Statistik und Wahrscheinlichkeit

Gruppenaufgabe E1

20.05.2010

Aufgabenstellung E1

Um die Qualität des Betons auf einer Baustelle zu prüfen, wird die Druckfestigkeit des hergestellten Betons getestet.

Erfahrungsgemäss ist bekannt, dass die Druckfestigkeit einer Normalverteilung folgt und die Varianz der Druckfestigkeit für diese Betonsorte 16.36 [MPa^2] ist.

Akzeptanzkriterium für die Qualität des Betons auf der Baustelle ist, dass der Mittelwert des Betons gleich $30 \pm \Delta\,[MPa]$ ist. Dies wird täglich am jeweils hergestellten Beton gemessen. Um die Homogenität der Verarbeitung zu gewährleisten, sind sowohl kleinere wie auch grössere Werte nicht akzeptabel.

Kann die Qualität des Betons akzeptiert werden? Teste die Hypothese jeweils für ein Signifikanzniveau von 10% und 1%.

Berechnung Aufgabe E1

Nummer der Probe (i)	Druckfestigkeit [MPa]
1	24.4
2	26.5
3	27.8
4	29.2
5	39.2
6	37.8
7	35.1
8	30.8
9	30.3
10	39.7
11	38.4
12	33.3
13	33.5
14	28.1
15	34.6

Mittelwert der Stichproben

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{16.36} = 4.0448\ [MPa]$$

Standardabweichung

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 32.58\ [MPa]$$

Gegeben

Varianz: $Var[X] = 16.36\ [MPa^2]$

Mittelwert Beton: $\mu_X = 30\ [MPa]$

Anzahl Proben: $n = 15$

Signifikanzniveau: $\alpha_1 = 0.1$ und $\alpha_2 = 0.01$

Gesucht

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

Berechnung Aufgabe E1

$$\overline{X} = 32.58\ [MPa]$$
$$\sigma_X = 4.0448\ [MPa]$$

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow P\left[-\overbrace{k_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}}^{=\Delta} < \overline{X} - \mu_X < k_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

1. Fall: $\alpha_1 = 0.1$

$$k_{\frac{\alpha_1}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.1}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$$

$$\Rightarrow \underline{k_{\frac{\alpha_1}{2}} \sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.645 \cdot 4.0448 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = \underline{1.718}$$

$$\Rightarrow P\left[-1.718 < \overline{X} - \mu_X < 1.718\right] = 0.9$$

Gegeben

Varianz:	$Var[X] = 16.36\ [MPa^2]$
Mittelwert Beton:	$\mu_X = 30\ [MPa]$
Anzahl Proben:	$n = 15$
Signifikanzniveau:	$\alpha_1 = 0.1$ und $\alpha_2 = 0.01$

Gesucht

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

Berechnung Aufgabe E1

$$\overline{X} = 32.58\ [MPa]$$
$$\sigma_X = 4.0448\ [MPa]$$

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu_X < k_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

1. Fall: $\alpha_1 = 0.1$

$$P\left[-1.718 < \overline{X} - \mu_X < 1.718\right] = 0.9$$

$$\Leftrightarrow P\left[-1.718 + 30 < \overline{X} < 1.718 + 30\right] = 0.9$$

$$\Leftrightarrow P[28.282 < 32.58 < 31.718] = 0.9$$

Die Hypothese ist für ein Signifikanzniveau von 10% nicht akzeptabel, weil der Mittelwert der Probe ausserhalb des Intervalls liegt!

Gegeben

Varianz:	$Var[X] = 16.36\ [MPa^2]$
Mittelwert Beton:	$\mu_X = 30\ [MPa]$
Anzahl Proben:	$n = 15$
Signifikanzniveau:	$\alpha_1 = 0.1$ und $\alpha_2 = 0.01$

Gesucht

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

Berechnung Aufgabe E1

$\overline{X} = 32.58\ [MPa]$
$\sigma_X = 4.0448\ [MPa]$

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \quad \Leftrightarrow P\left[-\underbrace{k_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}}}_{=\Delta} < \overline{X}-\mu_X < k_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

2. Fall: $\alpha_2 = 0.01$

$$k_{\frac{\alpha_2}{2}} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{0.01}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.995) \approx 2.60$$

$$\Longrightarrow \underline{k_{\frac{\alpha_2}{2}}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2.60 \cdot 4.0448 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = \underline{\underline{2.715}}$$

$$\Longrightarrow P\left[-2.715 < \overline{X}-\mu_X < 2.715\right] = 0.99$$

Gegeben

Varianz:	Var[X] = 16.36 [MPa^2]
Mittelwert Beton:	μ_X = 30 [MPa]
Anzahl Proben:	n = 15
Signifikanzniveau:	α_1 = 0.1 und α_2 = 0.01

Gesucht

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

Berechnung Aufgabe E1

$\overline{X} = 32.58\ [MPa]$
$\sigma_X = 4.0448\ [MPa]$

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \quad \Leftrightarrow P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu_X < k_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

2. Fall: $\alpha_1 = 0.01$

$$P\left[-2.715 < \overline{X}-\mu_X < 2.715\right] = 0.99$$

$$\Leftrightarrow P\left[-2.715+30 < \overline{X} < 2.715+30\right] = 0.99$$

$$\Leftrightarrow P[27.285 < 32.58 < 32.715] = 0.99$$

Die Hypothese kann für ein Signifikanzniveau von 1% akzeptiert werden!

Gegeben	
Varianz:	Var[X] = 16.36 [MPa^2]
Mittelwert Beton:	μ_X = 30 [MPa]
Anzahl Proben:	n = 15
Signifikanzniveau:	α_1 = 0.1 und α_2 = 0.01

Gesucht

$$P\left[-k_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$