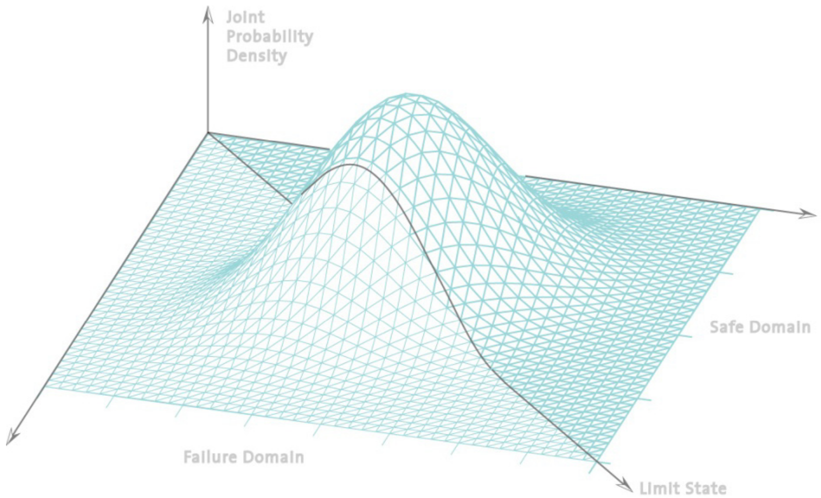


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

2. Übung

Inhalt der heutigen Übung

- Stichprobenraum und Ereignisse
- Unabhängige Ereignisse
- Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes
- Gruppenaufgabe

Aufgabe B.1 a) – Lösung

Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn?

$$P\left[A \cup [B \cap C]\right]$$

$$P[A] + P[B]$$

$$P\left[\overline{A}\right] \cap P[B]$$

$$\overline{P[B]}$$

Aufgabe B.1 a) – Lösung

Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn?

✓ $P\left[A \cup [B \cap C]\right]$

✓ $P[A] + P[B]$

$\cancel{P\left[\overline{A}\right] \cap P[B]}$ — P[ ] ist eine reelle Zahl, während ∩ ein Operator für eine Menge ist.

$\cancel{\overline{P[B]}}$ — P[ ] ist eine reelle Zahl, während ¯ ein Operator für eine Menge ist.

- Es lassen sich keine Schnittmengen für Wahrscheinlichkeiten bilden.
- Komplementärereignisse beschreiben Mengen und keine Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe B.1 b) – Lösung

Mit A, B und C werden Ereignisse bezeichnet. Beschreiben Sie in Worten die folgenden Ausdrücke, und sagen Sie, um was für mathematische Grössen es sich handelt (Zahlen, Vektoren, Funktionen, Mengen, ...).

$$A \cup B$$

$$\overline{B} \cap C$$

$$P[A]$$

$$P\left[[A \cap B \cap C] \cup \left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right]\right]$$

$$\varnothing$$

Aufgabe B.1 b) – Lösung

Mit A, B und C werden Ereignisse bezeichnet. Beschreiben Sie in Worten die folgenden Ausdrücke, und sagen Sie, um was für mathematische Grössen es sich handelt (Zahlen, Vektoren, Funktionen, Mengen, ...).

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \\ \overline{B} \cap C \end{array}\right\} \text{Mengen}$$

$$\left.\begin{array}{l} P[A] \\ P\left[\left[A \cap B \cap C\right] \cup \left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right]\right] \end{array}\right\} \text{Reelle Zahlen, genauer } [0,1]$$

$\varnothing$ Unmögliche Ereignis - Nullmenge

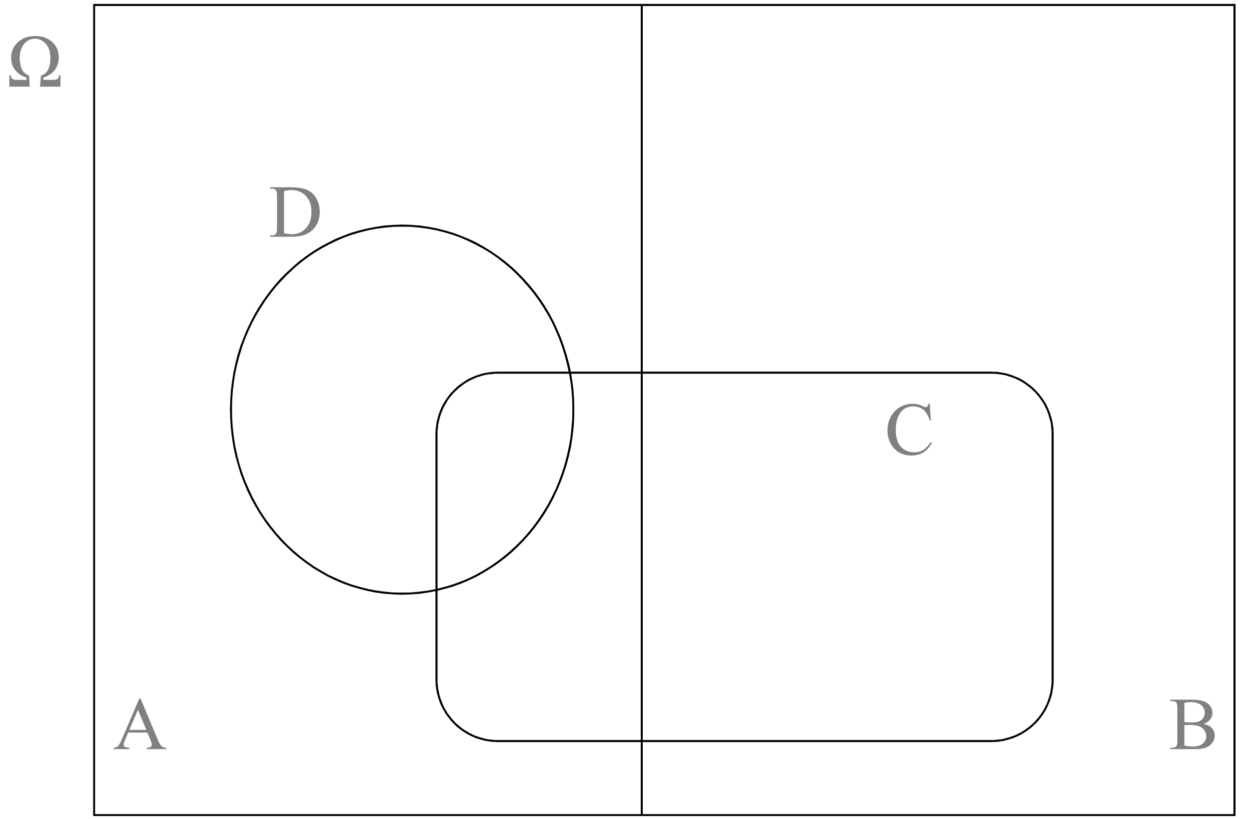
Aufgabe B.1 c)

Stelle die folgende Ereignisse im angegebenen Diagramm dar:

$$C \cap D$$

$$[D \setminus \mathrm{C}] \cup [C \cap A]$$

$$B \cup D$$



Aufgabe B.2

Der Einsturz eines Gebäudes in Tokyo kann durch zwei voneinander unabhängige Ereignisse verursacht werden:

F_1 = ein grosses Erdbeben

F_2 = ein starker Taifun

Die jährlichen Auftretenswahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind:

$$P(F_1) = 0.04$$

$$P(F_2) = 0.08$$

Berechne die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit eines Gebäudes…

Aufgabe B.2 - Lösungsschritte

1. Erkennen der einzelnen Ereignisse:

F_1 = ein grosses Erdbeben

F_2 = ein starker Taifun

2. Was ist gegeben?

$$P(F_1) = 0.04$$

$$P(F_2) = 0.08$$

3. Was ist gesucht?

Jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit

Aufgabe B.2 - Lösungsschritte

1. Erkennen der einzelnen Ereignisse:

F_1 = ein grosses Erdbeben

F_2 = ein starker Taifun

2. Was ist gegeben?

$$P(F_1) = 0.04$$

$$P(F_2) = 0.08$$

3. Jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit:

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = 0.04 + 0.08 - 0.04 \cdot 0.08 = 0.1168$$

unabhängige Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Aber was bedeutet das eigentlich?

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B, wenn A bereits bekannt ist?

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B ohne Vorinformation?

Die Information über das Ereignis A kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B nicht verändern.

Oder die Information A ist nicht nützlich, wenn man etwas über B wissen will.

unabhängige Ereignisse

Warum ist es wichtig, zu wissen, ob Ereignisse unabhängig voneinander sind oder nicht?

Hierzu eine kleine Geschichte, die sich vor ein paar Jahrzehnten ereignete…

Präsidentschaftswahlen – zwei Kandidaten A und B

- Radiosender wollten das Wahlergebnis im Voraus abschätzen.
- Sie befragten per Telefon die Leute nach dem Wählen, wen sie gewählt haben.
- Auf der Grundlage vieler, vieler Befragungen schlossen sie, dass A gewonnen hat.
- Nach der offiziellen Auszählung der Stimmen war jedoch B der Sieger.

unabhängige Ereignisse

Was in Wirklichkeit geschah ist...

- Die Leute, die ein Telefon besassen, waren zu dieser Zeit reich.
- Reiche Leute tendierten dazu, Kandidat A zu wählen.
- Ärmere Leute tendierten dazu, Kandidat B zu wählen.
- Es gab zu dieser Zeit wesentlich mehr arme als reiche Leute.
- Die Fernsehsender machten ihre Umfrage jedoch ausschließlich per Telefon.

Wenn T das Ereignis ist, dass jemand ein Telefon besitzt und
V_A das Ereignis, dass Kandidat A gewählt wird,
was ist dann die Wahrscheinlichkeit von V_A: $P(V_A)$?

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von V_A bei gegebenem T wurde per Telefon ermittelt: $P(V_A \mid T)$

$P(V_A) \neq P(V_A \mid T)$ was bedeutet, dass V_A und T nicht unabhängig sind!

Aufgabe B.3

In einer Alpenregion gibt es 25 sehr hohe Berggipfel. Diese sind das ganze Jahr über mit Schnee bedeckt und es besteht an jedem Tag die gleiche Wahrscheinlichkeit für das Loslösen einer Lawine. Diese beträgt 1/40 pro Tag und Berggipfel.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in dieser Alpenregion an einem Tag zu mindestens zwei Lawinenabgängen kommt?

Annahmen:

- An einem Berggipfel kann sich an einem Tag nur eine Lawine loslösen.
- Die Wahrscheinlichkeiten eines Lawinenabgangs auf verschiedenen Berggipfeln sind voneinander unabhängig.

Aufgabe B.3 - Lösung

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in dieser Alpenregion an einem Tag zu mindestens zwei Lawinenabgängen kommt?

	keine	Lawine	
	1	Lawine	
	2	Lawinen	gesuchte Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit, dass	…		
	…		
	…		
	25	Lawinen	

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1.

Aufgabe B.3 - Lösung

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in dieser Alpenregion an einem Tag zu mindestens zwei Lawinenabgängen kommt?

Zur Lösung dieser Aufgabe ist es am einfachsten, das Komplementärereignis zu berechnen und von 1 (=Summe aller Wahrscheinlichkeiten) abzuziehen.

Es gibt folglich 2 mögliche Ereignisse:

Ereignis A: kein Lawinenabgang in dieser Alpenregion, an einem bestimmten Tag.
→ Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von Ereignis A

Ereignis B: nur 1 Lawine in dieser Alpenregion, an einem bestimmten Tag.
→ Wahrscheinlichkeit $P(B)$ von Ereignis B

Aufgabe B.3 - Lösung

Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von Ereignis A:

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine an einem Berggipfel auftritt

$$P_j(Lawine) = \frac{1}{40} = 0.025, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Wahrscheinlichkeit, dass keine Lawine an einem Berggipfel auftritt

$$P_j(keine\ Lawine) = 1 - (\frac{1}{40}) = 0.975, j = 1, 2, \ldots, n$$

Wahrscheinlichkeit, dass keine Lawine in der Alpenregion auftritt

$$P(A) = (1 - P_1(Lawine)) \cdot (1 - P_2(Lawine)) \cdots (1 - P_{25}(Lawine)) = 0.975^{25} = 0.531$$

Aufgabe B.3 - Lösung

Wahrscheinlichkeit $P(B)$ von Ereignis B:

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine nur an einem und sonst keinem Berggipfel auftritt:

$$P_j(Lawine\ \ nur\ \ am\ Berggipfel\ \ j) = P(Lawine)\cdot(1-P(Lawine))^{24} = 0.025\cdot 0.975^{24} = 0.0136$$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine in der Alpenregion auftritt:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{25} P(Lawine\ nur\ \ an\ Berggipfel\ \ j) = \ 25\cdot 0.0136 = 0.340$$

Aufgabe B.3 - Lösung

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in dieser Alpenregion an einem Tag zu mindestens zwei (>=2) Lawinenabgängen kommt?

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$

$$= 1 - 0.531 - 0.340 = 0.129$$

Satz von Bayes

Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

"Likelihood"

A Priori

folgt $$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

A Posteriori

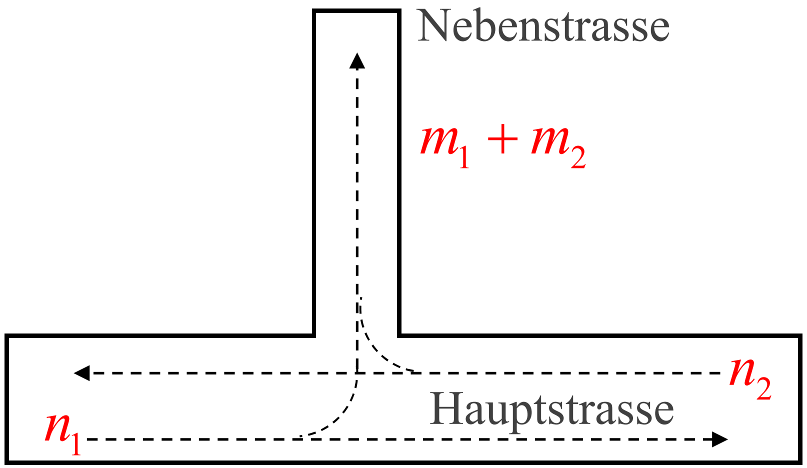
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Reverend Thomas Bayes (1702-1764)

Aufgabe B.4

Die Beobachtung einer Verkehrskreuzung hat gezeigt, dass sich $n_1 = 50$ Fahrzeuge auf der Hauptstrasse in Richtung 1 bewegen. Davon biegen $m_1 = 25$ Fahrzeuge in die Nebenstrasse ab. $n_2 = 200$ Fahrzeuge bewegen sich auf der Hauptstrasse in die entgegengesetzte Richtung 2, wovon $m_2 = 40$ Fahrzeuge in die Nebenstrasse abbiegen.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug, das sich auf der Hauptstrasse bewegt, in die Nebenstrasse abbiegt?

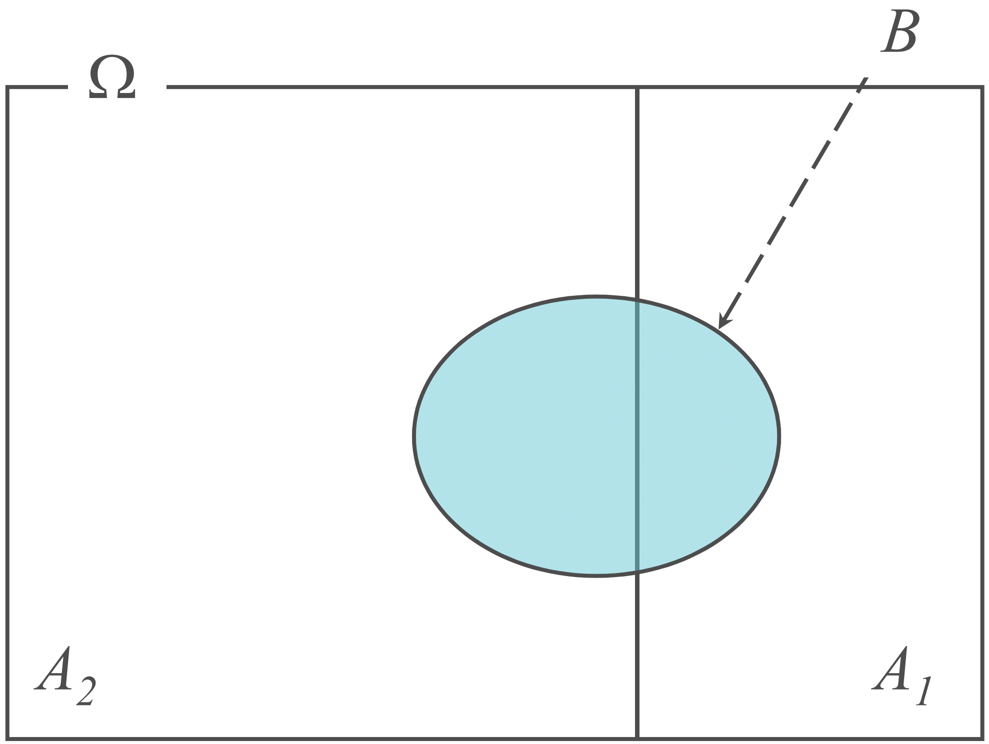


Aufgabe B.4 – Lösung

$n_1 = 50$ Fahrzeuge auf Hauptstrasse in Richtung 1.
$m_1 = 25$ biegen davon in die Nebenstrasse ab.
$n_2 = 200$ Fahrzeuge auf Hauptstrasse in Richtung 2.
$m_2 = 40$ biegen davon in die Nebenstrasse ab.

Das Ereignis, dass ein Fahrzeug auf der Hauptstrasse in Richtung 1 fährt wird, mit A_1 und in Richtung 2 mit A_2 bezeichnet.

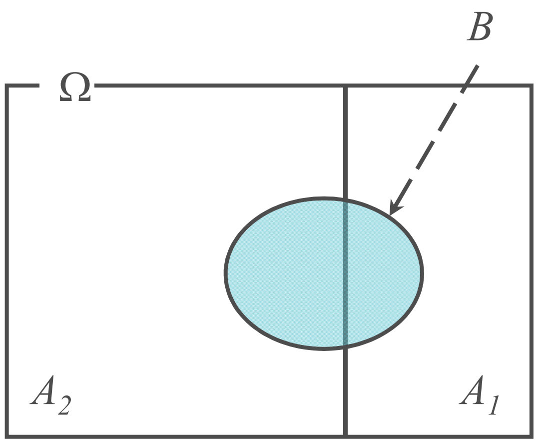
Das Ereignis, dass ein Fahrzeug in die Nebenstrasse abbiegt, wird mit B bezeichnet.



$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$

Aufgabe B.4 – Lösung

$n_1 = 50$ Fahrzeuge auf Hauptstrasse in Richtung 1.
$m_1 = 25$ biegen davon in die Nebenstrasse ab.
$n_2 = 200$ Fahrzeuge auf Hauptstrasse in Richtung 2.
$m_2 = 40$ biegen davon in die Nebenstrasse ab.



$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Fahrzeug in eine bestimmte Richtung bewegt, ist:

$$P(A_1) = \frac{\mathrm{n}_1}{(\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2)} = \frac{50}{(50+200)} = 0.2 \qquad P(A_2) = \frac{\mathrm{n}_2}{(\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2)} = \frac{200}{(50+200)} = 0.8$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug in die Nebenstrasse abbiegt, beträgt:

$$P(B \mid A_1) = \frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{n}_1} = \frac{25}{50} = 0.5 \qquad P(B \mid A_2) = \frac{\mathrm{m}_2}{\mathrm{n}_2} = \frac{40}{200} = 0.2$$

Daraus ergibt sich letztendlich:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) = 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.26$$

Aufgabe B.4 – Lösung

$n_1 = 50$ Fahrzeuge auf Hauptstrasse in Richtung 1.
$m_1 = 25$ biegen davon in die Nebenstrasse ab.
$n_2 = 200$ Fahrzeuge auf Hauptstrasse in Richtung 2.
$m_2 = 40$ biegen davon in die Nebenstrasse ab.

Zum Vergleich … mit der frequentistischen Wahrscheinlichkeits-definition:

Gesamtanzahl der Autos die abbiegen

$$P(B) = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{25 + 40}{50 + 200} = 0.26$$

Gesamtanzahl der Autos, die auf der Hauptstrasse fahren

Dabei ist B das Ereignis, dass ein Fahrzeug, egal aus welcher Richtung, in die Nebenstrasse abbiegt.

Satz von Bayes

Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

folgt $$\underbrace{P(E_i|A)}_{\text{A Posteriori}} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{\overbrace{P(A|E_i)}^{\text{“Likelihood”}}\overbrace{P(E_i)}^{\text{A Priori}}}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Reverend Thomas Bayes (1702-1764)

Aufgabe B.5

Mit einem besonderen Messgerät können Messungen im Labor durchgeführt werden. Aufgrund der hohen Nachfrage werden 20% dieser Geräte im Land A und 80% von ihnen im Land B produziert. Alle produzierten Geräte sind baugleich und werden nach einem einheitlichen Verfahren durch das IAC (Institute for Atmosphere and Climate) getestet. Die Testergebnisse zeigen, dass 5% der Geräte aus Land A ungenau arbeiten, während für Land B diese Ungenauigkeit nur bei 2% der Geräte in Erscheinung tritt.

Eine Studentin führt Messungen mit einem Gerät durch, von dem sie nicht weiss, in welchem Land es hergestellt wurde. Dabei entdeckt sie Messungenauigkeiten.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Messungen mit einem Gerät durchgeführt wurden, das im Land A hergestellt wurde?

Aufgabe B.5 – Lösung

20% hergestellt in Land A.
80% hergestellt in Land B.
5% der Geräte aus Land A sind ungenau.
2% der Geräte aus Land B sind ungenau.

1. Vereinfachen der Aufgabenstellung…

A = Gerät aus Land A
B = Gerät aus Land B
D = ungenaues Gerät

2. Was wissen wir???

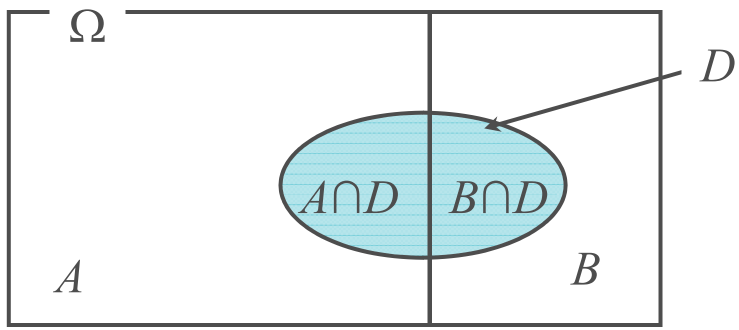
$$P(A) = 0.2 \qquad P(B) = 0.8$$

… und die Wahrscheinlichkeit, ein ungenaues Gerät zu benutzen:

$$P(D \mid A) = 0.05 \qquad P(D \mid B) = 0.02$$

3. Was ist gesucht???

$$P(A \mid D) = ?$$



Aufgabe B.5 – Lösung

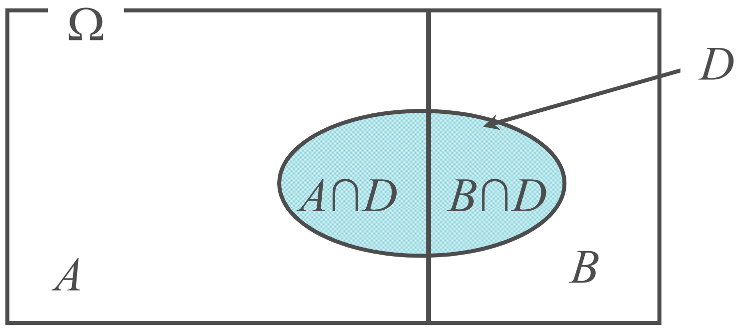
20% hergestellt in Land A.
80% hergestellt in Land B.
5% der Geräte aus Land A sind ungenau.
2% der Geräte aus Land B sind ungenau.

$$P(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.8$$

$$P(D \mid A) = 0.05$$

$$P(D \mid B) = 0.02$$



$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.2 \cdot 0.05 + 0.8 \cdot 0.02} = 0.385$$

Aufgabe B.6

Eine zerstörungsfreie Prüfmethode wird herangezogen, um herauszufinden, ob das Kabel einer Brücke korrodiert ist.

Auf Grund von Experimenten kann man annehmen, dass das Kabel mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% korrodiert ist.

Ist das Kabel korrodiert, so wird dies vom Prüfgerät zuverlässig angezeigt.
Allerdings zeigt dieses Gerät in 10% aller Fälle auch einen Korrosionszustand an, obwohl das Kabel nicht korrodiert ist.

Das zerstörungsfreie Prüfverfahren zeigt Korrosion an - Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass das Kabel tatsächlich korrodiert ist?

Aufgabe B.6 – Lösung

1. Erkennen der einzelnen Ereignisse:

K = Kabel ist korrodiert

I_K = Test indiziert Korrosion

$\bar{K}$ = Kabel ist nicht korrodiert

$I_{\bar{K}}$ = Test indiziert keine Korrosion

2. Was ist gegeben???

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kabel korrodiert ist beträgt 1%

Wenn die Kabel korrodiert ist, wird das immer vom Test angezeigt.

Es gibt eine 10%-ige Wahrscheinlichkeit, dass der Test Korrosion anzeigt, obwohl keine Korrosion vorliegt.

Aufgabe B.6 – Lösung

$$P(K) = 0.01 \qquad P(\bar{K}) = 0.99$$

$$P(I_K \mid K) = 1.00 \qquad P(I_{\bar{K}} \mid K) = 0.00$$

$$P(I_K \mid \bar{K}) = 0.10 \qquad P(I_{\bar{K}} \mid \bar{K}) = 0.90$$

tatsächlicher Zustand	Anzeige	
	I_K	$I_{\bar{K}}$
K		
$\bar{K}$		

Aufgabe B.6 – Lösung

$$P(K) = 0.01 \qquad P(\bar{K}) = 0.99$$

$$P(I_K \mid K) = 1.00 \qquad P(I_{\bar{K}} \mid K) = 0.00$$

$$P(I_K \mid \bar{K}) = 0.10 \qquad P(I_{\bar{K}} \mid \bar{K}) = 0.90$$

tatsächlicher Zustand	Anzeige	
	I_K	$I_{\bar{K}}$
K	1.00 $P(I_K \mid K)$	0 $P(I_{\bar{K}} \mid K)$
$\bar{K}$	0.10 $P(I_K \mid \bar{K})$	0.90 $P(I_{\bar{K}} \mid \bar{K})$

$$P(K \mid I_K) = \frac{P(I_K \mid K) \cdot P(K)}{P(I_K \mid K) \cdot P(K) + P(I_{\bar{K}} \mid \bar{K}) \cdot P(\bar{K})} = \frac{1.00 \cdot 0.01}{1.00 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99} = 0.0917$$

Aufgabe B.7 *Gruppenaufgabe*

Aufgrund von steigendem Trink- und Nutzwasserverbrauchs entstehen Diskussionen über den Grundwasserspiegel. Das Szenario einer Absenkung des Grundwassers soll analysiert werden, wobei angenommen wird, dass diese Absenkung von der Dicke h der Lehmschicht unterhalb des Grundwassers abhängig ist. Diese wird wie folgt klassifiziert:

$$C_1 : 0 \le h \le 20\,cm \qquad C_2 : 20\,cm < h \le 40\,cm \qquad C_3 : 40\,cm < h$$

Ein Geologe schätzt aufgrund seiner Erfahrung, dass die *a priori* Wahrscheinlichkeit der Lehmschichtdicke an einem bestimmten Ort wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$P(C_1) = 0.2 \qquad P(C_2) = 0.47 \qquad P(C_3) = 0.33$$

Aufgabe B.7 *Gruppenaufgabe*

Ein geo-elektrischer Test kann verwendet werden, um die *a priori* Wahrscheinlichkeit zu aktualisieren, obwohl das Testergebnis nicht immer korrekt ist. Die Erfahrungen vergangener Tests zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit einer richtig/falsch Indikation wie in folgender Tabelle gegeben ist:

Klasse der Lehmschichtdicke	Indikation für die Klasse der Lehmschichtdicke		
	I_{C1}	I_{C2}	I_{C3}
C_1	0.84 $P(I_{C1} \mid C_1)$		0.03 $P(I_{C3} \mid C_1)$
C_2	0.09 $P(I_{C1} \mid C_2)$	0.77 $P(I_{C2} \mid C_2)$	
C_3		0.07 $P(I_{C2} \mid C_3)$	0.89 $P(I_{C3} \mid C_3)$

Aufgabe B.7 *Gruppenaufgabe*

sehr viele Informationen… deshalb Vereinfachung hilfreich:

- Die Senkung des Grundwasserspiegels ist abhängig von der Dicke der Lehmschicht h.
- Einstufung der Lehmschicht (Ereignis):

$$C_1 : 0 \leq h \leq 20\,cm \qquad C_2 : 20\,cm < h \leq 40\,cm \qquad C_3 : 40\,cm < h$$

- a priori Wahrscheinlichkeiten (bekannte Wahrscheinlichkeiten):

$$P(C_1) = 0.2 \qquad P(C_2) = 0.47 \qquad P(C_3) = 0.33$$

- Tests werden durchgeführt, um die a priori Wahrscheinlichkeit zu aktualisieren, dabei kann es vorkommen, dass das Testergebnis nicht immer richtig indiziert.
- Wahrscheinlichkeiten von richtig/falschen Anzeigen:
  siehe Tabelle vorherige Folie

Aufgabe B.7 *Gruppenaufgabe*

Was ist gesucht???

a) Vervollständigen der Tabelle:

Klasse der Lehmschichtdicke	Indikation für die Klasse der Lehmschichtdicke		
	I_{C1}	I_{C2}	I_{C3}
C_1	0.84 $P(I_{C1} \mid C_1)$		0.03 $P(I_{C3} \mid C_1)$
C_2	0.09 $P(I_{C1} \mid C_2)$	0.77 $P(I_{C2} \mid C_2)$	
C_3		0.07 $P(I_{C2} \mid C_3)$	0.89 $P(I_{C3} \mid C_3)$

Tipp: $P(I_{C1} \mid C_1) + P(I_{C2} \mid C_1) + P(I_{C3} \mid C_1) = 1$

b) Ein geo-elektrischer Versuch wurde durchgeführt und hat C_3 als Lehmschichtdicke angezeigt.
Was sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass die tatsächliche Lehmschichtdicke C_1, C_2 oder C_3 entspricht?

Tipp: Satz von Bayes, Skript Abschnitt B.5

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!