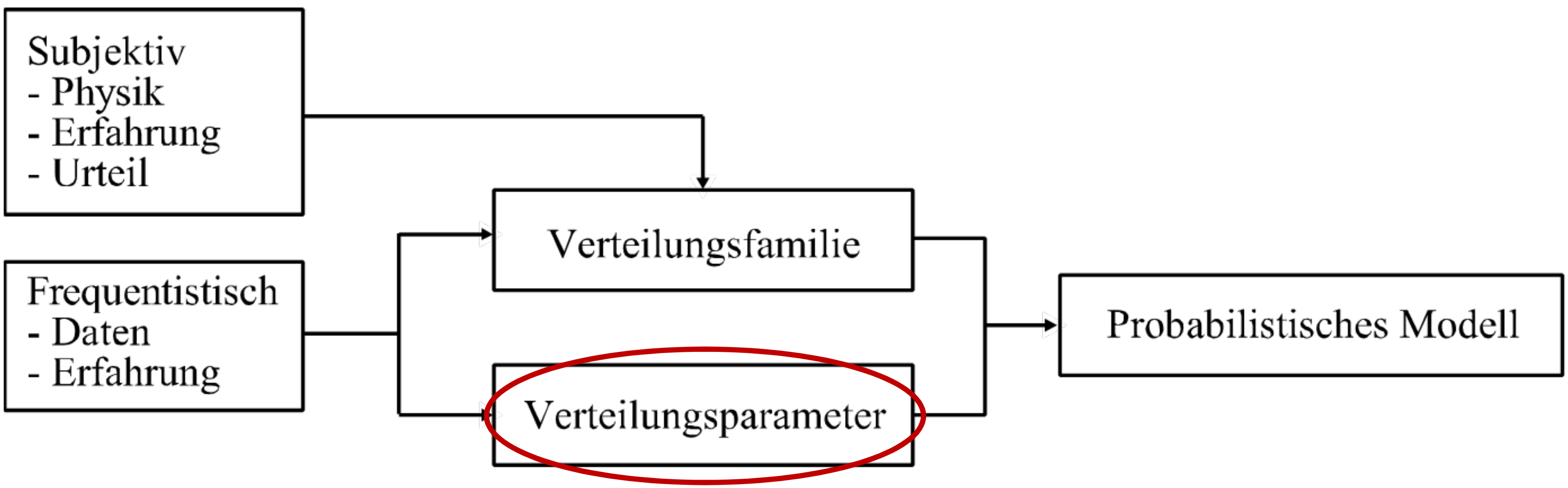
Aufgaben E.8: Maximum-Likelihood-Methode

Aufgabe E.13: Bayes‘sches Parameter Updating

keine Gruppenaufgabe

Schätzung der Verteilungsparameter

- Methode der Momente
- Maximum Likelihood Methode



Maximum-Likelihood-Methode (MLM)

multivariate Dichtefunktion der Beobachtungen mit gegebenen Parametern:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n \mid \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i \mid \boldsymbol{\theta})$$

Wir können in diesem Ausdruck die Beobachtungen $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ einsetzen…

… und erhalten dadurch die Likelihood-Funktion:

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(\hat{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})$$

Maximum-Likelihood-Methode (MLM)

Die Maximum-Likelihood-Schätzwerte von $\boldsymbol{\theta}$ erhält man, indem man die Werte von $\boldsymbol{\theta}$ wählt, die die Likelihood-Funktion $L(\boldsymbol{\theta})$ maximieren.

Dies ist gleichbedeutend mit der Maximierung der „Log-Likelihood-Funktion", die wie folgt definiert ist:

$$l(\boldsymbol{\theta} \mid \hat{\mathbf{x}}) = \ln L(\boldsymbol{\theta} \mid \hat{\mathbf{x}}) = \ln \prod_{i=1}^{n} f_X(\hat{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_X(\hat{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})$$

Aufgabe E.8

Aufgabenstellung aus E.7 (dort Lösung mit der MoM).

a) Beschreibe die Likelihood-Funktion.

b) Schätze die unbekannten Parameter (μ,σ) anhand der MLM.

Was passiert, wenn die Normalverteilung durch eine Exponentialverteilung ersetzt wird?

c) Schätze die Parameter der Exponential-verteilung mit der MLM und vergleiche die kumulative Verteilungsfunktion mit den beobachteten Werten.

Nummer der Messung	Druck-festigkeit [MPa]	Nummer der Messung	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aufgabe E.8

a) Die Likelihood-Funktion ist:

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(\hat{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})$$

für die Normalverteilung:

$$L(\mu, \sigma \mid \hat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

... und muss nun maximiert werden. Anstelle der Likelihood-Funktion empfiehlt es sich, die Log-Likelihood-Funktion zu verwenden:

$$l = \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]\right]$$

$$= -n \ln(\sqrt{2\pi}) - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \mu)^2$$

Aufgabe E.8

b) Die ML-Schätzwerte sind die Funktionsparameter, die die Likelihood-Funktion maximieren.

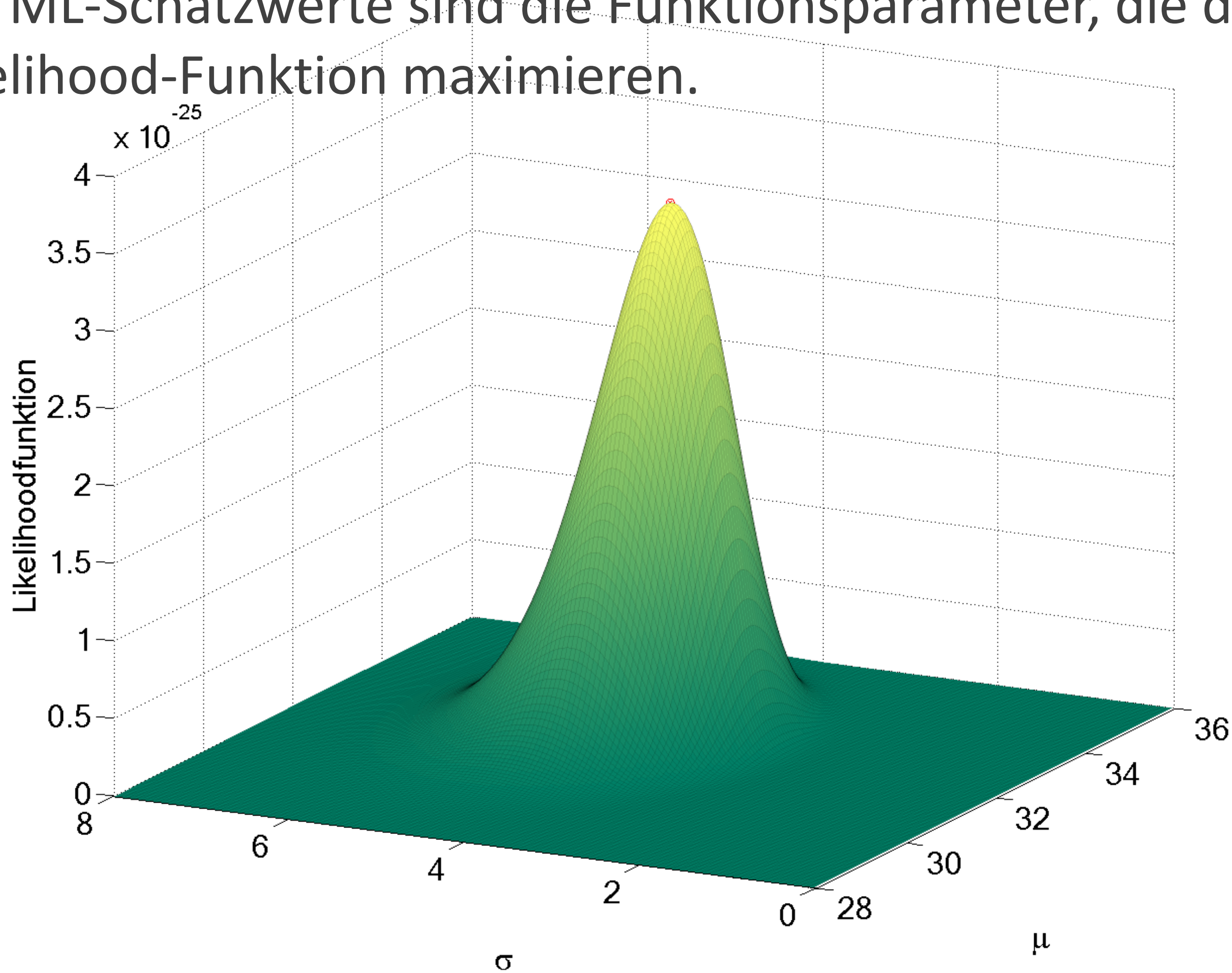
$$l = \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\hat{x}_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\right]$$

$$= -n\ln(\sqrt{2\pi}) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i-\mu)^2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \mu} &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(\hat{x}_i-\mu) = 0\\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i-\mu)^2 = 0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\mu &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\\ \sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i-\mu)^2\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}\mu &= 32.67\\ \sigma &= 4.04\end{aligned}$$

Aufgabe E.8

b) Die ML-Schätzwerte sind die Funktionsparameter, die die Likelihood-Funktion maximieren.



Fisher-Informationsmatrix

Mit Hilfe der Fisher-Informationsmatrix lässt sich die Variabilität und die Kovarianz der geschätzten Verteilungsparameter aus der Maximum-Likelihood-Methode ermitteln.

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sigma^2} & \dfrac{2\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \mu)}{\sigma^3} \\ \dfrac{2\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \mu)}{\sigma^3} & -\dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{3\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - \mu)^2}{\sigma^4} \end{pmatrix}$$

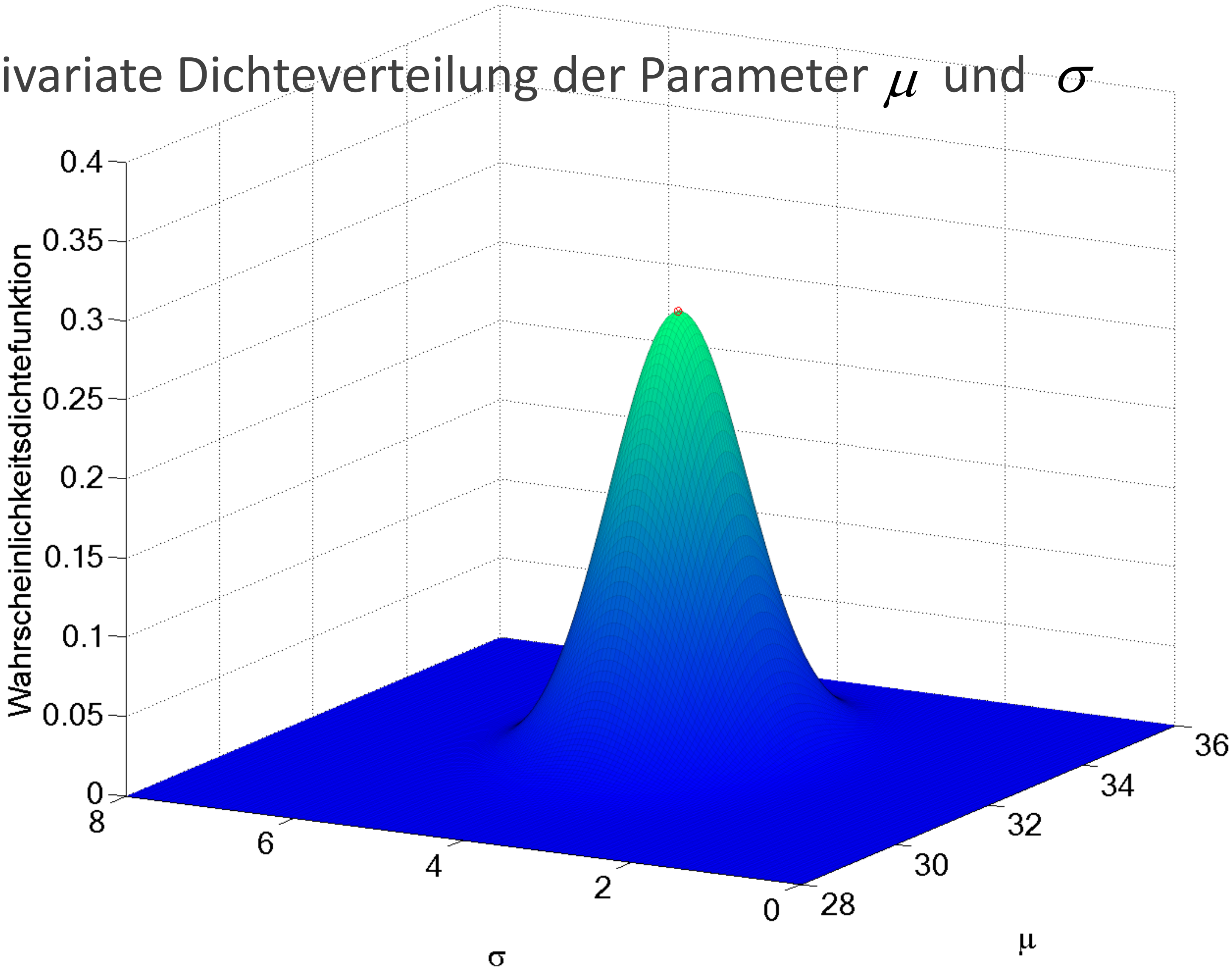
für Normalverteilung

$$\Downarrow$$

$$C_{\Theta\Theta} = H^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Varianz von } \mu & \text{Kovarianz } \mu,\sigma \\ \text{Kovarianz } \sigma,\mu & \text{Varianz von } \sigma \end{pmatrix}$$

Aufgabe E.8

b) multivariate Dichteverteilung der Parameter μ und σ



Aufgabe E.8

c) Was passiert, wenn die Normalverteilung durch eine Exponentialverteilung ersetzt wird?

- Schätze die unbekannten Parameter der Exponentialfunktion mit Hilfe der MLM.
- Zeichne die kumulative Verteilungsfunktion zusammen mit der beobachteten Verteilungsfunktion der Stichprobenwerte.

Aufgabe E.8

Die Likelihood-Funktion ist:

Exponentialverteilung

$$L = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda \hat{x}_i}$$

Die korrespondierende Log-Likelihood-Funktion ist:

$$l = \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\lambda e^{-\lambda \hat{x}_i}\right) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i$$

Den MLM Schätzwert erhält man aus:

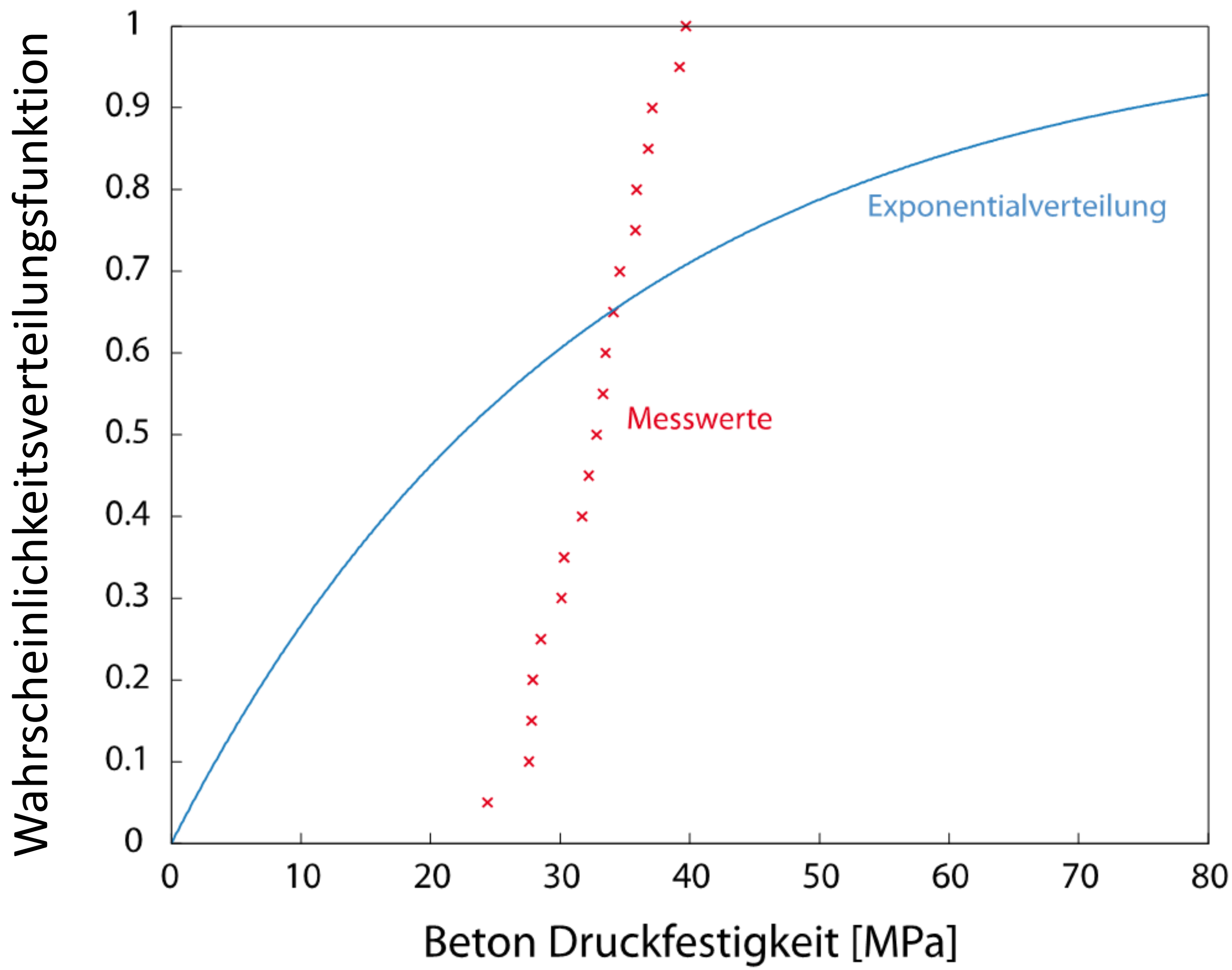
$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 0$$

… er entspricht:

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i} \longrightarrow \lambda = 0.031$$

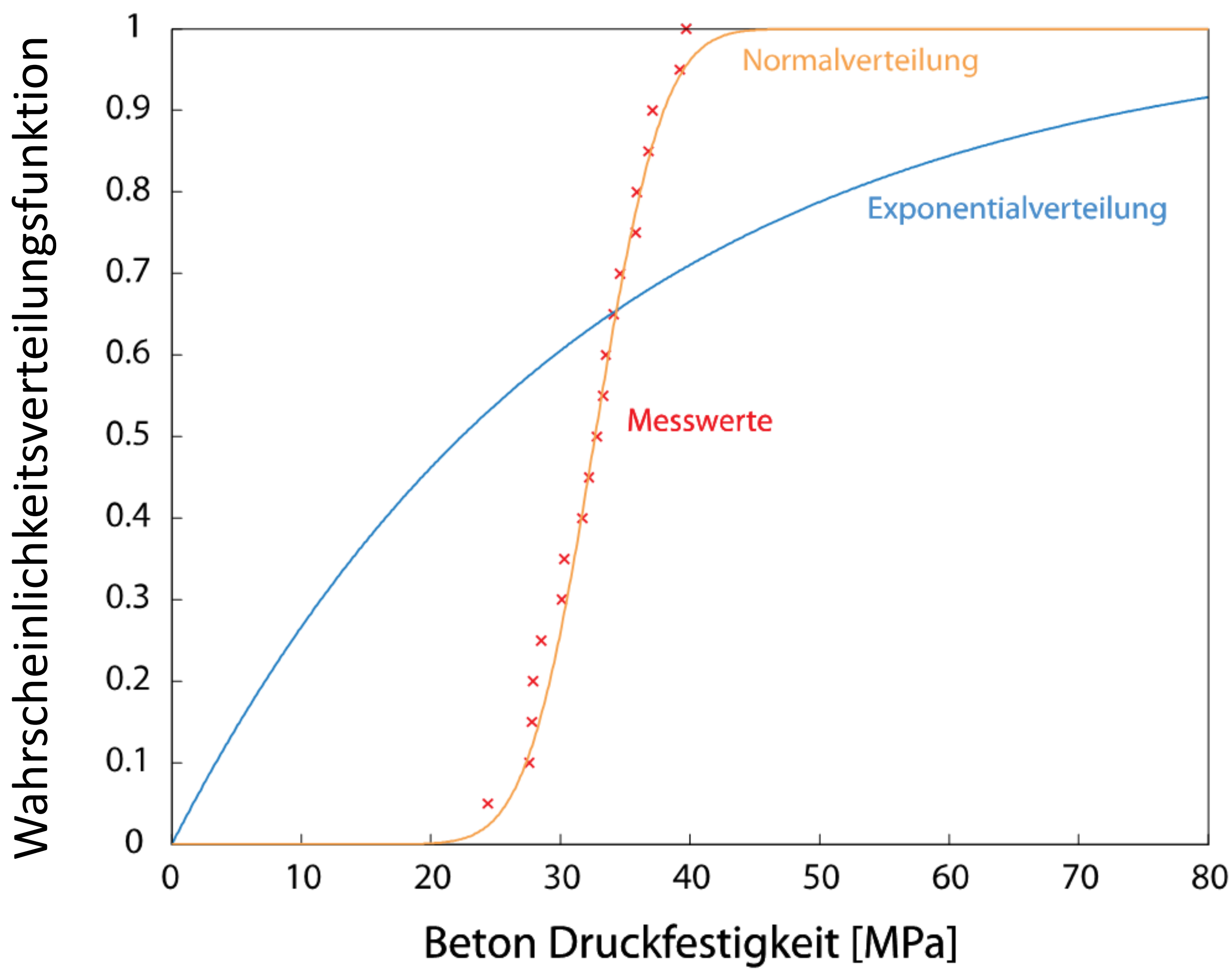
Aufgabe E.8

c) Was meint ihr? Beschreibt die Exponentialfunktion (mit den MLM Schätzwerten) die Grundgesamtheit der Stichprobe gut?



Aufgabe E.8

c) Was meint ihr? Beschreibt die Exponentialfunktion (mit den MLM Schätzwerten) die Grundgesamtheit der Stichprobe gut?



Aufgabe E.11

Die Druckfestigkeit parallel zur Faser von 30 Holzproben wurde bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben.

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	12.8	11	23.4	21	29.3
2	16.3	12	26.8	22	29.5
3	16.6	13	26.9	23	30.3
4	16.9	14	27	24	32.1
5	17.2	15	27.1	25	32.3
6	17.9	16	27.2	26	33.5
7	19.5	17	27.2	27	33.9
8	21.9	18	27.5	28	35.6
9	22.3	19	27.9	29	39.2
10	22.5	20	28.3	30	43.5

Aufgabe E.11

Die Druckfestigkeit parallel zur Faser von 30 Holzproben wurde bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben.

a) Passe eine Exponential- und eine Weibullverteilung den Daten an. Bestimme dazu die Parameter dieser Verteilungen mit der Methode der Momente.

b) Zeichne die kumulativen Verteilungsfunktionen der Verteilungen und zeichne die kumulativen Verteilung der Stichprobe ein.

Aufgabe E.11

Die Druckfestigkeit parallel zur Faser von 30 Holzproben wurde bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben.

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	12.8	11	23.4	21	29.3
2	16.3	12	26.8	22	29.5
3	16.6	13	26.9	23	30.3
4	16.9	14	27	24	32.1
5	17.2	15	27.1	25	32.3
6	17.9	16	27.2	26	33.5
7	19.5	17	27.2	27	33.9
8	21.9	18	27.5	28	35.6
9	22.3	19	27.9	29	39.2
10	22.5	20	28.3	30	43.5

a) Passe eine Exponential- und eine Weibullverteilung den Daten an. Bestimme dazu die Parameter dieser Verteilungen mit der Methode der Momente.

Aufgabe E.11

Das erste und zweite Moment der Beobachtungen sind:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 26.41$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^2 = 747.55$$

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	12.8	11	23.4	21	29.3
2	16.3	12	26.8	22	29.5
3	16.6	13	26.9	23	30.3
4	16.9	14	27	24	32.1
5	17.2	15	27.1	25	32.3
6	17.9	16	27.2	26	33.5
7	19.5	17	27.2	27	33.9
8	21.9	18	27.5	28	35.6
9	22.3	19	27.9	29	39.2
10	22.5	20	28.3	30	43.5

Die Exponentialverteilung hat die folgende Verteilung:

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

mit dem Mittelwert:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = m_1$$

Aufgabe E.11

Die Exponentialverteilung hat die folgende Verteilung:

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

mit dem Mittelwert: $\mu = \dfrac{1}{\lambda} = m_1$

So kann der Parameter λ geschätzt werden zu:

$$\lambda = \frac{1}{m_1} = 0.038$$

Die kumulative Verteilungsfunktion kann angegeben werden zu:

$$F_X(x) = 1 - \exp(-0.038x), \quad x > 0$$

Aufgabe E.11

Das erste und zweite Moment der Beobachtungen sind:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i = 26.41 \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i^2 = 747.55 \qquad \mu = m_1 \qquad \sigma = \sqrt{m_2 - m_1^{\,2}}$$

Die (zweiparametrige) Weibullverteilung hat die folgende kumulative Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{u}\right)^k\right), \quad x > 0$$

mit dem Mittelwert und der Standardabweichung:

$$\mu = u\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) = m_1$$

Siehe Skript Tabelle D.2

$$\sigma = u\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \sqrt{m_2 - m_1^{\,2}}$$

Aufgabe E.11

Die unbekannten Parameter u und k können bestimmt werden:

1. Parameter k

Approximativ (ohne Beweis !) gilt:

(z.B. mit Solver aus Excel)

$$k \approx \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{-1.09} = \left(\frac{\sqrt{m_2 - m_1{}^2}}{m_1}\right)^{-1.09} = 4.21$$

(Skript Tabelle D.2)

Aufgabe E.11

2. Parameter u:

$$\mu = u\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$u = \frac{\mu}{\Gamma(1+1/k)} = \frac{m_1}{\Gamma(1.24)}$$

$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x
.514	1.0	1.000	5.5
.863	1.1	0.951	5.6
.689	1.2	0.918	5.7
.811	1.3	0.897	5.8
.132	1.4	0.887	5.9
.591	1.5	0.886	6.0
150	1.6	0.894	6.1

Linear interpolieren

Tab. T.5 Skript

Es werden die folgenden Parameter geschätzt:

$$k = 4.21 \qquad u = 29.05$$

Aufgabe E.11

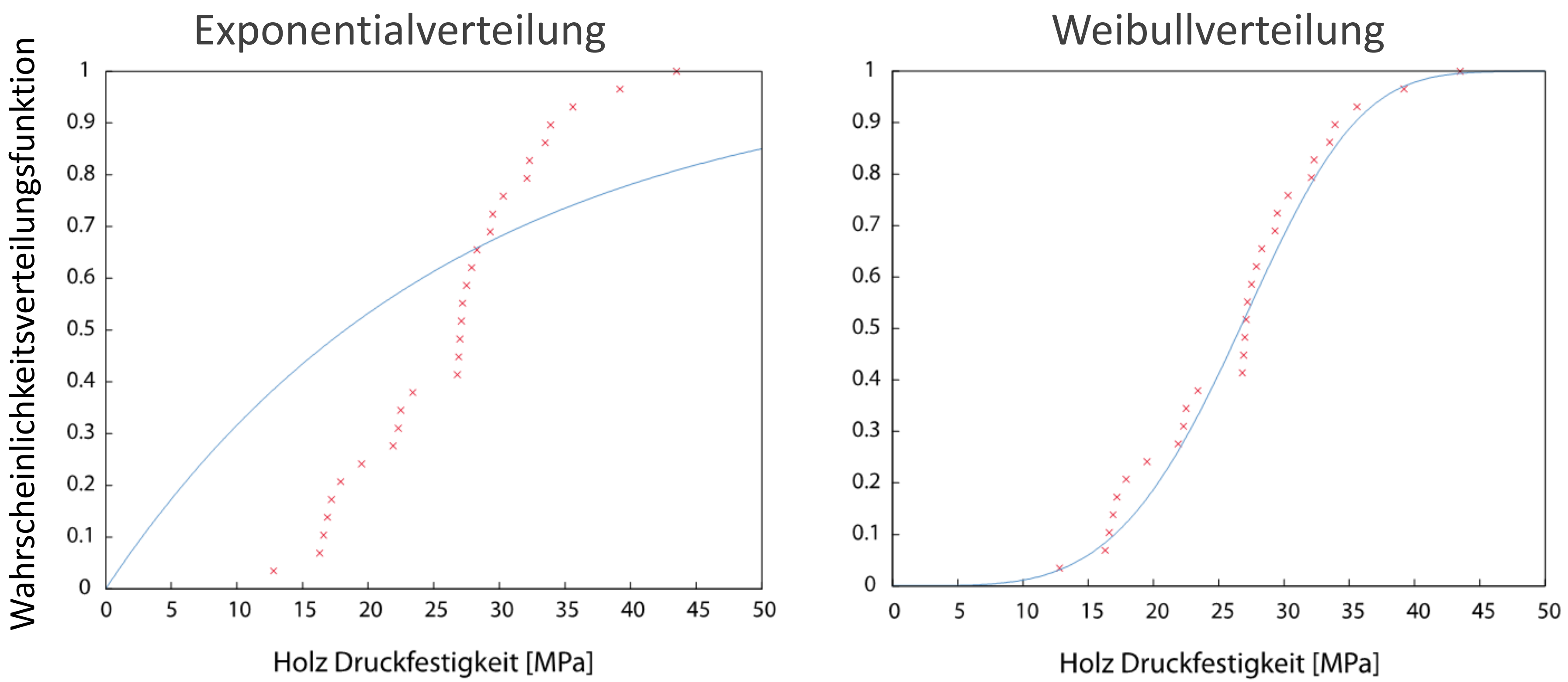
Die Druckfestigkeit parallel zur Faser von 30 Holzproben wurde bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben.

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	12.8	11	23.4	21	29.3
2	16.3	12	26.8	22	29.5
3	16.6	13	26.9	23	30.3
4	16.9	14	27	24	32.1
5	17.2	15	27.1	25	32.3
6	17.9	16	27.2	26	33.5
7	19.5	17	27.2	27	33.9
8	21.9	18	27.5	28	35.6
9	22.3	19	27.9	29	39.2
10	22.5	20	28.3	30	43.5

b) Zeichne die kumulative Verteilungsfunktion der beiden Verteilungen und zeichnen Sie jeweils die kumulative Verteilung der Stichprobe ein.

Aufgabe E.11

b) Zeichne die kumulative Verteilungsfunktion der beiden Verteilungen und zeichne jeweils die kumulative Verteilung der Stichprobe ein.



Aufgabe E.13

Die Betondruckfestigkeit von Probekörpern einer bestimmten Produktion wird als normalverteilt angenommen. Aus früheren Testergebnissen ist der Mittelwert und die Standardabweichung der Druckfestigkeit bekannt. Nach Berücksichtigung der statistischen Unsicherheit ist der Mittelwert der Betondruckfestigkeit ebenfalls normalverteilt (Einheit in *MPa*):

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma'_{\mu_X} = 3\right)$$

Die Standardabweichung wird als bekannt (deterministisch) angenommen:

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Aufgabe E.13

Um die Verteilung des Parameters μ_X zu aktualisieren, wurden 20 Versuchskörper auf ihre Druckfestigkeit geprüft. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben.

Bestimme die *a posteriori* Verteilung des Mittelwertes sowie die prädiktive Verteilung der Beton-Druckfestigkeit

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma'_{\mu_X} = 3\right)$$

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Es wird nur die Verteilung des Mittelwertes aktualisiert.

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Durch neue Messungen $\hat{x}$ können wir unsere *A Priori* Wahrscheinlichkeitsdichte für den Mittelwert μ_X aktualisieren – Dazu verwenden wir den Satz von Bayes.

A Posteriori

Likelihood

A Priori

$$f''(\boldsymbol{\theta} \mid \hat{x}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \boldsymbol{\theta}) \cdot f'(\boldsymbol{\theta})}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \boldsymbol{\theta}) \cdot f'(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta}} = \frac{L(\boldsymbol{\theta}) \cdot f'(\boldsymbol{\theta})}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

$$L(\mu_X) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i \mid \mu_X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right)$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

$$L(\mu_X) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i \mid \mu_X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right)$$

$$f'(\mu_X) = \frac{1}{\sigma'_{\mu_X} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu'_{\mu_X}}{\sigma'_{\mu_X}} \right)^2 \right)$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

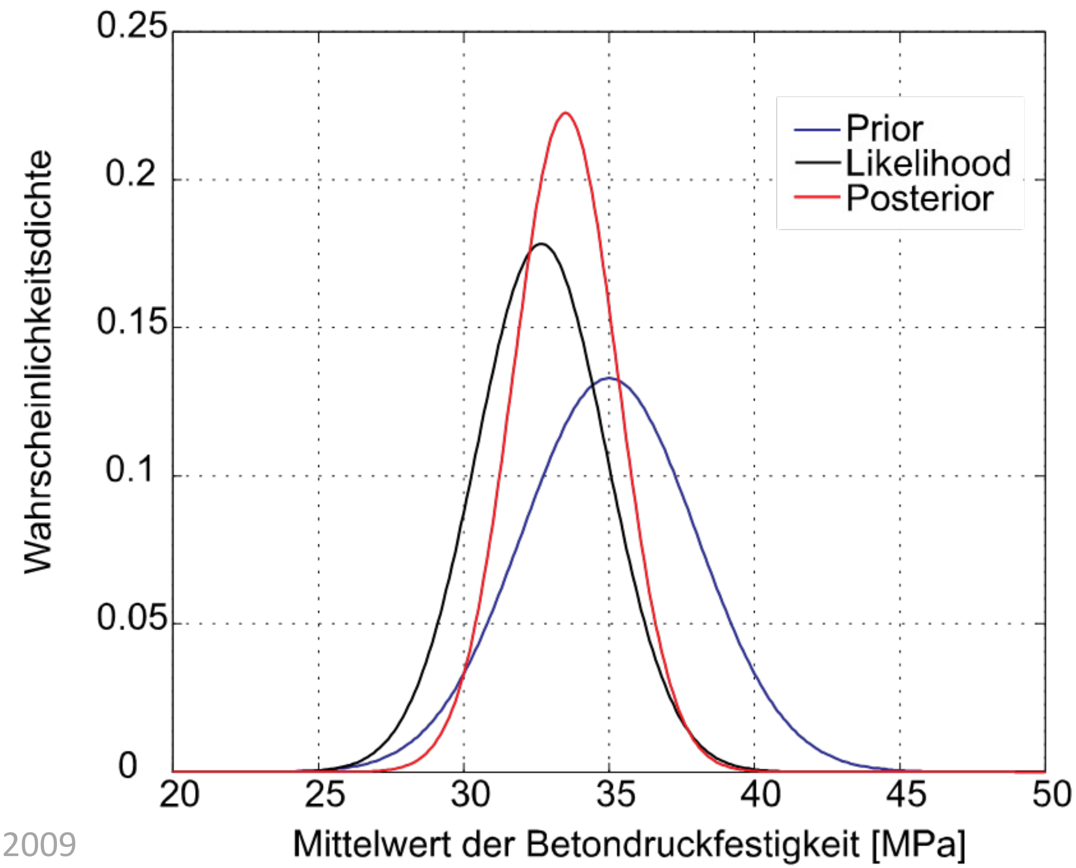
$$L(\mu_X) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i \mid \mu_X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right)$$

$$f'(\mu_X) = \frac{1}{\sigma'_{\mu_X} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu'_{\mu_X}}{\sigma'_{\mu_X}} \right)^2 \right)$$

$$f'(\hat{\mathbf{x}}) = \int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X = \int L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X$$

Aufgabe E.13

In der *a Posteriori* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Mittelwert μ_X sind die Informationen aus der *A priori* Verteilung und der *Likelihood* (den Daten) enthalten.



Aufgabe E.13

Die konjugierte a priori Verteilung für das Aktualisieren des Mittelwertes μ_X einer Normalverteilung bei bekannter Standardabweichung σ_X ist die Normalverteilung.

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Für diesen Fall gibt es eine analytische Lösung!

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aufgabe E.13

Die konjugierte a priori Verteilung für das Aktualisieren des Mittelwertes μ_X einer Normalverteilung bei bekannter Standardabweichung σ_X ist die Normalverteilung.

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Für diesen Fall gibt es eine analytische Lösung!

$$\bar{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aufgabe E.13

$\sigma_X = 10$ $\quad \bar{x} = 32.665$

$n = 20$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}}$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\dfrac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \dfrac{\bar{x}}{n'}}{\dfrac{1}{n'} + \dfrac{1}{n}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}$$

Stichprobengewichtung

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\dfrac{\sigma_X^2}{n'} + \dfrac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}{\dfrac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n'} + \dfrac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\dfrac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \dfrac{\bar{x}}{n'}}{\dfrac{1}{n'} + \dfrac{1}{n}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}} = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9} = 11.11$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\dfrac{\sigma_X^2}{n'} + \dfrac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}{\dfrac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n'} + \dfrac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{35}{20} + \frac{32.665}{11.11}}{\frac{1}{11.11} + \frac{1}{20}} = \underline{\underline{33.499}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}} = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9} = 11.11$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} + \frac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665 \qquad n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

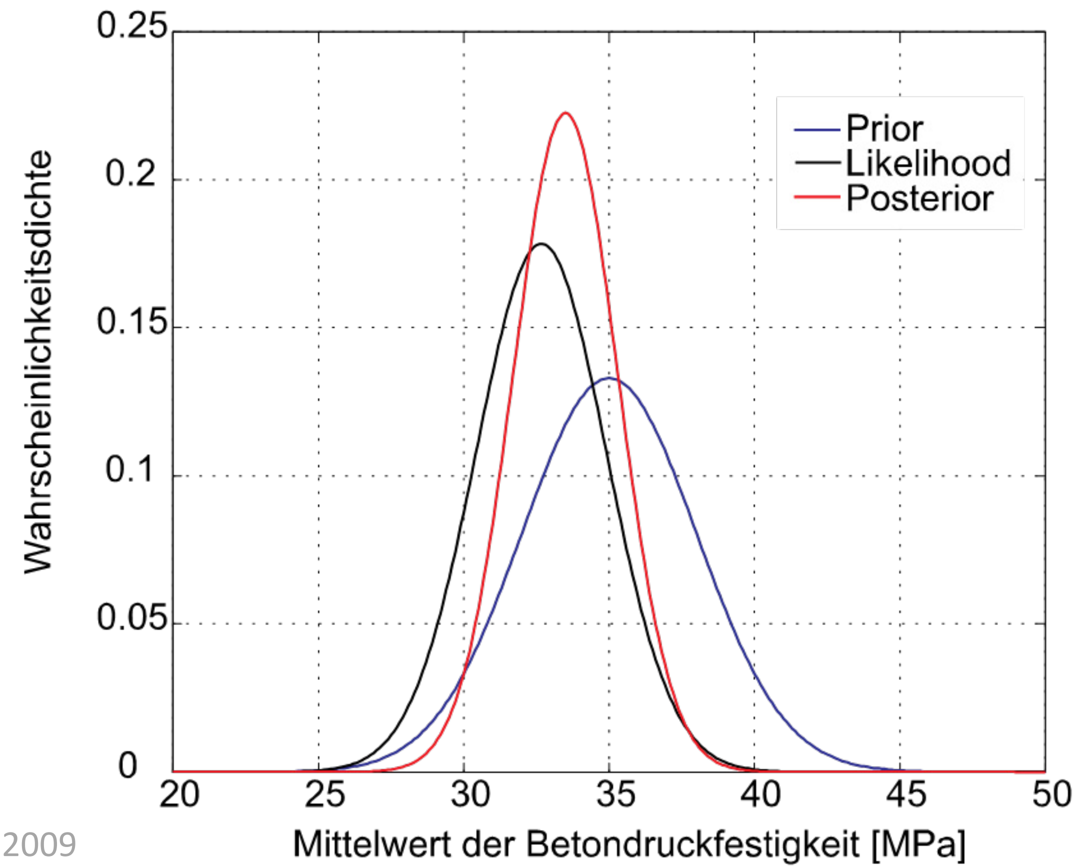
$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{35}{20} + \frac{32.665}{11.11}}{\frac{1}{11.11} + \frac{1}{20}} = \underline{\underline{33.499}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^2_{\mu_X}} = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9} = 11.11$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}} = \sqrt{\frac{\frac{10^2}{11.11} + \frac{3^2}{20}}{\frac{3^2}{11.11} + \frac{3^2}{20}}} = \underline{\underline{2.739}}$$

Aufgabe E.13

In der *A Posteriori* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Mittelwert μ_X sind die Informationen aus der *A priori* Verteilung und der *Likelihood* (den Daten) enthalten.



Aufgabe E.13

Die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung ist die neue Verteilung unserer Zufallsvariablen X nach dem Aktualisieren der Verteilungsparameter:

$$\underbrace{f(x|\hat{\mathbf{x}})}_{\text{Prädiktive Dichte}} = \int \underbrace{f_X(x|\boldsymbol{\theta})}_{\text{Dichte bei gegebenen Parametern}} \cdot \underbrace{f''(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}})}_{\text{A posteriori Verteilung der Paramter}} d\boldsymbol{\theta}$$

$$f(x|\hat{\mathbf{x}}) = \int f_X(x|\mu_X, \sigma_X) \cdot f''(\mu_X|\hat{\mathbf{x}}) \, d\mu_X$$

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x\middle|\hat{\mathbf{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma''_{\mu_X}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu''_{\mu_X}}{\sigma''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X\sim N(\mu'',\sigma'')$$

A posteriori
Mittelwert

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x\middle|\hat{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'''_{\mu_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu'''_{\mu_X}}{\sigma'''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X \sim N(\mu''', \sigma''') \qquad \sigma'''^2 = \sigma''^2_{\mu_X} + \sigma_X^2$$

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x\middle|\hat{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'''_{\mu_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu'''_{\mu_X}}{\sigma'''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X \sim N(\mu''', \sigma''')$$

$$\sigma'''^2 = \underbrace{\sigma''^2_{\mu_X}}_{\text{Streuung des Mittelwerts}} + \underbrace{\sigma^2_X}_{\text{Streuung um den Mittelwert}}$$

$$\mu''' = \mu''$$

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x \middle| \hat{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'''_{\mu_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu'''_{\mu_X}}{\sigma'''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X \sim N(\mu''', \sigma''')$$

$$\sigma'''^2 = \sigma''^2_{\mu_X} + \sigma_X^2$$

$$= 2.739^2 + 10^2 = 107.502$$

$$\longrightarrow \sigma''' = 10.368 MPa$$

$$\mu''' = 33.499 MPa$$

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Markus Deublein
HIL E 23.1
Tel: 044 – 633 71 31
deublein@ibk.baug.ethz.ch