Aufgabe E.13

Die Betondruckfestigkeit von Probekörpern einer bestimmten Produktion wird als normalverteilt angenommen. Aus früheren Testergebnissen ist der Mittelwert und die Standardabweichung der Druckfestigkeit bekannt. Nach Berücksichtigung der statistischen Unsicherheit ist der Mittelwert der Betondruckfestigkeit ebenfalls normalverteilt (Einheit in *MPa*):

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma'_{\mu_X} = 3\right)$$

Die Standardabweichung wird als bekannt (deterministisch) angenommen:

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Aufgabe E.13

Um die Verteilung des Parameters μ_X zu aktualisieren, wurden 20 Versuchskörper auf ihre Druckfestigkeit geprüft. Die Ergebnisse sind in der Tabelle gegeben.

Bestimme die *a posteriori* Verteilung des Mittelwertes sowie die prädiktive Verteilung der Beton-Druckfestigkeit

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma'_{\mu_X} = 3\right)$$

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Es wird nur die Verteilung des Mittelwertes aktualisiert.

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Durch neue Messungen $\hat{x}$ können wir unsere *A Priori* Wahrscheinlichkeitsdichte für den Mittelwert μ_X aktualisieren – Dazu verwenden wir den Satz von Bayes.

A Posteriori *Likelihood* *A Priori*

$$f''(\boldsymbol{\theta} \mid \hat{x}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \boldsymbol{\theta}) \cdot f'(\boldsymbol{\theta})}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \boldsymbol{\theta}) \cdot f'(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta}} = \frac{L(\boldsymbol{\theta}) \cdot f'(\boldsymbol{\theta})}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X) d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

$$L(\mu_X) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i \mid \mu_X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right)$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X) \, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

$$L(\mu_X) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i \mid \mu_X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right)$$

$$f'(\mu_X) = \frac{1}{\sigma'_{\mu_X} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu'_{\mu_X}}{\sigma'_{\mu_X}} \right)^2 \right)$$

Aktualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wollen wir den Mittelwert μ_X einer Normalverteilung aktualisieren, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f''(\mu_X \mid \hat{\mathbf{x}}) = \frac{f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{\int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X} = \frac{L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)}{f'(\hat{\mathbf{x}})}$$

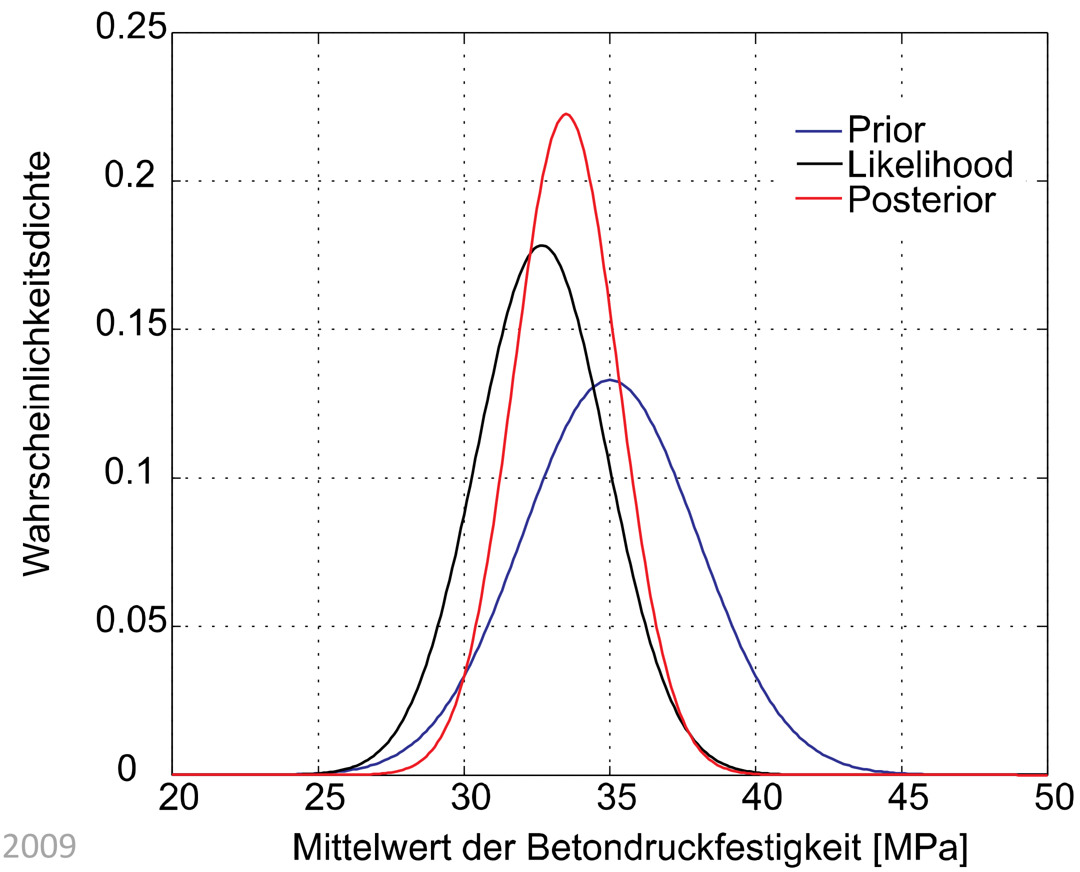
$$L(\mu_X) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i \mid \mu_X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right)$$

$$f'(\mu_X) = \frac{1}{\sigma'_{\mu_X} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu'_{\mu_X}}{\sigma'_{\mu_X}} \right)^2 \right)$$

$$f'(\hat{\mathbf{x}}) = \int f_n(\hat{\mathbf{x}} \mid \mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X = \int L(\mu_X) \cdot f'(\mu_X)\, d\mu_X$$

Aufgabe E.13

In der *a Posteriori* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Mittelwert μ_X sind die Informationen aus der *A priori* Verteilung und der *Likelihood* (den Daten) enthalten.



Aufgabe E.13

Die konjugierte a priori Verteilung für das Aktualisieren des Mittelwertes μ_X einer Normalverteilung bei bekannter Standardabweichung σ_X ist die Normalverteilung.

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Für diesen Fall gibt es eine analytische Lösung!

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aufgabe E.13

Die konjugierte a priori Verteilung für das Aktualisieren des Mittelwertes μ_X einer Normalverteilung bei bekannter Standardabweichung σ_X ist die Normalverteilung.

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

$$\sigma_X = 10 MPa$$

Für diesen Fall gibt es eine analytische Lösung!

$$\overline{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

Nr.	Druck-festigkeit [MPa]	Nr.	Druck-festigkeit [MPa]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$
$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}}$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} \cdot \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$
$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^2_{\mu_X}}$$

Stichprobengewichtung

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} \cdot \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^2_{\mu_X}} = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9} = 11.11$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} \cdot \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665$$

$$n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{35}{20} + \frac{32.665}{11.11}}{\frac{1}{11.11} + \frac{1}{20}} = \underline{\underline{33.499}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^2_{\mu_X}} = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9} = 11.11$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} \cdot \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^2_{\mu_X}}{n}}}$$

Aufgabe E.13

$$\sigma_X = 10 \qquad \bar{x} = 32.665 \qquad n = 20$$

A priori Verteilung für μ_X :

$$\mu_X \sim N\left(\mu'_{\mu_X} = 35, \sigma_{\mu_X}' = 3\right)$$

Parameter der *a posteriori* Verteilung für μ_X :

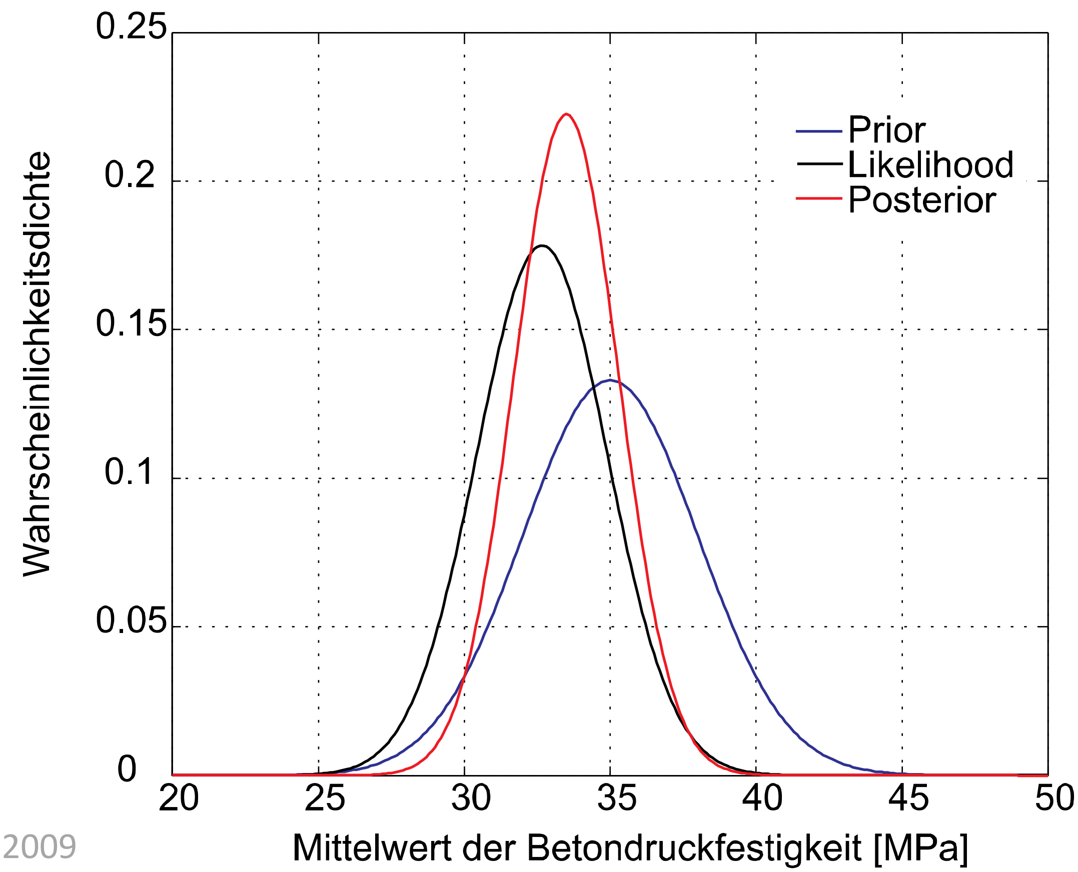
$$\mu_{\mu_X}'' = \frac{\frac{\mu_{\mu_X}'}{n} + \frac{\bar{x}}{n'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{35}{20} + \frac{32.665}{11.11}}{\frac{1}{11.11} + \frac{1}{20}} = \underline{\underline{33.499}}$$

$$n' = \frac{\sigma_X^2}{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}} = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9} = 11.11$$

$$\sigma_{\mu_X}'' = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_X^2}{n'} \cdot \frac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}{\frac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n'} + \frac{\sigma'^{\,2}_{\mu_X}}{n}}} = \sqrt{\frac{\frac{10^2}{11.11} \cdot \frac{3^2}{20}}{\frac{3^2}{11.11} + \frac{3^2}{20}}} = \underline{\underline{1.793}}$$

Aufgabe E.13

In der *A Posteriori* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Mittelwert μ_X sind die Informationen aus der *A priori* Verteilung und der *Likelihood* (den Daten) enthalten.



Aufgabe E.13

Die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung ist die neue Verteilung unserer Zufallsvariablen X nach dem Aktualisieren der Verteilungsparameter:

$$\underbrace{f\left(x|\hat{\mathbf{x}}\right)}_{\substack{\text{Prädiktive}\\ \text{Dichte}}} = \int \underbrace{f_X\left(x\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)}_{\substack{\text{Dichte bei}\\ \text{gegebenen}\\ \text{Parametern}}} \cdot \underbrace{f''\left(\boldsymbol{\theta}\,|\,\hat{\mathbf{x}}\right)}_{\substack{\text{A posteriori}\\ \text{Verteilung}\\ \text{der Paramter}}} d\boldsymbol{\theta}$$

$$f\left(x|\hat{\mathbf{x}}\right) = \int f_X\left(x\,|\,\mu_X,\sigma_X\right) \cdot f''\left(\mu_X\,|\,\hat{\mathbf{x}}\right) d\mu_X$$

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x\middle|\hat{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma''_{\mu_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu''_{\mu_X}}{\sigma''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X \sim N(\mu'', \sigma'')$$

A posteriori
Mittelwert

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x \middle| \hat{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'''_{\mu_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu'''_{\mu_X}}{\sigma'''_{\mu_X}}\right)^2 \right)$$

$$X \sim N(\mu''', \sigma''') \qquad \sigma'''^2 = \sigma''^2_{\mu_X} + \sigma_X^2$$

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x\middle|\hat{\mathbf{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'''_{\mu_X}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu'''_{\mu_X}}{\sigma'''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X\sim N(\mu''',\sigma''')$$

$$\sigma'''^2=\underbrace{\sigma''^2_{\mu_X}}_{\text{Streuung des Mittelwerts}}+\underbrace{\sigma^2_X}_{\text{Streuung um den Mittelwert}}$$

$$\mu'''=\mu''$$

Aufgabe E.13

In unserem Beispiel ist die (a posteriori) *prädiktive* Verteilung wiederum eine Normalverteilung:

$$f_X\left(x|\hat{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'''_{\mu_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu'''_{\mu_X}}{\sigma'''_{\mu_X}}\right)^2\right)$$

$$X \sim N(\mu''', \sigma''')$$

$$\sigma'''^2 = \sigma''^2_{\mu_X} + \sigma_X^2$$

$$= 1.793^2 + 10^2 = 103.214$$

$$\longrightarrow \sigma''' = 10.159 MPa$$

$$\mu''' = 33.499 MPa$$