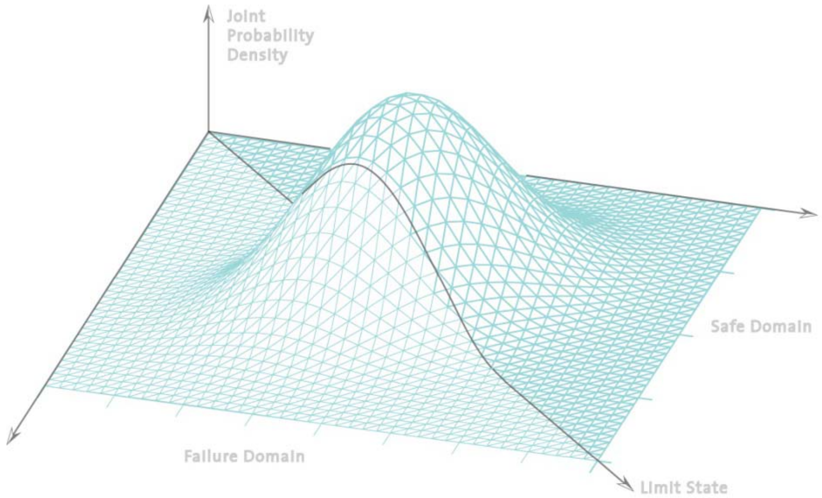


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 4

Inhalt heute

- Gruppenaufgabe
  - Tukey Box Plot (Beschreibende Statistik)
- Mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen rechnen:
  - Mittelwert, Median, Modus bestimmen
  - Unterschreitungs- und Überschreitungswahrscheinlichkeit berechnen

1. Teilprüfung am Donnerstag 1. April

Inhalt

- Multiple Choice + 1 Aufgabe zum Rechnen
- Stoff der Vorlesung bis und mit **23. März**, der Übungen bis und mit **25.März** (Rechenaufgabe: etwas, was wir in den Übungen bereits ähnlich gerechnet haben)
- Ganzer Stoff der Vorlesungen 1 bis 5, Übungen 1 bis 5.

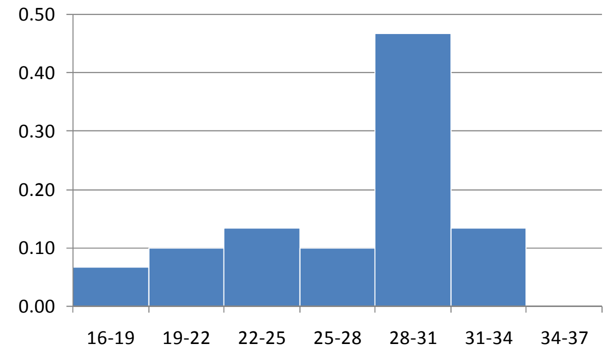
Erlaubte Hilfsmittel

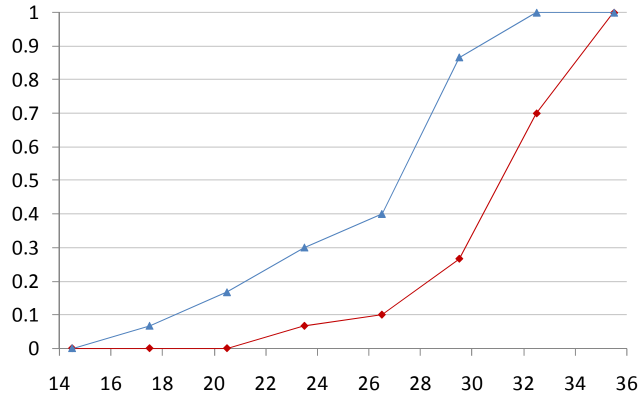
- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, Wörterbücher, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt, auch programmierbare.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

Stichprobe und Grundgesamtheit

Beschreibende Statistik:

- In einem ersten Schritt haben wir die Daten ausgehend von einer Stichprobe nur beschrieben (numerisch oder grafisch)

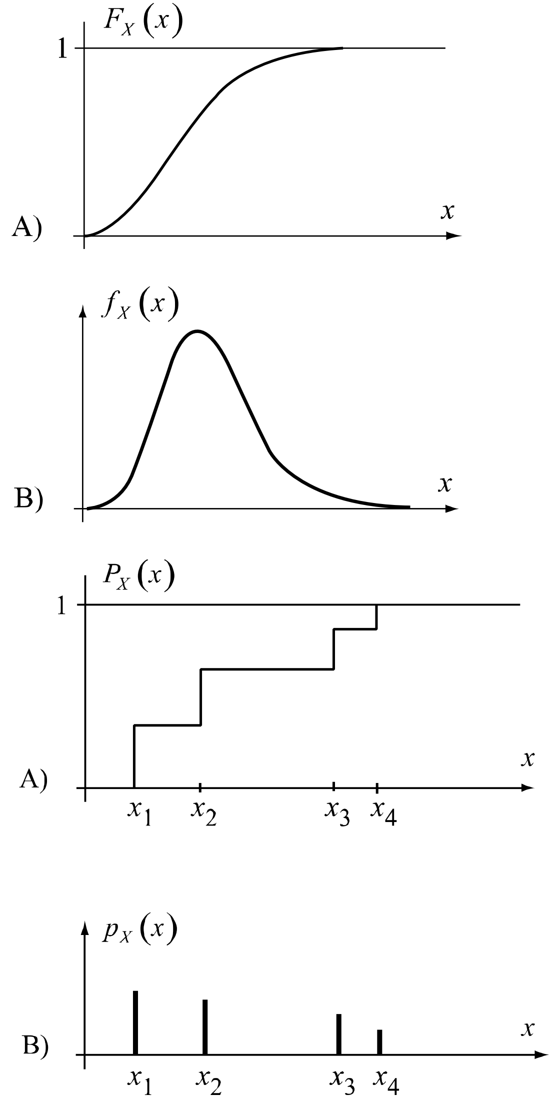




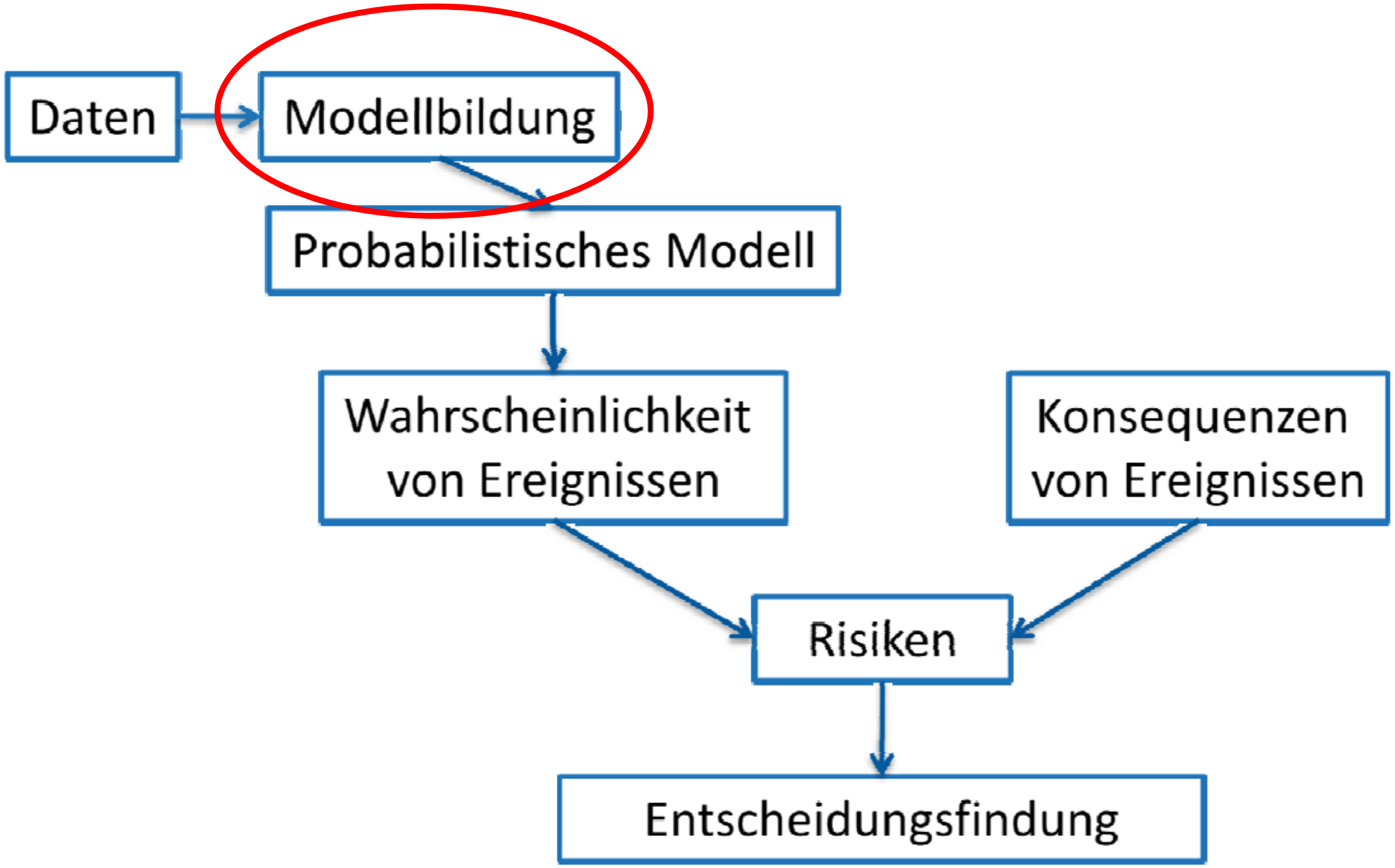
Stichprobe und Grundgesamtheit

Modellbildung mit Verteilungen:

- Wir betrachten die Grundgesamtheit
- Wir modellieren die Grundgesamtheit durch Zufallsvariablen, die einer bestimmten (diskreten oder kontinuierlichen) Verteilung folgen



Stichprobe und Grundgesamtheit



Aufgabe D.1

Die monatlichen Aufwendungen in CHF für den Wasserverbrauch einschliesslich Abwassergebühren für einen Zweipersonenhaushalt seien durch eine Zufallsvariable X mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} c\ x\ (15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welchen Wert muss c annehmen?

b) Gib die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariablen X an.

c) Welche der vier monatlichen Ausgaben 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF überschreitet nicht das 0.9-Quantil der monatlichen Aufwendungen?

d) Wie hoch sind die mittleren monatlichen Aufwendungen für den Wasserverbrauch einschliesslich der Wassergebühren für einen Zweipersonenhaushalt?

Aufgabe D.1

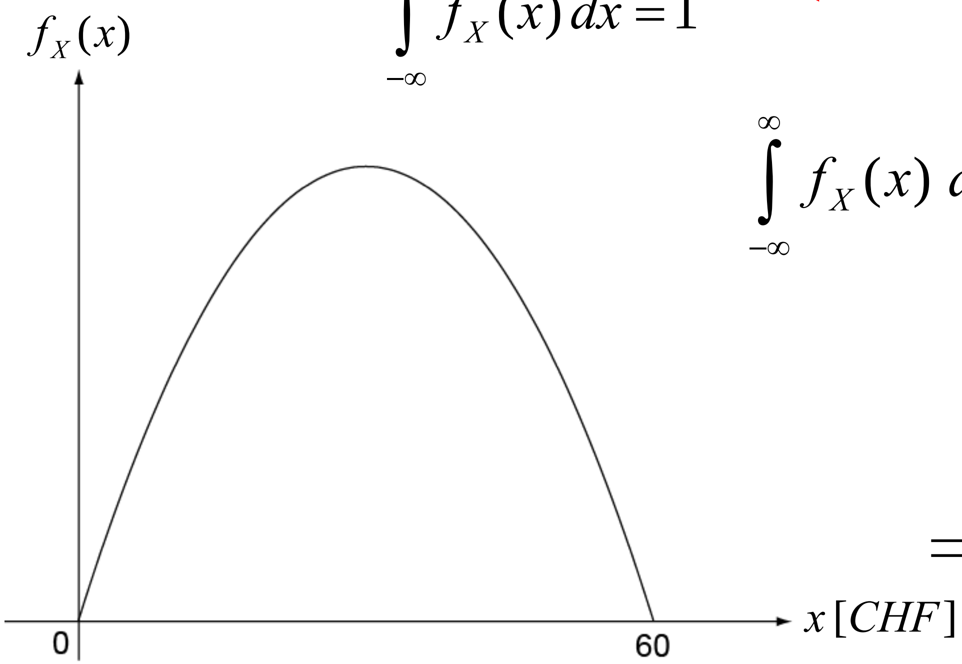
$$f_X(x) = \begin{cases} c\ x\ (15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welchen Wert muss c annehmen?

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0$$ Nicht negativ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$ Fläche = 1



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ dx = 1 \Rightarrow c \int_0^{60} x\ (15 - \frac{x}{4})\ dx = 1$$

$$\Rightarrow c \left[\frac{15}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^3 \right]_0^{60} = 1$$

$$\Rightarrow c\ (27000 - 18000) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9000}$$

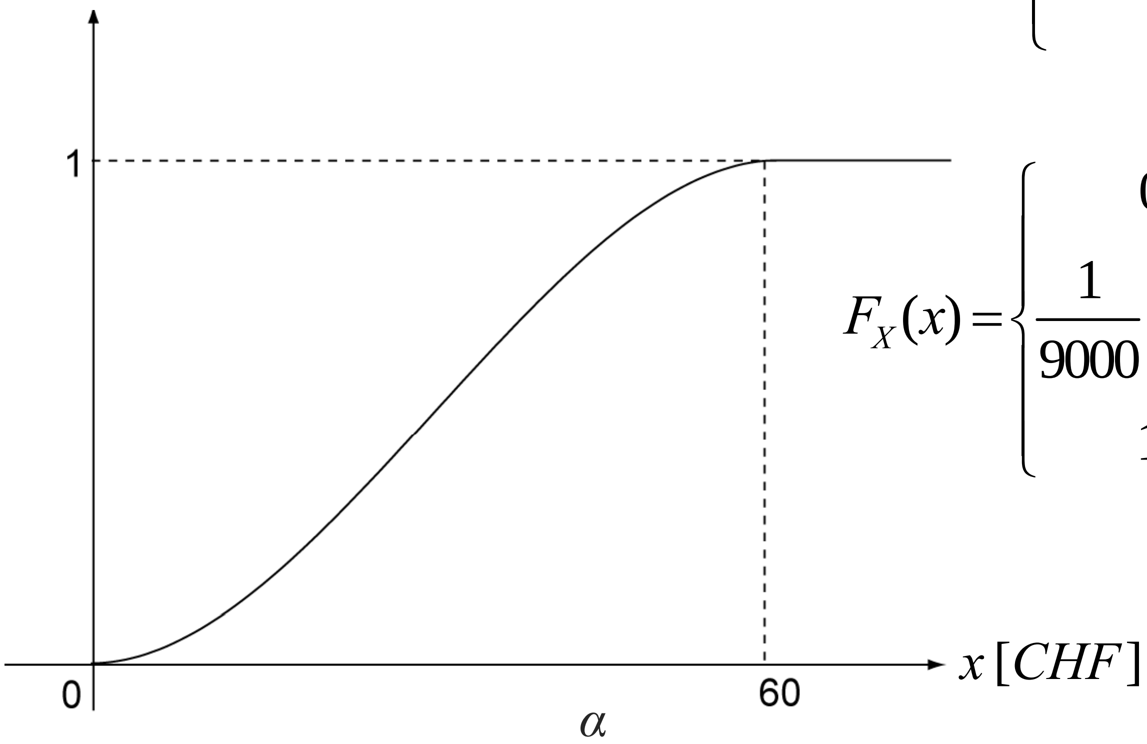
Aufgabe D.1

b) Gib die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariablen X an.

Kumulative Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \int f_X(x)\,dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x\,(15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



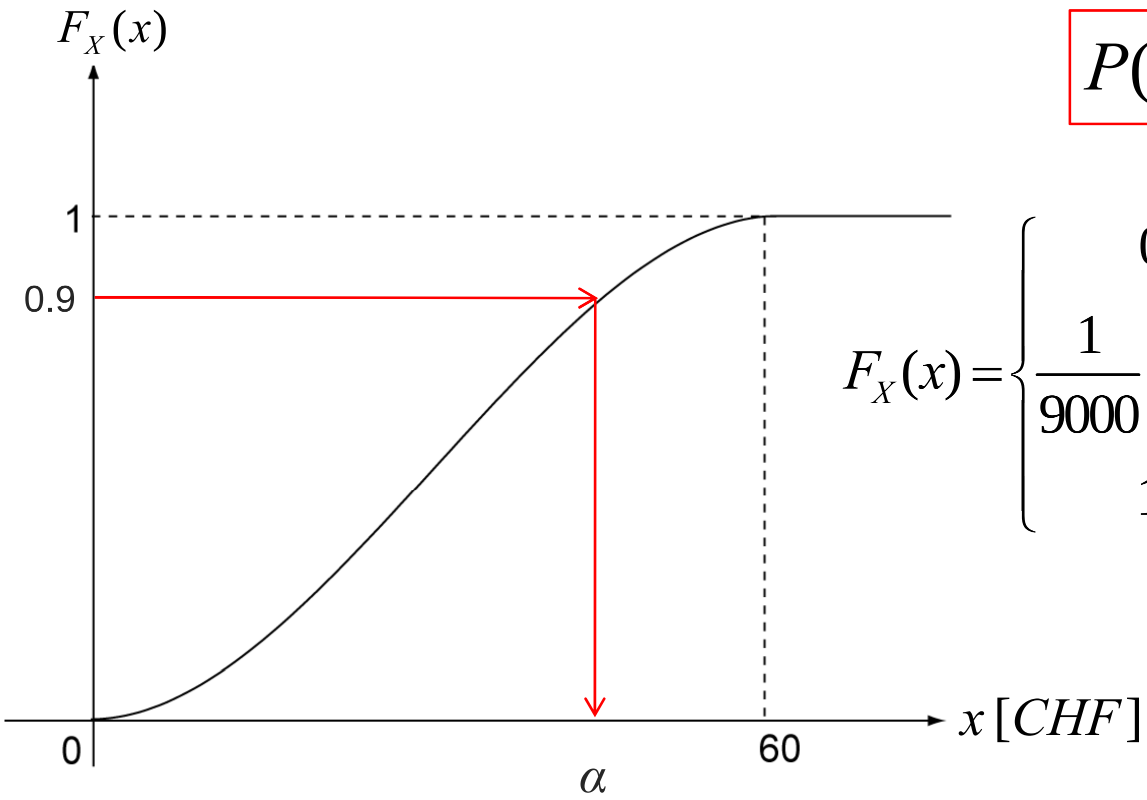
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right) & 0 \le x \le 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$

Aufgabe D.1

c) Welche der vier monatlichen Ausgaben 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF überschreitet nicht das 0.9-Quantil der monatlichen Aufwendungen?

0.9-Quantil berechnen:

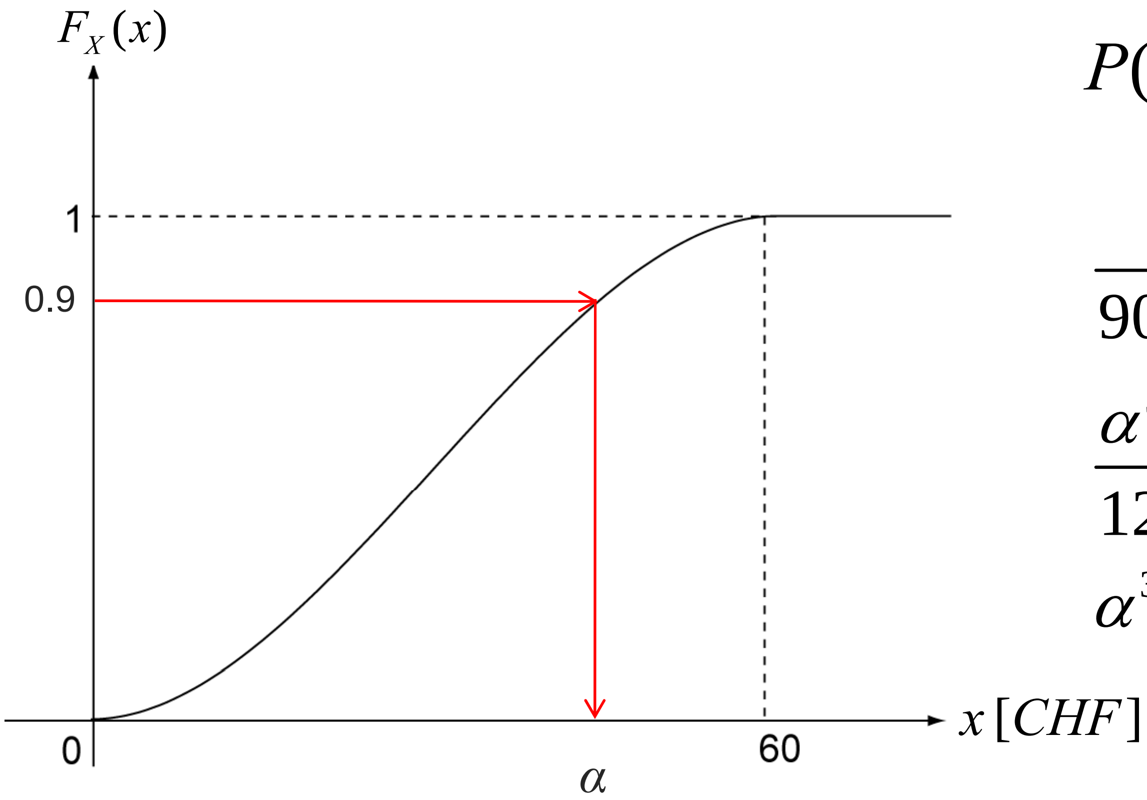
$$\boxed{P(X \leq \alpha) = F_X(\alpha) = 0.9}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{9000}\left(\dfrac{15}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^3\right) & 0 \leq x \leq 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$

Aufgabe D.1

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right) & 0 \le x \le 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$



$$P(X \le \alpha) = F_X(\alpha) = 0.9$$

$$\frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^3\right) = 0.9$$

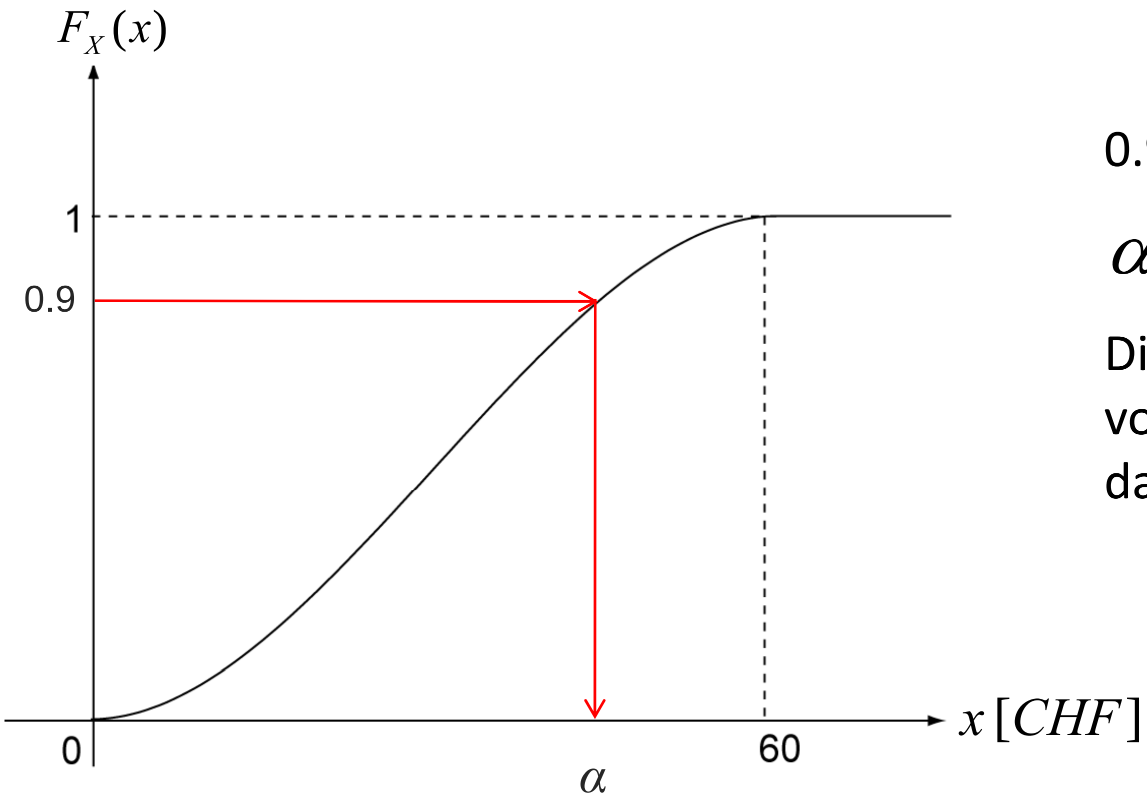
$$\frac{\alpha^3}{12} - \frac{15}{2}\alpha^2 + 8100 = 0$$

$$\alpha^3 - 90\alpha^2 + 97200 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = 48.30$$

Aufgabe D.1

c) Welche der vier monatlichen Ausgaben 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF überschreitet nicht das 0.9-Quantil der monatlichen Aufwendungen?



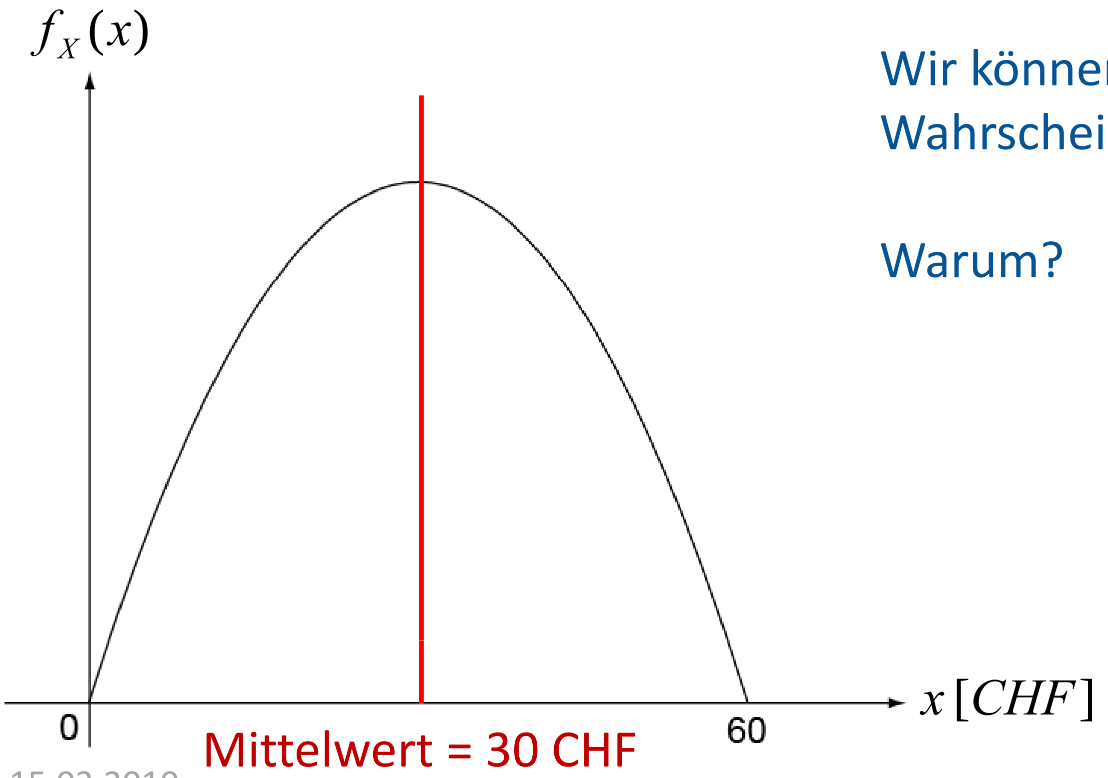
0.9-Quantil:

$$\alpha = 48.30$$

Die zwei Beträge in der Höhe von 30 und 40 CHF übersteigen das 0.9 Quantil nicht.

Aufgabe D.1

d) Wie hoch sind die mittleren monatlichen Aufwendungen für den Wasserverbrauch einschliesslich der Wassergebühren für einen Zweipersonenhaushalt?



Wir können den Mittelwert direkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ablesen.

Warum?

Aufgabe D.1

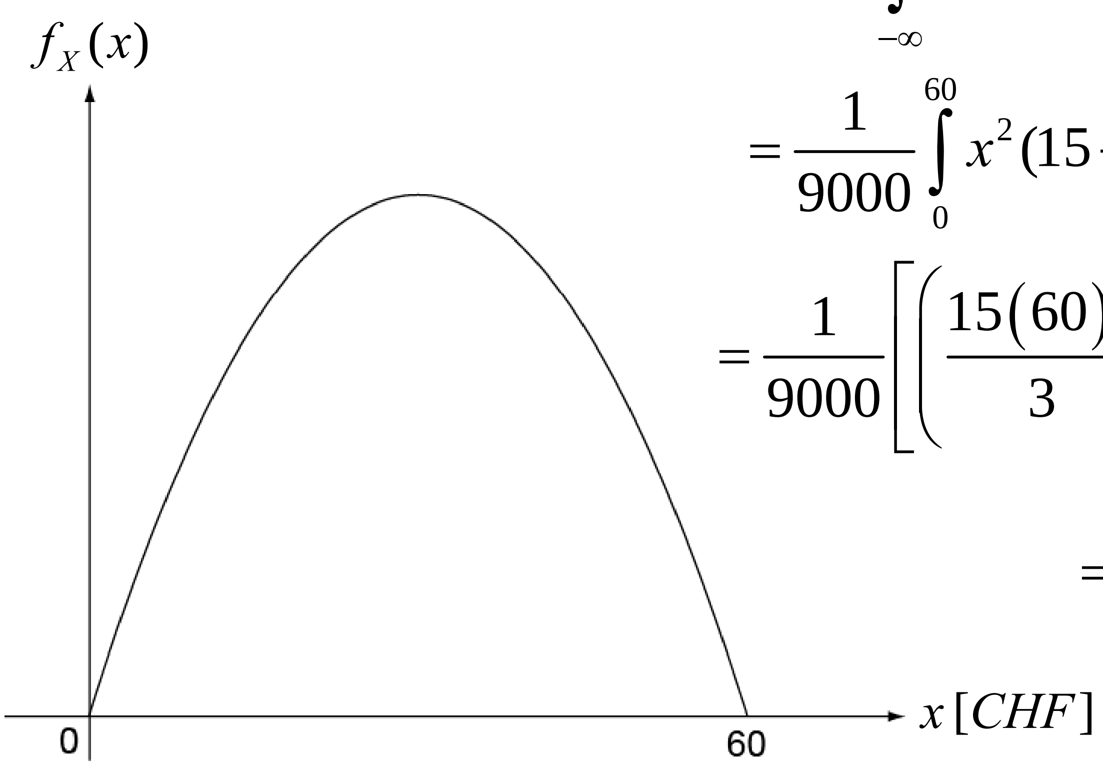
d) Wie hoch sind die mittleren monatlichen Aufwendungen für den Wasserverbrauch einschliesslich der Wassergebühren für einen Zweipersonenhaushalt?

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{9000}\int_0^{60} x\cdot(x(15-\frac{x}{4}))\ dx$$

$$= \frac{1}{9000}\int_0^{60} x^2(15-\frac{x}{4})\ dx = \frac{1}{9000}\left[\frac{15x^3}{3}-\frac{x^4}{4\cdot 4}\right]_0^{60}$$

$$= \frac{1}{9000}\left[\left(\frac{15(60)^3}{3}-\frac{(60)^4}{16}\right)-\left(\frac{15(0)^3}{3}-\frac{(0)^4}{16}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{9000}\left(\frac{15(60)^3}{3}-\frac{(60)^4}{16}\right) = 30$$



Aufgabe D.2

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine Zufallsvariable ist in der Abbildung dargestellt ($a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ und $d = 6$).

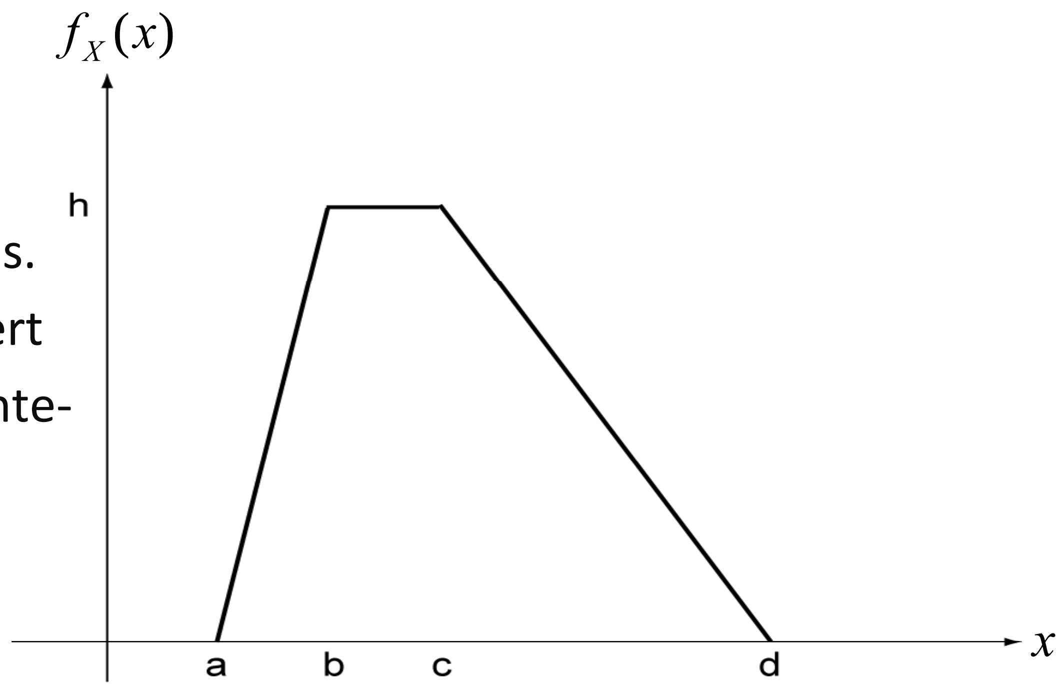
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h.

c) Berechne den Mittelwert.

d) Berechne den Wert des Medians.

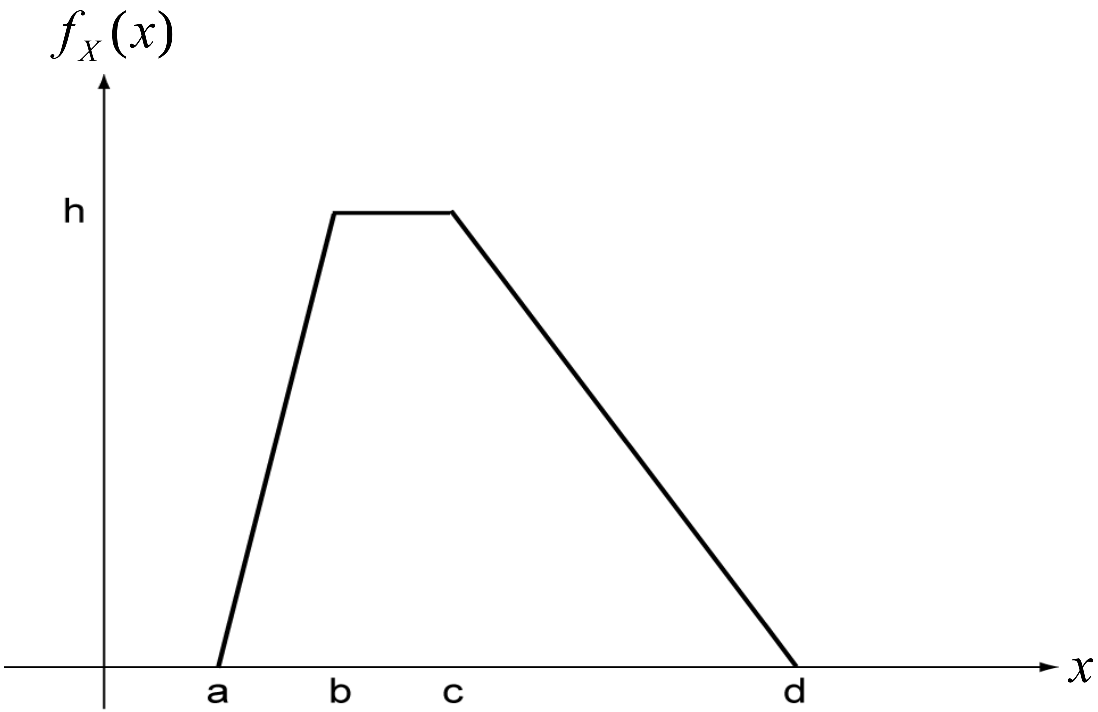
e) Ermittle grafisch den Medianwert aus der Wahrscheinlichkeitsdichte-funktion. Diskutiere, wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.



Aufgabe D.2

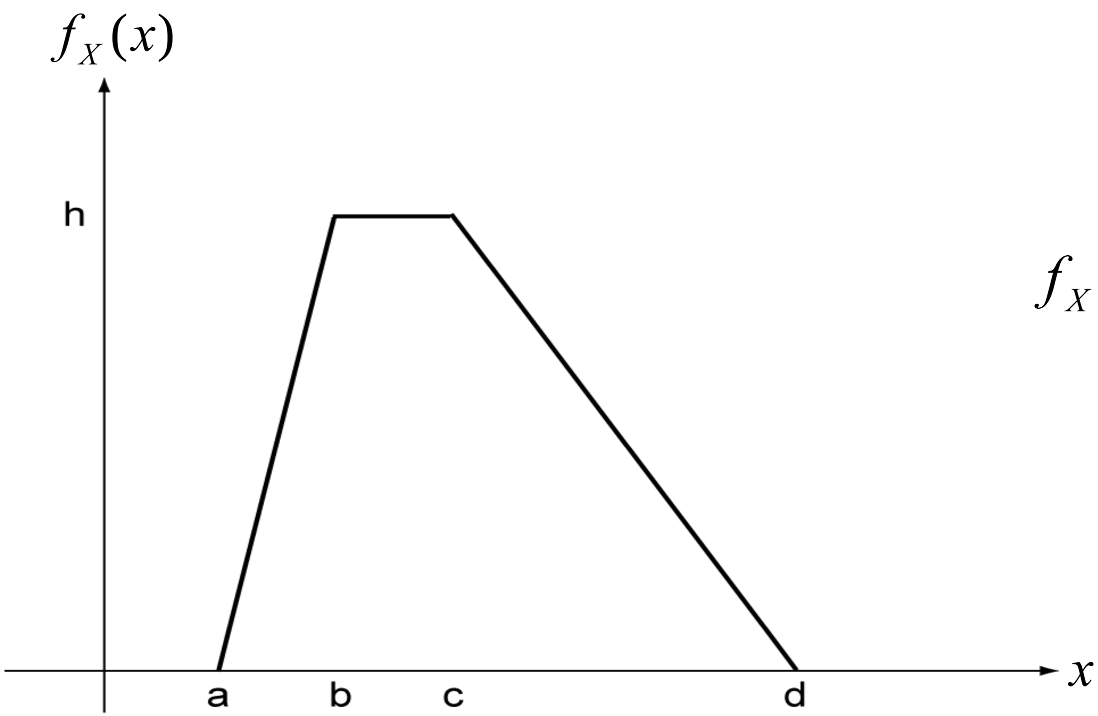
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

Denken wir zuerst über die Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nach – Was bedeutet das grafisch?



Aufgabe D.2

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

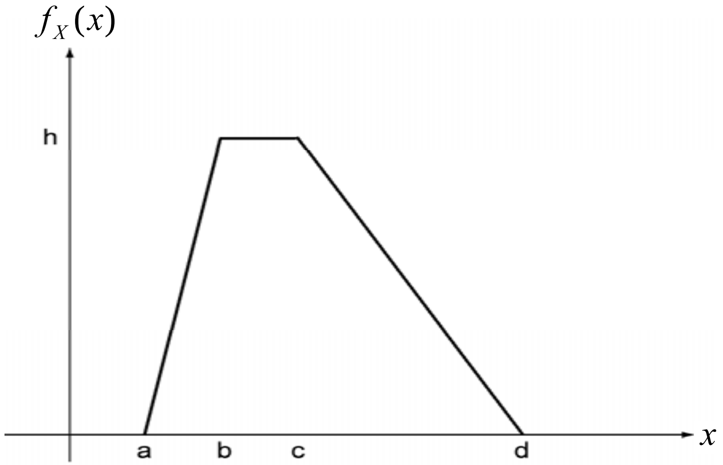


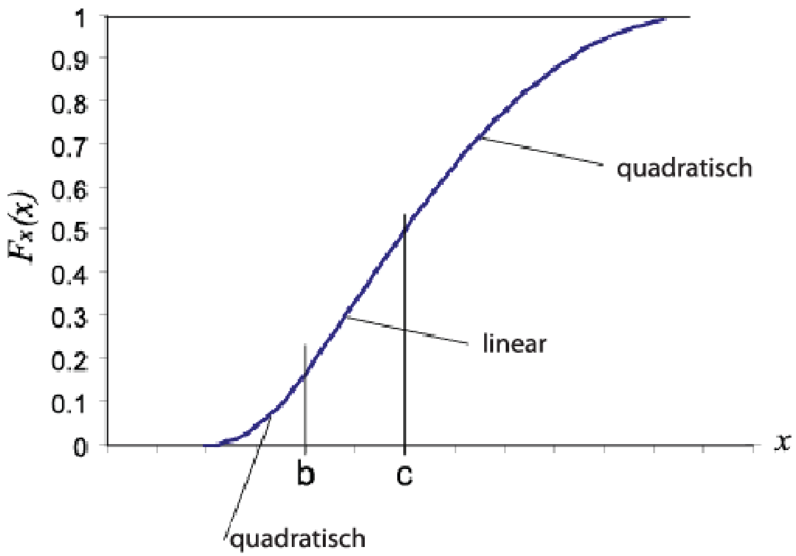
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{h}{(b-a)}(x-a) & a \le x < b \\ h & b \le x < c \\ \dfrac{h}{(c-d)}(x-d) & c \le x < d \\ 0 & d \le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$F_X(x) = \int f_X(x)dx$$



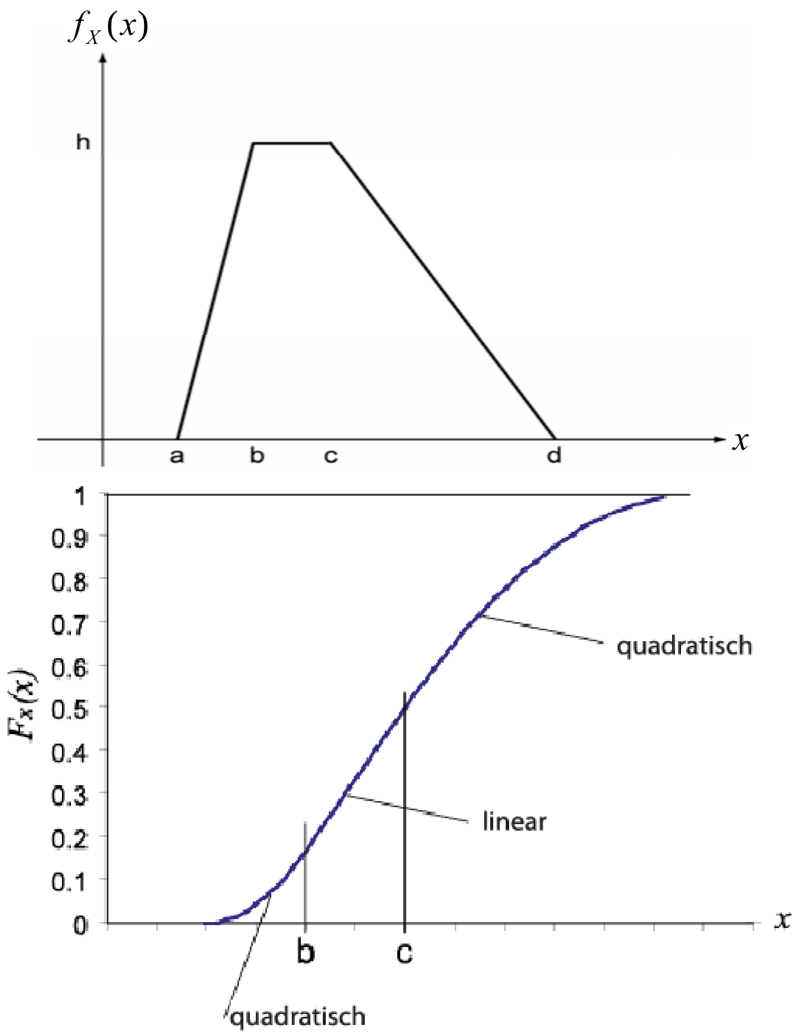


$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{h}{(b-a)}(x-a) & a \le x < b \\ h & b \le x < c \\ \dfrac{h}{(c-d)}(x-d) & c \le x < d \\ 0 & d \le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$F_X(x) = \int f_X(x)dx$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{h}{(b-a)}\left(\dfrac{1}{2}x^2 - ax\right) + C_1 & a \le x < b \\ hx + C_2 & b \le x < c \\ \dfrac{h}{(c-d)}\left(\dfrac{1}{2}x^2 - dx\right) + C_3 & c \le x < d \\ 1 & d \le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

Einsetzen $a=1,\ b=2,\ c=3$ und $d=6$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{h}{(b-a)}\left(\dfrac{1}{2}x^2-ax\right)+C_1 & a\le x<b \\ hx+C_2 & b\le x<c \\ \dfrac{h}{(c-d)}\left(\dfrac{1}{2}x^2-dx\right)+C_3 & c\le x<d \\ 1 & d\le x \end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ h\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)+C_1 & 1\le x<2 \\ hx+C_2 & 2\le x<3 \\ h\left(2x-\dfrac{1}{6}x^2\right)+C_3 & 3\le x<6 \\ 1 & 6\le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Die Konstanten können mit Hilfe von Randbedingungen bestimmt werden.

Für $x = 1 \quad 0 = h\left(\frac{1}{2} - 1\right) + C_1$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{h}{2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \boxed{\begin{array}{ll} 0 & x < 1 \\ h\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C_1 & 1 \le x < 2 \end{array}} \\ hx + C_2 & 2 \le x < 3 \\ h\left(2x - \frac{1}{6}x^2\right) + C_3 & 3 \le x < 6 \\ 1 & 6 \le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Die Konstanten können mit Hilfe von Randbedingungen bestimmt werden.

Aus $x=1$ $\quad C_1 = \frac{h}{2}$

Für $x=2$ $\quad h\left(\frac{4}{2}-2\right)+C_1 = 2h+C_2$

$$\Rightarrow C_2 = C_1 - 2h = -\frac{3}{2}h$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \boxed{h\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)+C_1 \quad 1\le x<2 \\ hx + C_2 \quad 2\le x<3} \\ h\left(2x-\frac{1}{6}x^2\right)+C_3 & 3\le x<6 \\ 1 & 6\le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Die Konstanten können mit Hilfe von Randbedingungen bestimmt werden.

Aus $x=1$ $\quad C_1 = \frac{h}{2}$

Aus $x=2$ $\quad C_2 = -\frac{3}{2}h$

Für $x=3$ $\quad 3h + C_2 = h\left(6 - \frac{9}{6}\right) + C_3$

$$\Rightarrow C_3 = C_2 - \frac{3}{2}h = -3h$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ h\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C_1 & 1 \le x < 2 \\ \boxed{hx + C_2} & \boxed{2 \le x < 3} \\ \boxed{h\left(2x - \frac{1}{6}x^2\right) + C_3} & \boxed{3 \le x < 6} \\ 1 & 6 \le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

Die Konstanten können mit Hilfe von Randbedingungen bestimmt werden.

Aus $x = 1$ $\quad C_1 = \frac{h}{2}$

Aus $x = 2$ $\quad C_2 = -\frac{3}{2}h$

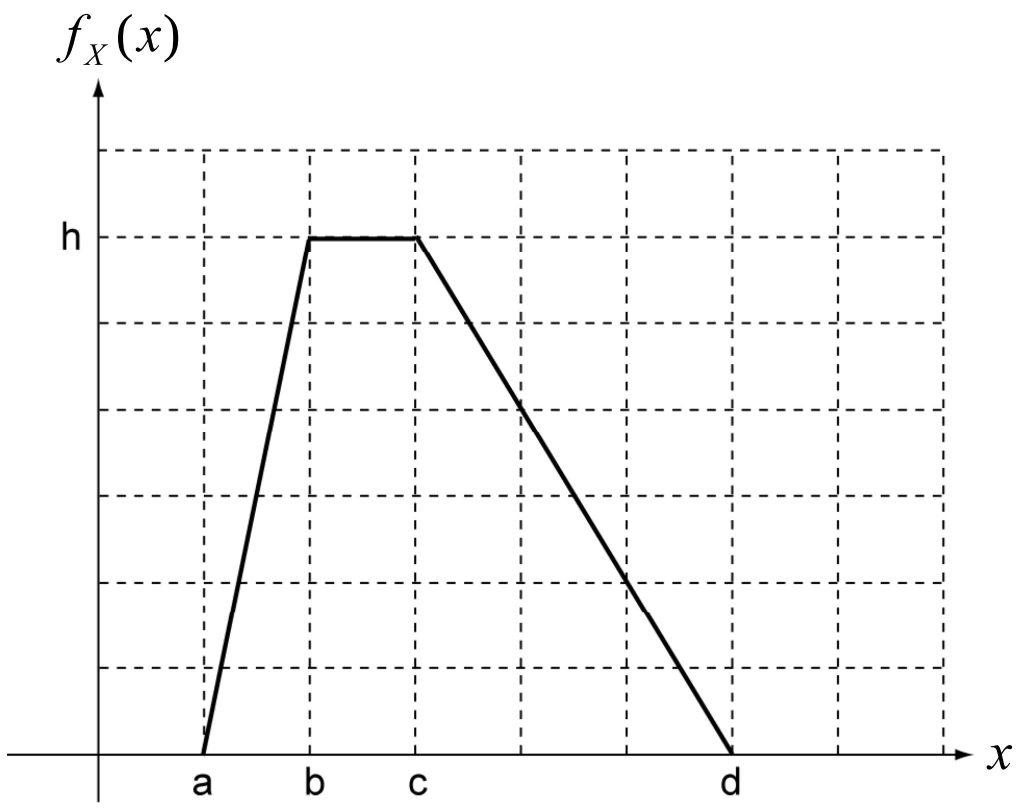
Aus $x = 3$ $\quad C_3 = -3h$

Einsetzen...

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ h\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) & 1 \le x < 2 \\ h\left(x - \frac{3}{2}\right) & 2 \le x < 3 \\ h\left(2x - \frac{1}{6}x^2 - 3\right) & 3 \le x < 6 \\ 1 & 6 \le x \end{cases}$$

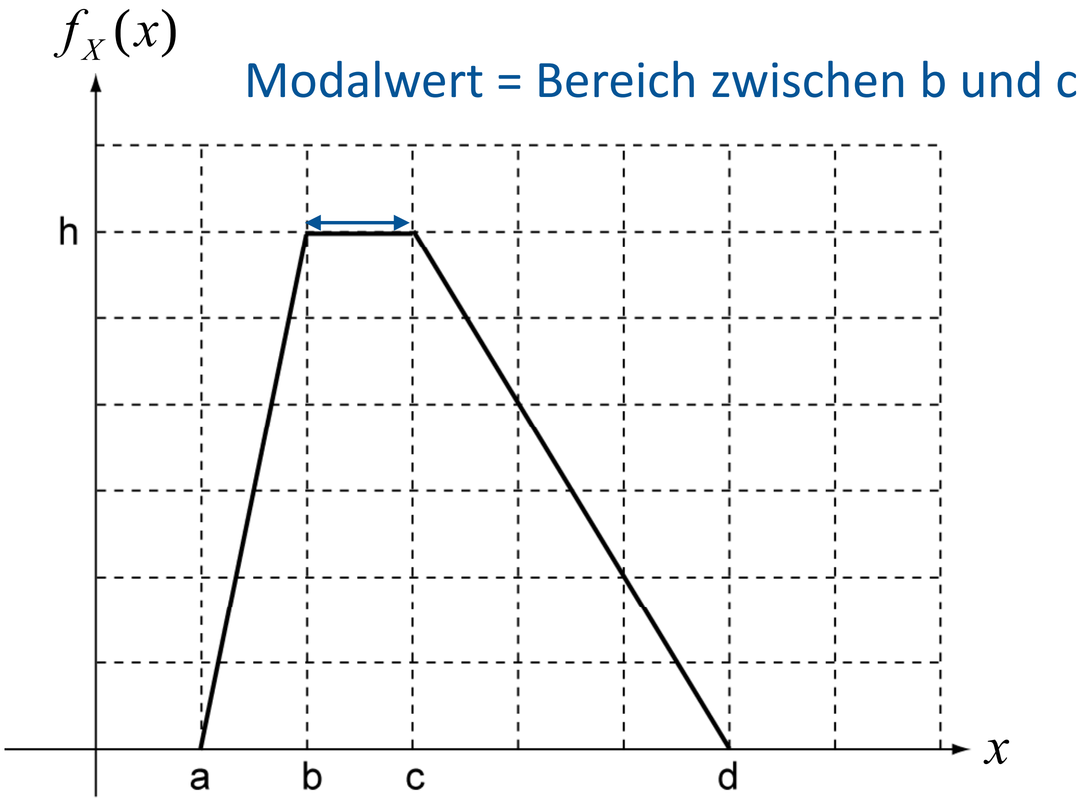
Aufgabe D.2

b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h (a=1, b=2, c=3 und d=6).



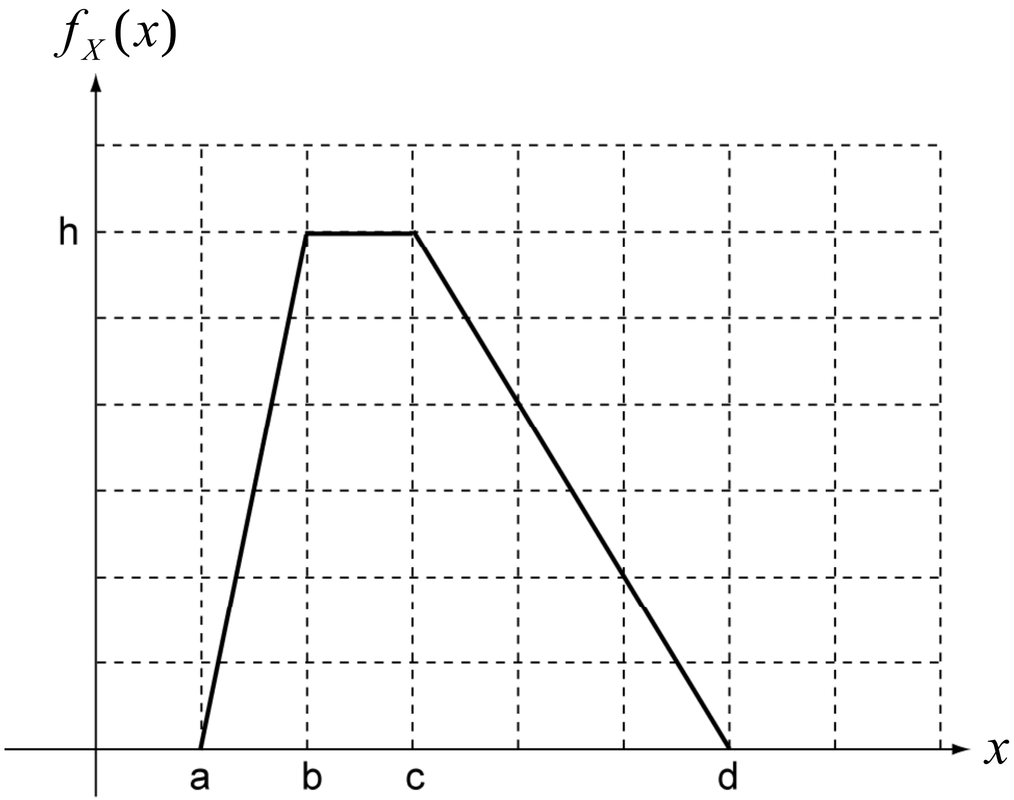
Aufgabe D.2

b) Bestimme den **Modalwert** und den Parameter h (a=1, b=2, c=3 und d=6).



Aufgabe D.2

b) Bestimme den Modalwert **und den Parameter *h*** (a=1, b=2, c=3 und d=6).



Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Mit der Trapezformel:

$$\frac{(d-a)+(c-b)}{2}h = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(6-1)+(3-2)}{2}h = 1 \quad \Rightarrow h = \frac{1}{3}$$

Aufgabe D.2

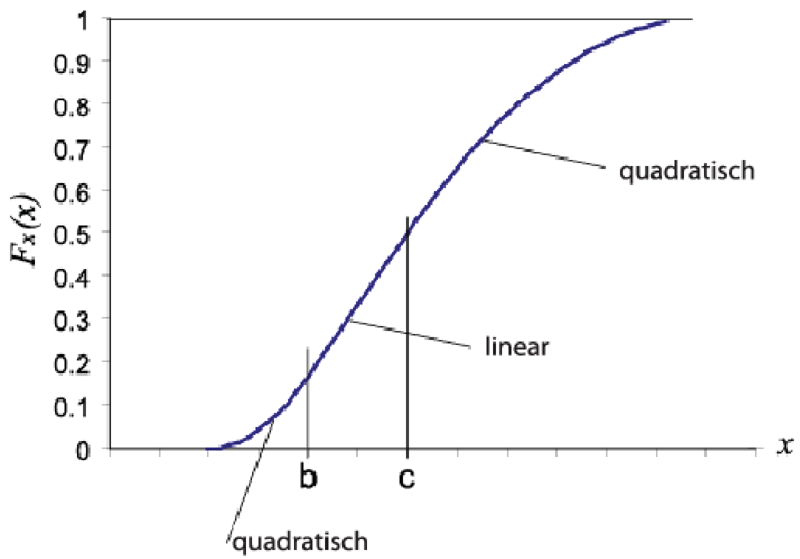
b) Bestimme den Modalwert **und den Parameter *h*** (a=1, b=2, c=3 und d=6).

Alternativ:

$$F_X(x=d) = F_X(x=6) = 1$$

$$\Rightarrow h(12-6-3) = 1 \quad \Rightarrow h = \frac{1}{3}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ h\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) & 1 \le x < 2 \\ h\left(x - \frac{3}{2}\right) & 2 \le x < 3 \\ \boxed{h\left(2x - \frac{1}{6}x^2 - 3\right)} & \boxed{3 \le x < 6} \\ \boxed{1} & \boxed{6 \le x} \end{cases}$$



Aufgabe D.2

c) Berechne den **Mittelwert**

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

Einsetzen:

$a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 6$

und $h = \frac{1}{3}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ h\frac{(x-a)}{(b-a)} & a \le x < b \\ h & b \le x < c \\ h\frac{(x-d)}{(c-d)} & c \le x < d \\ 0 & d \le x \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{(x-1)}{3} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \le x < 3 \\ -\frac{(x-6)}{9} & 3 \le x < 6 \\ 0 & 6 \le x \end{cases}$$

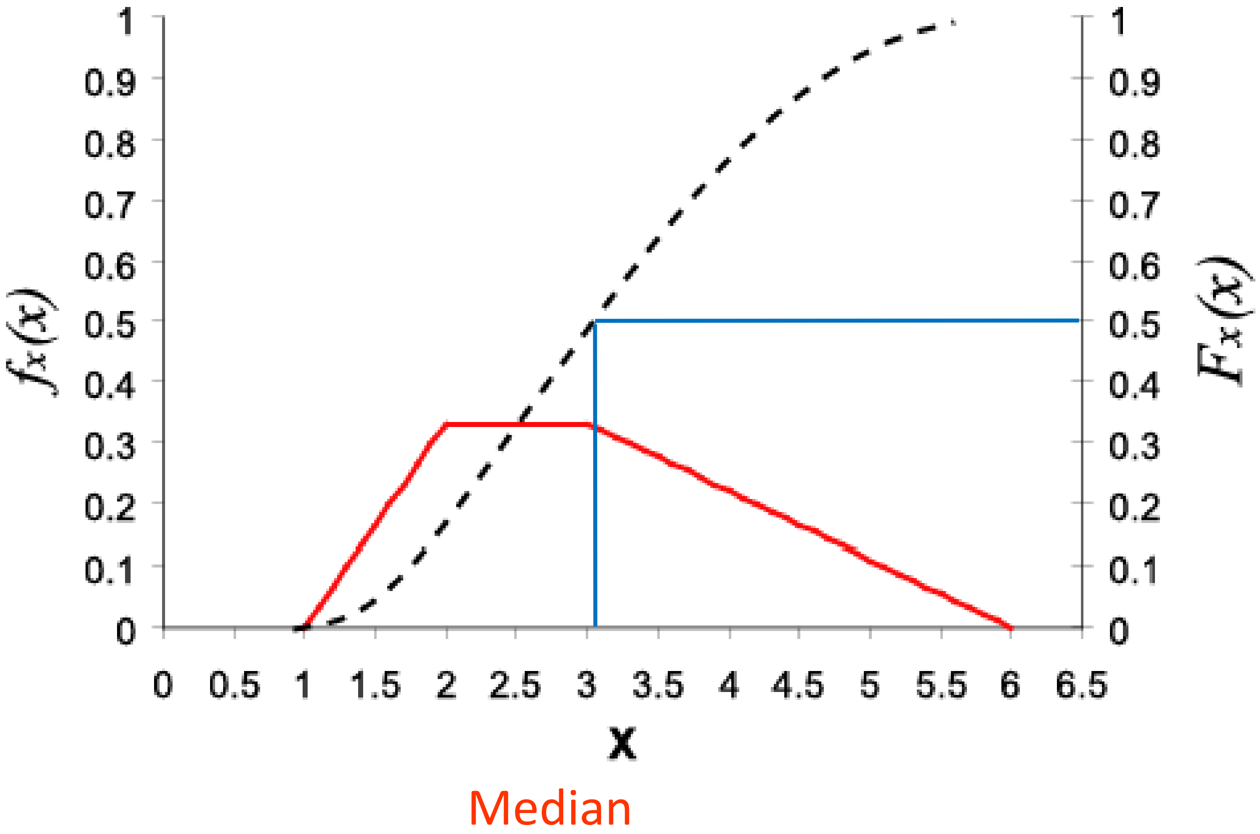
$\Downarrow$

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{x(x-1)}{3}dx + \int_2^3 \frac{x}{3}dx + \int_3^6 \frac{-x(x-6)}{9}dx = 3.11$$

Aufgabe D.2

d) Berechne den Wert des Medians.

Grafisch dargestellt anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion:



Aufgabe D.2

d) Berechne den Wert des Medians.

$$P(X \le x) = \int_1^{\alpha} f_X(x)dx = F_X(\alpha) = 0.5$$

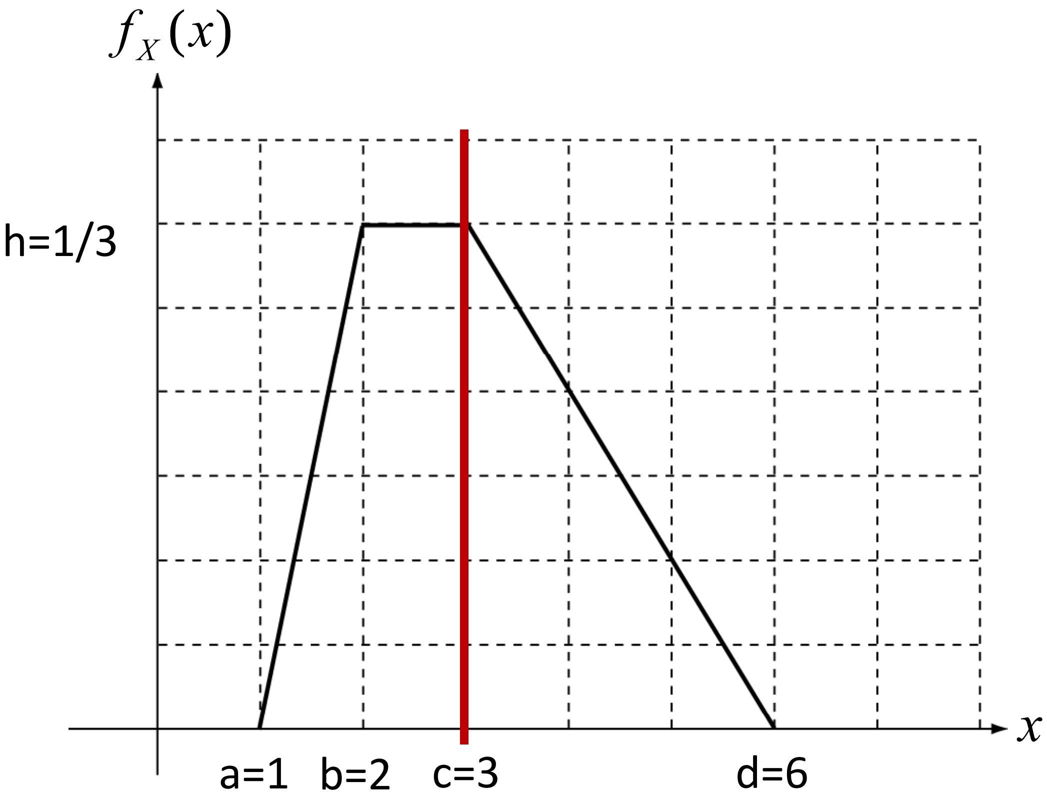
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6}(x^2 - 2x + 1) & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{6}(2x-3) & 2 \le x < 3 \\ \frac{1}{3}\left(2x - \frac{1}{6}x^2 - 3\right) & 3 \le x < 6 \\ 1 & 6 \le x \end{cases}$$

Aufgabe D.2

$$P(X \le x) = \int_1^{\alpha} f_X(x)dx = F_X(\alpha) = 0.5$$

d) Berechne den Wert des Medians.

Median = Punkt P auf der x-Achse, bei welchem die Fläche der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Intervall $[0, P]$ gleich 0.5 ist.



$$\frac{1}{6}\left(x^2 - 2x + 1\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}\left(2x - 3\right)\Big|_2^3 = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

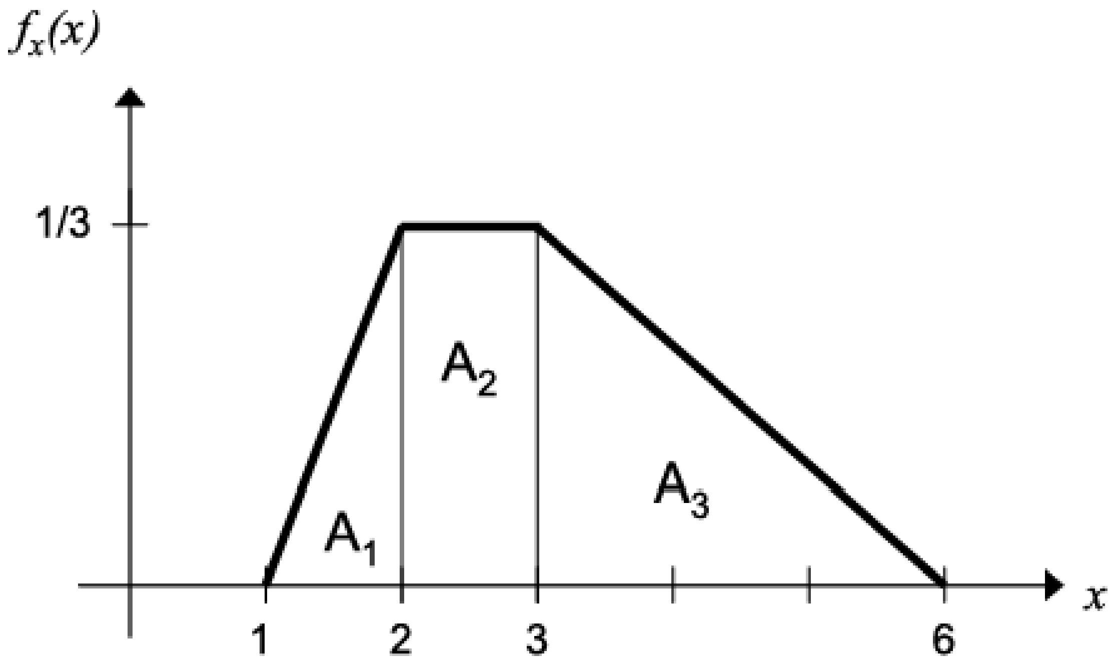
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 0.5$$

$$\Downarrow$$

Der Median liegt bei $x=3$.

Aufgabe D.2

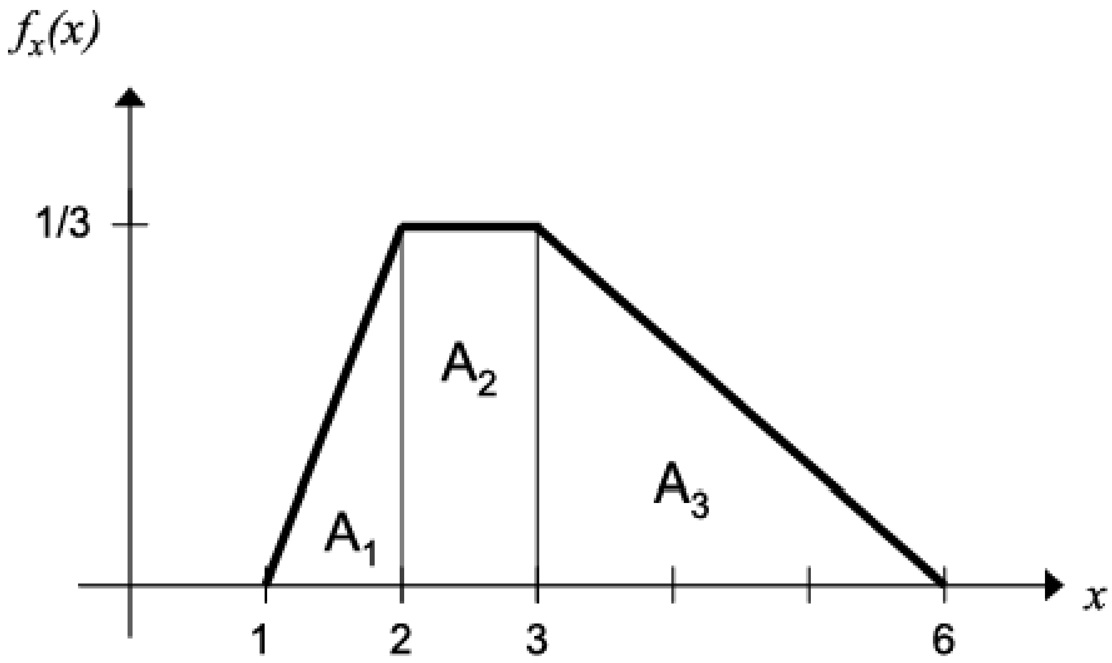
e) Ermittle grafisch den Medianwert aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Diskutiere, wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.



Aufgabe D.2

e) Ermittle grafisch den Medianwert aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Median = Punkt *P* auf der *x*-Achse, bei welchem die Fläche der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Intervall *[0, P]* gleich *0.5* ist.

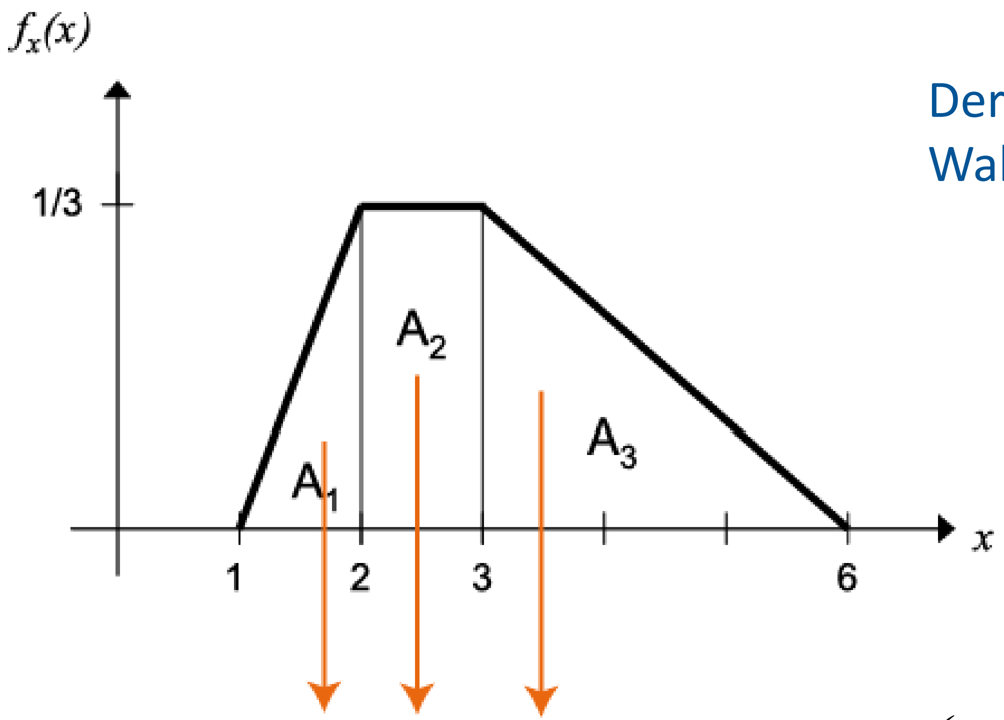


$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(2-1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ A_2 &= (3-2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} 0.5$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(6-3)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe D.2

e) Diskutiere, wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.



Der Mittelwert ist der Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

$$x_S = \frac{\sum_i x_{S_i} \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_X = x_S = \frac{\left(\frac{2}{3}+1\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(1+3\right)\cdot\frac{1}{2}}{1} = 3.11$$

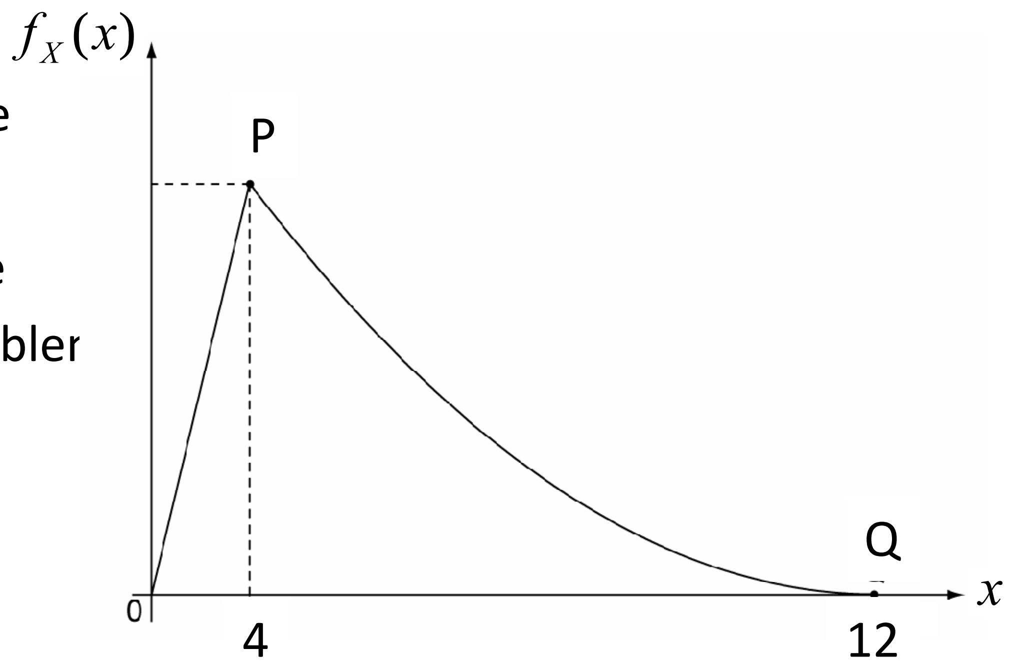
Gruppenaufgabe D.3

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in der Abbildung unten dargestellt. Im Intervall [0, 4] ist die Funktion linear. Im Intervall [4, 12] ist die Funktion parabolisch (Parabel 2. Ordnung), und die x-Achse ist im Punkt Q die Tangente an diese Funktion.

a) Bestimme die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ und beschreibe die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

b) Ermittle und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X mit einigen charakteristischen Werten in der Abbildung.

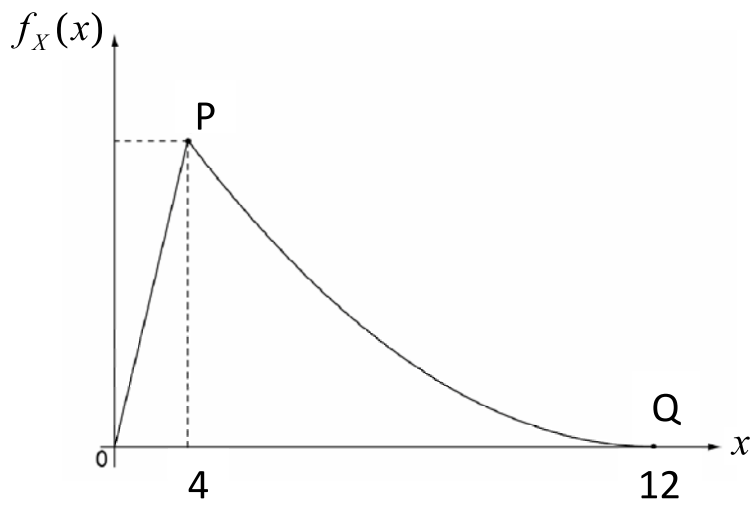
c) Berechne den Mittelwert der Zufallsvariable X .



d) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X > 4)$.

Gruppenaufgabe D.3

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in der Abbildung unten dargestellt. Im Intervall [0, 4] ist die Funktion linear. Im Intervall [4, 12] ist die Funktion parabolisch (Parabel 2. Ordnung), und die x-Achse ist im Punkt Q die Tangente an diese Funktion.



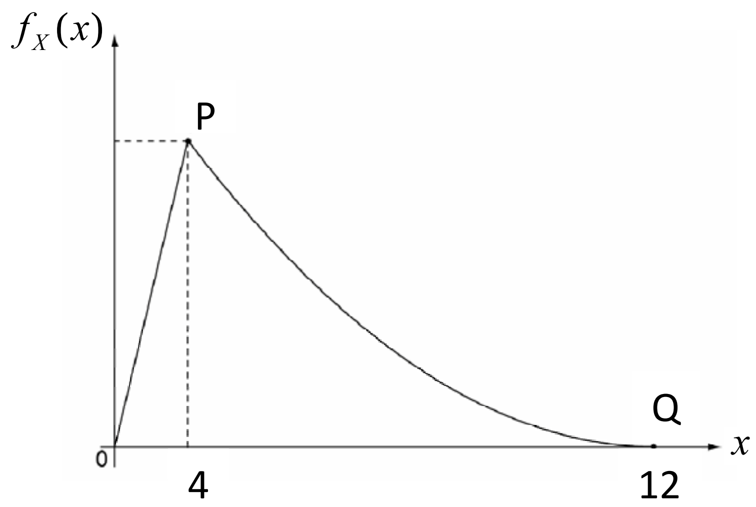
a) Bestimme die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ und beschreibe die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Vorgehensweise:

- Definiere die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Intervall [0,12].
- Ermittle die Koordinaten des Punktes P (Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist immer gleich 1).

Gruppenaufgabe D.3

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in der Abbildung unten dargestellt. Im Intervall [0, 4] ist die Funktion linear. Im Intervall [4, 12] ist die Funktion parabolisch (Parabel 2. Ordnung), und die x-Achse ist im Punkt Q die Tangente an diese Funktion.



b) Ermittle und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X mit einigen charakteristischen Werten in der Abbildung.

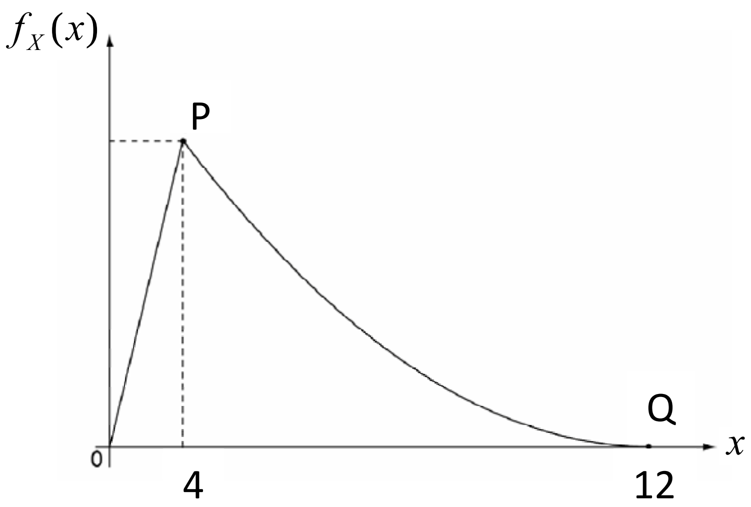
Vorgehensweise:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

2. Zeichne…

Gruppenaufgabe D.3

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in der Abbildung unten dargestellt. Im Intervall [0, 4] ist die Funktion linear. Im Intervall [4, 12] ist die Funktion parabolisch (Parabel 2. Ordnung), und die x-Achse ist im Punkt Q die Tangente an diese Funktion.



c) Berechne den Mittelwert der Zufallsvariable X.

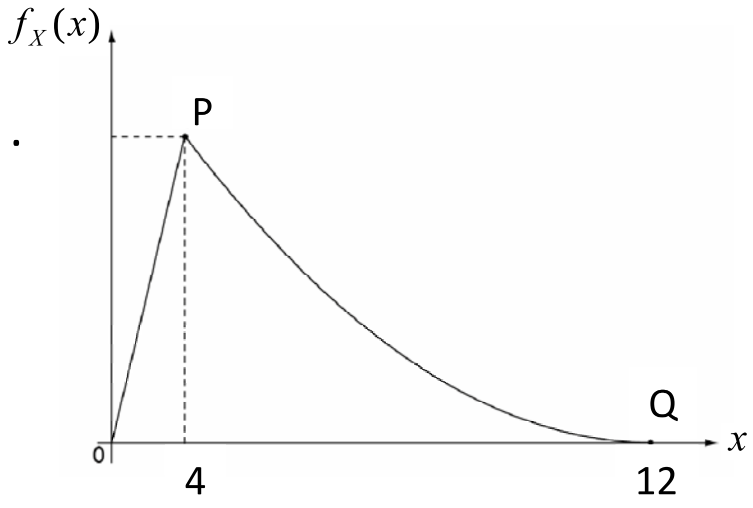
Vorgehensweise:

$$\mu_x = E[X]$$

Gruppenaufgabe D.3

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in der Abbildung unten dargestellt. Im Intervall [0, 4] ist die Funktion linear. Im Intervall [4, 12] ist die Funktion parabolisch (Parabel 2. Ordnung), und die x-Achse ist im Punkt Q die Tangente an diese Funktion.

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X > 4)$.



Vorgehensweise:

Überschreitungswahrscheinlichkeit $P(X > \alpha)$: $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$