$$\mathbf{V}_\beta = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 19.11 & 12.30 & 14.83 & 13.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 19.11 \\ 1 & 12.30 \\ 1 & 14.83 \\ 1 & 13.18 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 8.29 & -0.54 \\ -0.54 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$Var\left(\boldsymbol{\beta}\right) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_\beta = 446.25 \begin{pmatrix} 8.29 & -0.54 \\ -0.54 & 0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3'700.4 & -241.6 \\ -241.6 & 16.3 \end{pmatrix}$$

E.5.3 Aktualisieren der Regressionskoeffizienten: A posteriori Model

In dem vorhergehenden Abschnitt wurde die lineare Regression als ein nützliches Hilfsmittel für die probabilistische Modellierung von Beziehungen zwischen Zufallsvariablen vorgestellt. Im Folgenden wird gezeigt, wie das *a priori* Model für die Regressionskoeffizienten β anhand neuer Testresultate aktualisiert werden kann. Es wird angenommen, dass vom *a priori* Modell $\boldsymbol{\beta}'$ und $\mathbf{V}_\beta{}'$ bekannt sind und dass die neuen Testresultate mit $\mathbf{y}$ und $\mathbf{X}$ gegeben sind.

Die Parameter des *a posteriori* Modells lassen sich mit den folgenden Gleichungen ermitteln:

$$\left(\mathbf{V}_\beta{}''\right)^{-1} = \left(\mathbf{V}_\beta{}'\right)^{-1} + \mathbf{X}^T\mathbf{X} \tag{E.45}$$

$$\boldsymbol{\beta}'' = \mathbf{V}_\beta{}'' \left(\left(\mathbf{V}_\beta{}'\right)^{-1} \boldsymbol{\beta}' + \mathbf{X}^T\mathbf{y}\right) \tag{E.46}$$

E.5.4 Beispiel E.4 - Aktualisieren der in Beispiel E.3 bestimmten Regressionskoeffizienten

Aus Beispiel E.3 ist das *a priori* Modell gegeben, welches den Zusammenhang zwischen der Zugfestigkeit $\hat{x}$ und dem Zug-Elastizitätsmodul $\hat{y}$ von Holz beschreibt, mit:

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{pmatrix} 5374.12 \\ 156.27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_\beta{}' = \begin{pmatrix} 8.29 & -0.54 \\ -0.54 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Das *a priori* Model soll nun mit zwei neuen Testresultaten aktualisiert werden.

Zugfestigkeit $\hat{\mathbf{x}}$ $[MPa]$	Zug-Elastizitätsmodul $\hat{\mathbf{y}}$ $[MPa]$
18.04	7581
24.10	9661

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 18.04 \\ 1 & 24.10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7581 \\ 9661 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\beta}'' &= \left((\mathbf{V}_{\beta}')^{-1} + \mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 8.29 & -0.54 \\ -0.54 & 0.04 \end{pmatrix}^{-1} + \mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 4.00 & 59.42 \\ 59.42 & 0.04 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18.04 & 24.10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 18.04 \\ 1 & 24.10 \end{pmatrix}\right]\right)^{-1} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 4.00 & 59.42 \\ 59.42 & 910.12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 42.14 \\ 42.14 & 906.25 \end{pmatrix}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 101.56 \\ 101.56 & 1816 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.11 & -0.17 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}'' &= \mathbf{V}_{\beta}''\left((\mathbf{V}_{\beta}')^{-1}\boldsymbol{\beta}' + \mathbf{X}^T\mathbf{y}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3.11 & -0.17 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 8.29 & -0.54 \\ -0.54 & 0.04 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5374.12 \\ 156.27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18.04 & 24.10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7581 \\ 9661 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 3.11 & -0.17 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 30782 \\ 461554 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17242 \\ 369591 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3.11 & -0.17 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48024 \\ 831159 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4827.58 \\ 187.66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0'' \\ \beta_1'' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit lautet die aktualisierte Regressionsgleichung (Siehe Abbildung E.9):

$$\hat{y}_i = 4827.58 + 187.66x_i + \varepsilon$$