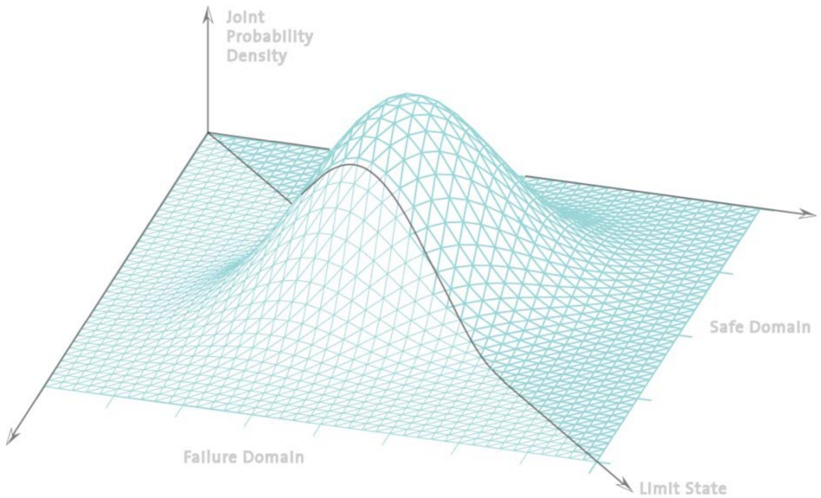


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 6

1. Teilprüfung am Donnerstag, 10. April

Ort und Zeit:

- Start 8:15, Ende 9:45; Dauer: 90 Minuten.
- Studierende **A - Ky** im **HCI G 3**
- Studierende **La - Z** im **HIL E 4**

Erlaubte Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt, auch programmierbare.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

Hinweise:

- Jede Studentin/jeder Student erhält ein Couvert mit seinem Namen, darin enthalten sind die Aufgabenblätter und ein kariertes + gestempeltes Blatt für die Lösung der Rechenaufgabe.
- Legi mitnehmen!
- Falls vor 9:15 fertig: dürft ihr euch melden und hinausgehen.
- Danach müsst ihr bis zum Prüfungsende (9:45) sitzen bleiben.

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

Autobahnbrücken müssen während ihrer Lebensdauer gewartet werden. Die Zeitdauer T zwischen den Wartungseinheiten folgt einer Exponentialverteilung mit einem Mittelwert von 10 Jahren . Die Wartungsarbeiten nehmen einen Zeitraum S in Anspruch, der ebenfalls exponentiell verteilt ist und einen Mittelwert von 1/12 Jahren aufweist.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, $Z=S+T$.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

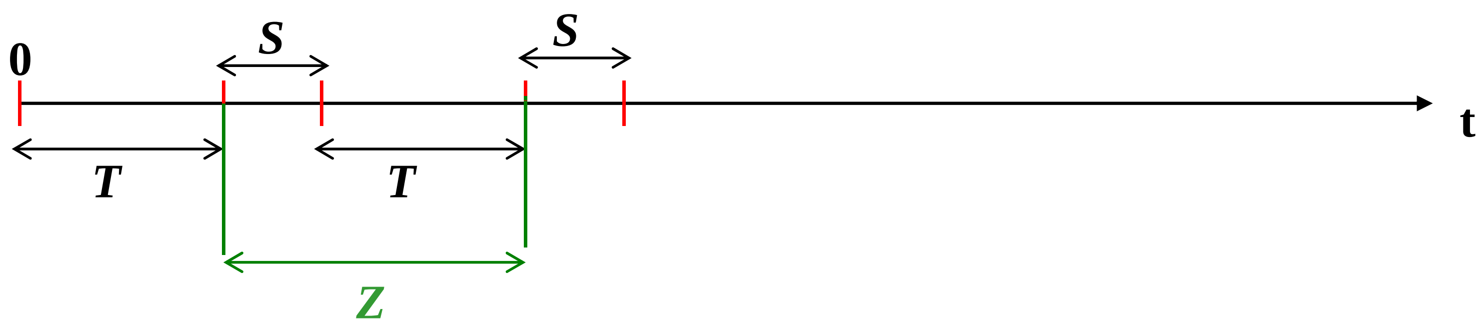
c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

Zeit in der keine Wartungseinheit notwendig ist T: exponentiell verteilt

Zeit der Wartungseinheit S: exponentiell verteilt

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, z.B. $Z=S+T$.



Im Falle der kontinuierlichen Zufallsvariable: $Z=X+Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, $Z=S+T$.
Z ist dabei definiert innerhalb des Intervalls $[0;z]$.

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}} \quad ,(t \geq 0)$$

$$f_S(s) = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-s}{\mu_S}} = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}} \quad ,(s \geq 0)$$

vgl. Tabelle D1 im Skript

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}} \ ;$$

$$f_S(s) = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}}$$

Berechnung des Faltungsintegrals

$$f_Z(z) = \int_0^z f_T(t) f_S(z-t) dt$$

$$= \int_0^z \left(\frac{1}{\mu_T} e^{\frac{-t}{\mu_T}} \right) \left(\frac{1}{\mu_S} e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}} \right) dt$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(-\left(\frac{1}{\mu_T} - \frac{1}{\mu_S} \right) t - \frac{z}{\mu_S} \right)} dt$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S + \mu_T}{\mu_T \mu_S} \right) t - \frac{z}{\mu_S} \right)} dt$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

Berechnung des Faltungsintegrals

$$f_Z(z) = \int_0^z f_T(t) f_S(z-t)\,dt$$

$$= \int_0^z \left(\frac{1}{\mu_T} e^{\frac{-t}{\mu_T}}\right)\left(\frac{1}{\mu_S} e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}}\right) dt$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(-\left(\frac{1}{\mu_T} - \frac{1}{\mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S + \mu_T}{\mu_T \mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$f_Z(z) = \left[\frac{1}{\cancel{\mu_T \mu_S}} \cdot \boxed{\frac{\cancel{\mu_T \mu_S}}{-\mu_S + \mu_T}} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S + \mu_T}{\mu_T \mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} \right]_0^z$$

$$= \left[\frac{1}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(\frac{-\mu_S + \mu_T}{\mu_T \mu_S} z - \frac{z}{\mu_S}\right)} - \frac{1}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(-\frac{z}{\mu_S}\right)} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(e^{\left(\frac{-z\mu_S}{\mu_T \mu_S} + \frac{z\mu_T}{\mu_T \mu_S} - \frac{z}{\mu_S}\right)} - e^{\left(-\frac{z}{\mu_S}\right)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}} \right)$$

$$\mu_T = 10,\ \mu_S = \frac{1}{12} \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\mu_T - \mu_S}\left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}}\right) = \frac{1}{10 - \frac{1}{12}}\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right) = \underline{\underline{0.1008\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right)}}$$

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

Hierfür braucht man die kumulative Verteilungsfunktion von: $f_Z(z) = 0.1008\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right)$

$$F_Z(z) = \int_0^z 0.1008\left(e^{-\frac{y}{10}} - e^{-12y}\right)dy$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$= 0.1008\left[-10e^{-\frac{y}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12y}\right]_0^z$$

$$= 0.1008\left[-10e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12z} - (-10 + \frac{1}{12})\right]$$

$$= 0.1008\left(9.9167 - 10e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_Z(5) = 0.1008\left(9.9167 - 10e^{-\frac{5}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12\cdot 5}\right) = 0.389$$

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

„Keine Wartungsarbeiten in den nächsten 5 Jahren“ $E:\{T_1>5\}\cap\{T_2>5\}$

$$P[T_1>5,T_2>5]=P[T_1>5]P[T_2>5]=\left(P[T>5]\right)^2=\left(1-P[T\le 5]\right)^2$$

$$F_T(t)=1-e^{-\frac{1}{\mu_T}t}=1-e^{-0.1t}$$

vergleiche Skript, Tabelle D.1

$$P[T_1>5,T_2>5]=\left(1-P[T\le 5]\right)^2=(1-(1-e^{-0.1\cdot 5}))^2=0.368$$

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

$$F_T(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu_T}t} = 1 - e^{-0.1t}$$

vergleiche Skript, Tabelle D.1

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} e^{\frac{-t}{\mu_T}}; \mu_T = 10$$

$$F_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \int_0^t e^{\frac{-y}{\mu_T}} dy$$

$$= \frac{1}{\mu_T} \left[-\mu_t e^{\frac{-y}{\mu_T}} \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{\mu_T} \left[-\mu_t e^{\frac{-t}{\mu_T}} - (-\mu_t e^0) \right]$$

$$= 0.1(-10 e^{\frac{-t}{10}} + 10)$$

$$= 1 - e^{\frac{-t}{10}} = 1 - e^{-0.1t}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man durch Integration.

Aufgabe 6.1

Es seien $\{X_i\}_{1 \leq i \leq 50}$ unabhängige und <u>normalverteilte</u> Zufallsvariablen mit Mittelwert $\mu = 1$ und Standardabweichung $\sigma = 2$. Darüber hinaus sind folgende Zufallsvariablen definiert:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{und} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \frac{S_n}{n}$$

dabei ist $n = 50$.

Bestimme zuerst die Parameter der Normalverteilungen von S_n sowie $\bar{X}_n$ und berechne dann:

a) $P\left(E\left[X_1\right] - 1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right] + 1\right)$

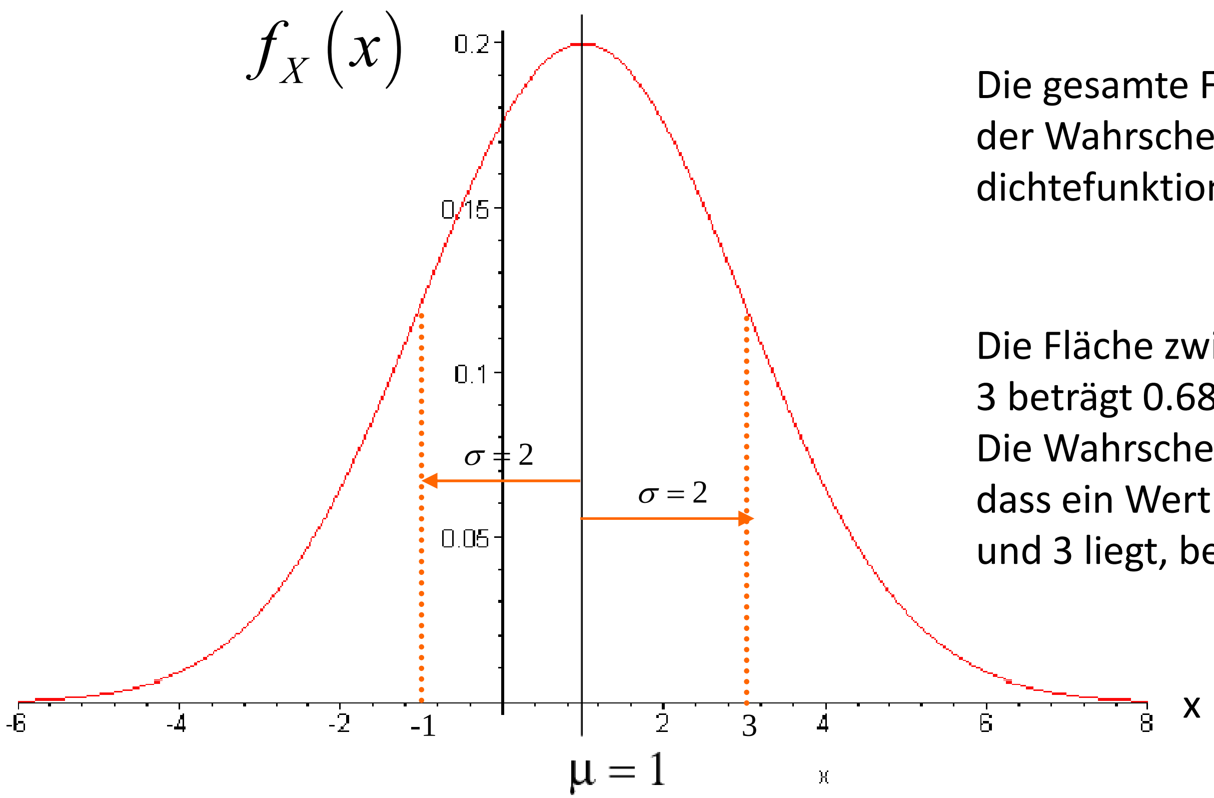
b) $P\left(E\left[S_n\right] - 1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right] + 1\right)$

c) $P\left(E\left[\bar{X}_n\right] - 1 \leq \bar{X}_n \leq E\left[\bar{X}_n\right] + 1\right)$

Aufgabe 6.1

Was ist gegeben?

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung mit Mittelwert = 1 und Standardabweichung = 2:



Die gesamte Fläche unter der Wahrscheinlichkeits-dichtefunktion beträgt 1.

Die Fläche zwischen -1 und 3 beträgt 0.68.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert zwischen -1 und 3 liegt, beträgt 0.68.

Aufgabe 6.1

Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung von S_n

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

MERKE: Die Summe von normalverteilten Zufallsvariablen ist auch normalverteilt!

Wir erinnern uns:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$ (bei Unabhängigkeit)

$$\mu_{S_n} = E[S_n] = \boxed{}$$

$$\sigma_{S_n}{}^2 = Var[S_n] = \boxed{}$$

$$N(\mu_{S_n}, \sigma_{S_n}) = N(\ldots, \ldots)$$

Aufgabe 6.1

Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung von S_n

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$\mu_{S_n} = E[S_n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\mu = 50$$

$$\sigma_{S_n}{}^2 = Var[S_n] = Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n\sigma^2 = 200$$

$$\Rightarrow \quad N(\mu_{S_n}, \sigma_{S_n}) = N(50, \sqrt{200})$$

Aufgabe 6.1

Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung von $\overline{X}_n$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \frac{S_n}{n}$$

$$\mu_{\overline{X}_n} = E\left[\overline{X}_n\right] = E[\frac{1}{n}S_n] = \frac{1}{n}E[S_n] = \frac{1}{n}\mu_{S_n} = \frac{50}{50} = 1$$

$$\sigma_{\overline{X}_n}{}^2 = Var\left[\overline{X}_n\right] = Var\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n^2}Var[S_n] = \frac{1}{n^2}\sigma_{S_n}{}^2 = \frac{200}{50^2} = 0.08$$

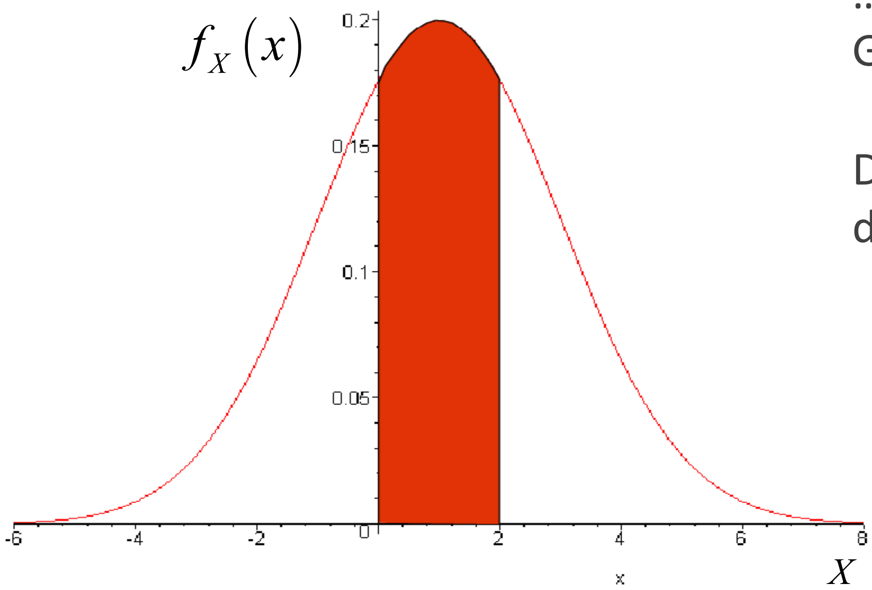
$$\Rightarrow \quad N(\mu_{\overline{X}_n}, \sigma_{\overline{X}_n}) = N(1, \sqrt{0.08})$$

Aufgabe 6.1

a) Berechne $P\left(E[X_1]-1 \le X_1 \le E[X_1]+1\right) = P\left(0 \le X_1 \le 2\right)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}\right)dx$$



$\mu = 1 \qquad \sigma = 2$

… durch Einsetzen von μ und σ in die Gleichung.

Die Wahrscheinlichkeit erhält man dann durch Integration…

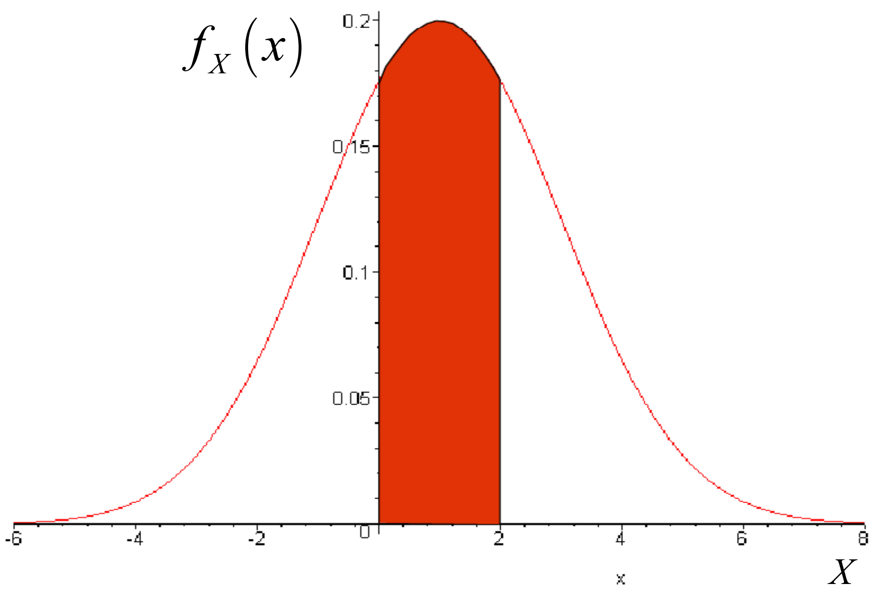
Aufgabe 6.1

a) Berechne $P\left(E[X_1]-1 \le X_1 \le E[X_1]+1\right) = P\left(0 \le X_1 \le 2\right)$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}\right) dx$$

vergl. Skript Tabelle D-1

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



$\mu = 1 \qquad \sigma = 2$

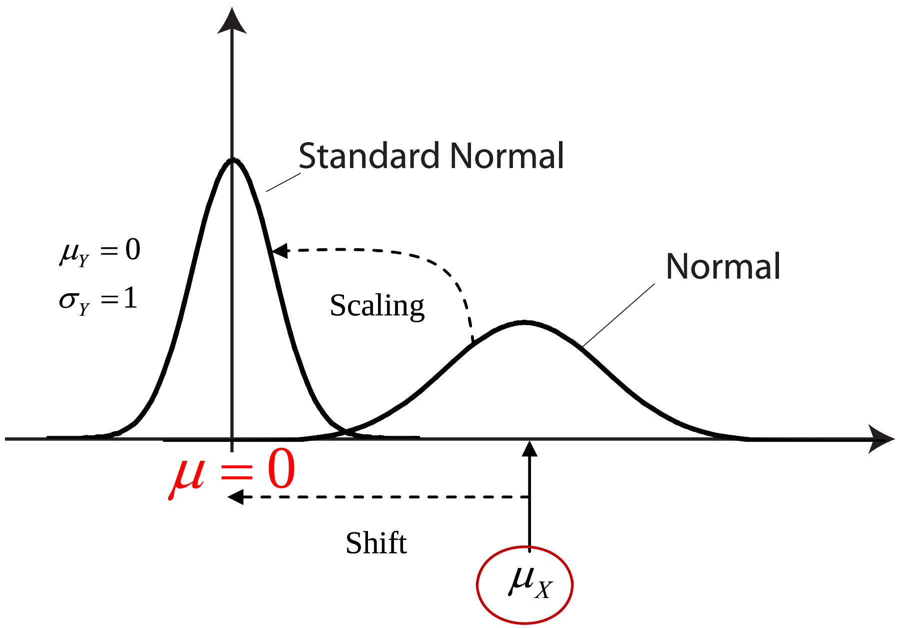
… mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstabelle.

Um diese Wahrscheinlichkeitstabelle anwenden zu können, muss die Zufallsvariable zuerst standardisiert werden.

Standardisierung

Wie geht man vor, um zu Standardisieren?

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$



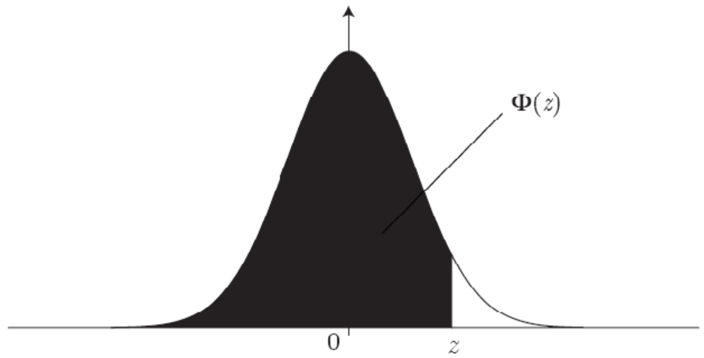
$$E[Z] = E[\frac{X_1 - \mu}{\sigma}] = \frac{E[X_1] - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

$$Var[Z] = Var[\frac{X_1 - \mu}{\sigma}] = \frac{1}{\sigma^2} Var[X_1 - \mu]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} Var[X_1] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$\Phi(z)$ ist die kumulierte Verteilungsfunktion für die Standard-normalverteilte Zufallsvariable $N(0,1^2)$.

Verwendung der Φ-Tabelle



Probability density function of the standard normal random variable.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793

Standardisierung

Wie geht man vor, um zu Standardisieren?

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

$$P\left(E\left[X_1\right]-1 \le X_1 \le E\left[X_1\right]+1\right) = P[0 \le X_1 \le 2]$$

$$= P[0-1 \le X_1 - 1 \le 2-1]$$

← Mittelwert von $\mu = 1$

$$= P[\frac{0-1}{2} \le \frac{X_1 - 1}{2} \le \frac{2-1}{2}]$$

← Standardabweichung von $\sigma = 2$

$$= P[-\frac{1}{2} \le \frac{X_1 - 1}{2} \le \frac{1}{2}]$$

$$= P[-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}]$$

$$= \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2})$$

Aufgabe 6.1

$$P\left(E[X_1]-1 \le X_1 \le E[X_1]+1\right)$$

$$= \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2})$$

Wo ist $\Phi(-0.5)$ in der Tabelle?

Weil … $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

so dass $\Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5)$

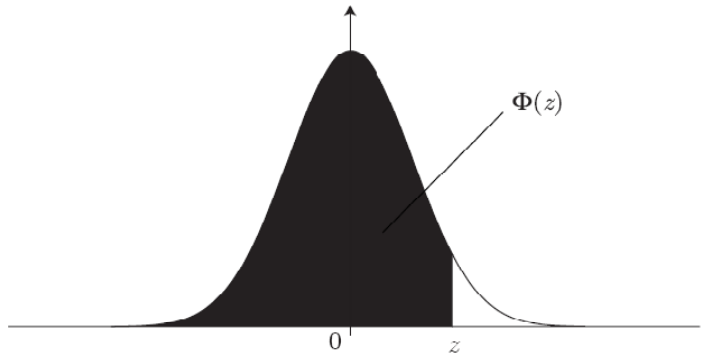
$$= 1 - 0.6915$$

$$= 0.3085$$

folgt das Ergebnis…

$$P\left(E[X_1]-1 \le X_1 \le E[X_1]+1\right)$$

$$= 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$$



Probability density function of the standard normal random variable.

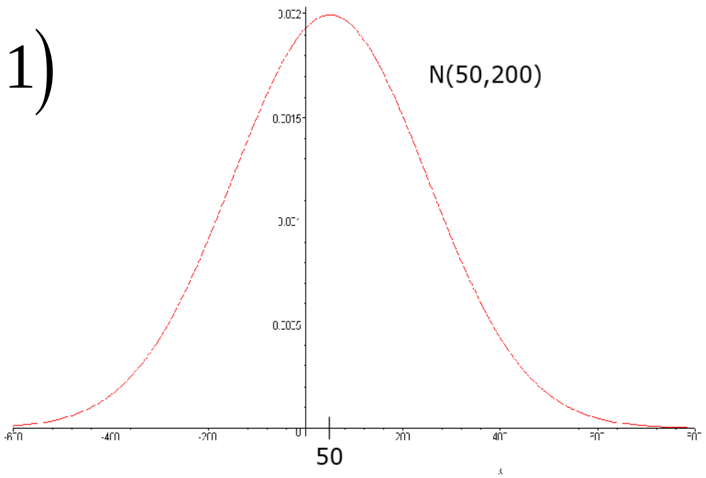
z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793

Tabelle T.1 in Annex T des Vorlesungsskripts

Aufgabe 6.1

b) Berechne $P\left(E\left[S_n\right]-1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right]+1\right)$

→ *gleiche Vorgehensweise:*



$$P\left(E\left[S_n\right]-1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right]+1\right)$$

$$= P[\ldots\ldots\ldots \leq S_n \leq \ldots\ldots\ldots]$$

$$= P[\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$= \Phi(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) - \Phi(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=$$

1. Finde die standardisierte Form $Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$
2. Finde die Werte in der Tabelle
3. Subtrahiere $\Phi_b - \Phi_a$

Aufgabe 6.1

b) Berechne $P\left(E\left[S_n\right]-1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right]+1\right)$

→ gleiche Vorgehensweise:

$$
\begin{aligned}
&P\left(E\left[S_n\right]-1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right]+1\right) \\
&= P[49 \leq S_n \leq 51] \\
&= P\left[\frac{49-50}{\sqrt{200}} \leq \frac{S_n-50}{\sqrt{200}} \leq \frac{51-50}{\sqrt{200}}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{200}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{200}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{200}}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{200}}\right)\right) \\
&= 2\cdot\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{200}}\right) - 1 = 2\cdot\Phi(0.07) - 1 \\
&= 2\cdot 0.53 - 1 = 0.06
\end{aligned}
$$

$$Z = \frac{S_n - \mu}{\sigma}$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi($
0.00	0.5000	0.50	0.69
0.01	0.5040	0.51	0.695
0.02	0.5080	0.52	0.698
0.03	0.5120	0.53	0.70
0.04	0.5160	0.54	0.705
0.05	0.5199	0.55	0.708
0.06	0.5239	0.56	0.71
0.07	0.5279	0.57	0.715
0.08	0.5319	0.58	0.71
0.09	0.5359	0.59	0.72
0.10	0.5398	0.60	0.725
0.11	0.5438	0.61	0.72
0.12	0.5478	0.62	0.73
0.13	0.5517	0.63	0.73

Aufgabe 6.1

$$E\left[\overline{X}_n\right]=1$$

$$Var\left[\overline{X}_n\right]=0.08$$

c) Berechne $P\left(E\left[\overline{X}_n\right]-1\leq \overline{X}_n \leq E\left[\overline{X}_n\right]+1\right)$

→ *gleiche Vorgehensweise:*

$$P\left(E\left[\overline{X}_n\right]-1\leq \overline{X}_n \leq E\left[\overline{X}_n\right]+1\right)=P\left(0\leq \overline{X}_n \leq 2\right)$$

$$=P\left(\frac{0-1}{\sqrt{0.08}}\leq Z\leq \frac{2-1}{\sqrt{0.08}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.08}}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{0.08}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.08}}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.08}}\right)\right)$$

$$=2\cdot\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.08}}\right)-1=2\cdot\Phi(3.5)-1$$

$$=2\cdot 0.9998-1=0.9996$$

z)	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
15	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
50	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
85	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
19	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
54	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
88	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
23	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
57	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
90	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
24	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
57	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
91	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
24	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
57	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
89	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
22	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
54	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
86	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
17	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277

Aufgabe 6.2

Die Hochwasserentlastungsanlage eines Rückhaltebeckens ist auf ein 1000-jähriges Hochwasser Q_B bemessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm wie folgt überflutet wird:

a. Während eines 10-Jahre-Zeitraums im 10-ten Jahr genau einmal?

b. Während eines 10-Jahre-Zeitraums irgendwann zweimal?

c. Während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht?

d. Während eines 10-Jahre-Zeitraums höchstens einmal?

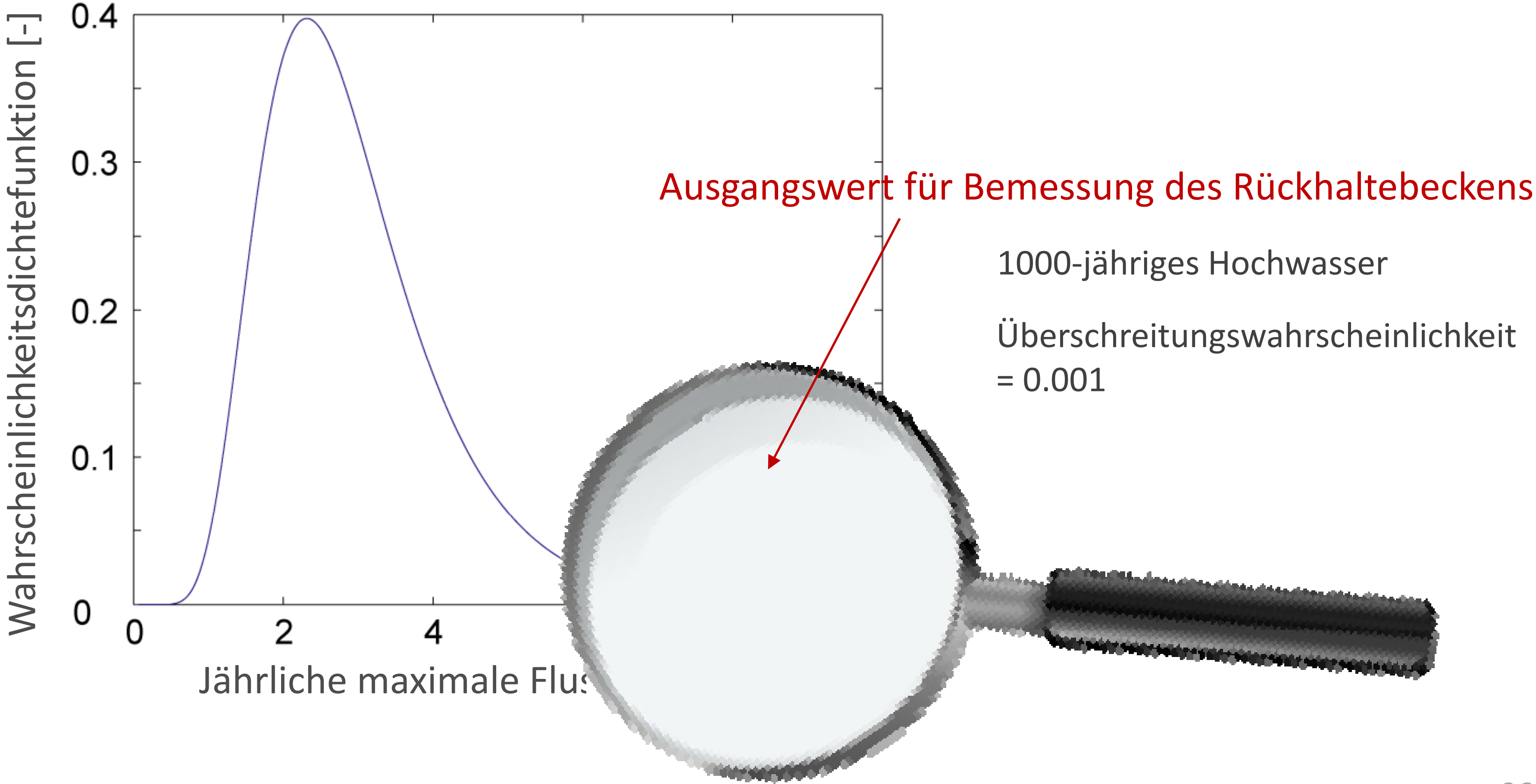
e. Während eines 100-Jahre-Zeitraums insgesamt 10-mal?

f. Während eines 1000-Jahre-Zeitraums einmal oder öfter?

Beachte: Es wird angenommen,
dass das Hochwasserereignis einmal pro Jahr auftritt.

Aufgabe 6.2

Wiederkehrperiode T:



1000-jähriges Hochwasser

Überschreitungswahrscheinlichkeit = 0.001

Aufgabe 6.2

Wiederkehrperiode T:

Jährliche Überschreitungswahrscheinlichkeit ist p $(= 1/T)$.

Zufallsvariable $N =$ Zeit bis ein Hochwasser das erste mal auftritt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Hochwasser im n-*ten* Jahr gibt, entspricht

$$P[N = n] = \underbrace{(1-p)(1-p)...(1-p)}_{n-1}\, p \longleftarrow \text{Geometrische Verteilung}$$

$$= (1-p)^{n-1}\, p$$

Erwartungswert von N, $E[N]$ ist

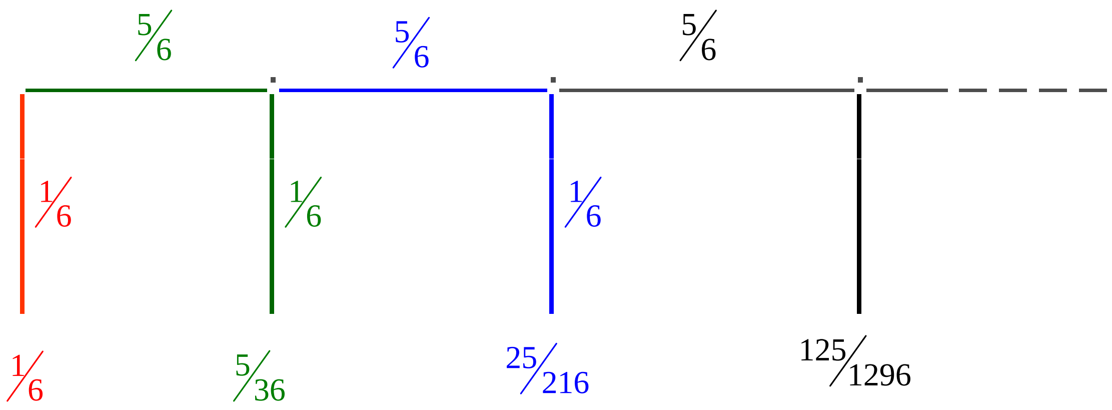
$$E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[N = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}\, p = \frac{1}{p} = T$$

Aufgabe 6.2

Die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Hochwasser im n-*ten* Jahr gibt, entspricht

$$P[N=n] = \underbrace{(1-p)(1-p)\ldots(1-p)}_{n-1}\,p \quad \longleftarrow \text{Geometrische Verteilung}$$
$$= (1-p)^{n-1}\,p$$

Ein einfaches Bsp. einer geometrischen Verteilung:
Die Wahrscheinlichkeit eine “5” beim Würfeln zu bekommen



$$P[N=1] = 1/6$$

$$P[N=2] = (1-1/6)\cdot 1/6$$

$$P[N=3] = \underbrace{(1-1/6)(1-1/6)}_{t-1}\cdot 1/6$$
$$= (1-1/6)^{3-1}\cdot 1/6$$

Aufgabe 6.2

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums genau im 10-ten Jahr überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es im n. Jahr zum Hochwasser kommt

$$P[N = n] = \underbrace{(1-p)(1-p)...(1-p)}_{n-1}\, p \quad \longleftarrow$$

Geometrische Verteilung

$$= (1-p)^{n-1}\, p$$

Das Ereignis Überflutung im 10. Jahr während eines 10-Jahre-Zeitraums kann demnach wie folgt beschrieben werden:

$$P(H_{\text{Überflutung},1}) = (p)\cdot(1-p)^{n-1} = (0.001)\cdot(0.999)^{9} = 0.000991$$

Aufgabe 6.2

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums insgesamt zweimal überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu zwei Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

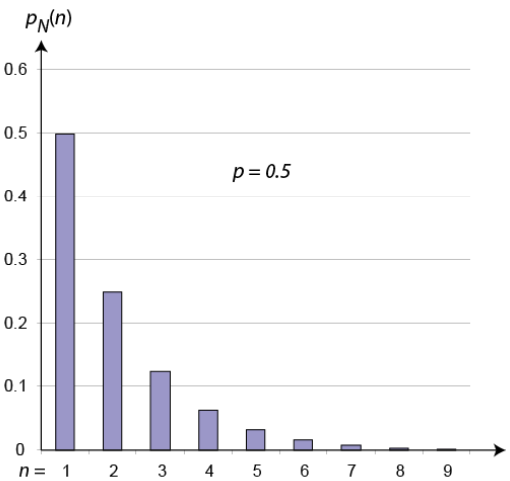
$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$$

Entsprechend der Binomialverteilung erhält man:

$$P(H_{Überflutung,2}) = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} (p)^2 \cdot (1-p)^{10-2} = 45 \cdot (0.001)^2 \cdot (0.999)^8 = 0.000045$$

Wiederholung

Geometrische Verteilung
Zeit bis zum ersten Treffer

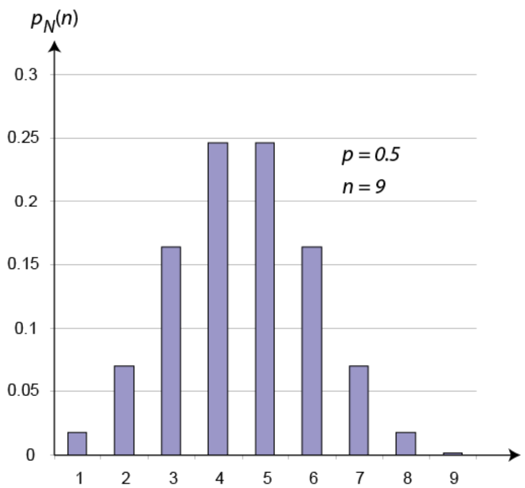


$$P[T=t]=(1-p)^{t-1}p$$

$$E[T]=\frac{1}{p}$$

$$Var[T]=\frac{1-p}{p^2}$$

Binomialverteilung
Anzahl der Treffer



$$P[N=y]=\binom{n}{y}(1-p)^{n-y}p^y$$

$$E[N]=np$$

$$Var[N]=np(1-p)$$

Aufgabe 6.2

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu null Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$$

Entsprechend der Binomialverteilung erhält man:

$$P(H_{\ddot{U}berflutung,0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} (p)^0 \cdot (1-p)^{10-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{10} = 0.99$$

Aufgabe 6.2

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums höchstens einmal überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu null oder ein Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P(H_{\max,1}) = P(H_{\ddot{U}berflutung,0}) + P(H_{\ddot{U}berflutung,1})$$

$$P(H_{\ddot{U}berflutung,0}) = \frac{10!}{0!\cdot(10-0)!}(p)^0(1-p)^{10-0}$$

$$P(H_{\ddot{U}berflutung,1}) = \frac{10!}{1!\cdot(10-1)!}(p)^1(1-p)^{10-1}$$

$$P(H_{\max,1}) = P(H_{\ddot{U}berflutung,0}) + P(H_{\ddot{U}berflutung,1}) = 0.99004 + 0.00991 = 0.99995$$

Aufgabe 6.2

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines **100**-Jahre-Zeitraums insgesamt 10 mal überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 100 Jahren (n Versuche) zu 10 Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P(H_{Überflutung,10}) = \frac{100!}{10!(100-10)!}(p)^{10} \cdot (1-p)^{100-10}$$

Aufgabe 6.2

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines **1000**-Jahre-Zeitraums einmal oder öfters überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 1000 Jahren (n Versuche) zu einer oder mehrerer Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

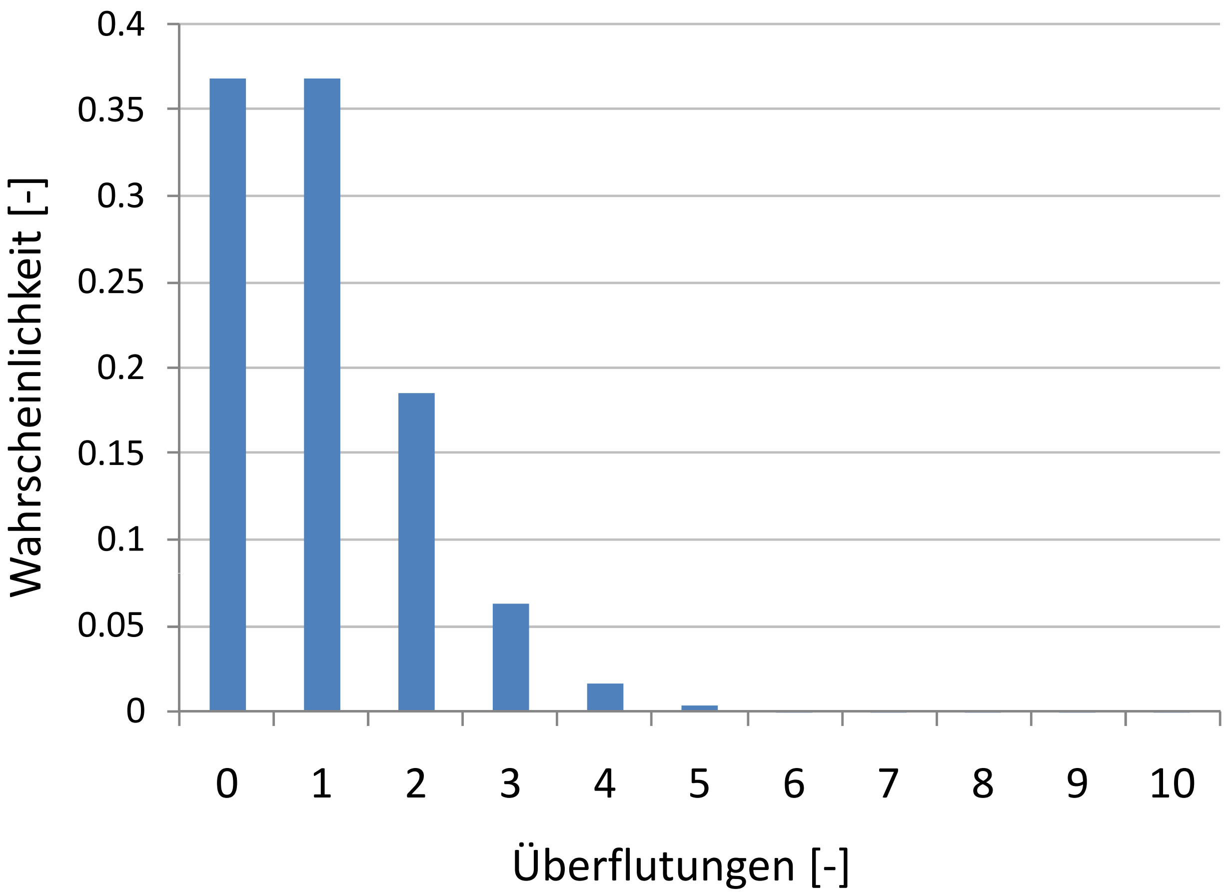
$$P(H_{\ddot{U}berflutung,0}) = \frac{1000!}{0!(1000-0)!}(p)^0 \cdot (1-p)^{1000-0} = (0.001)^0 (0.999)^{1000} = 0.368$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses:

$$P(H_{\ddot{U}berflutung,\geq 1}) = 1 - 0.368 = 0.632$$

Aufgabe 6.2

Binomialverteilung von 0 bis 10 Überflutungen in einem 1000-jährigen Zeitraum [-] bei einer Auftretenswahrscheinlichkeit von 0.001



Aufgabe 6.3 (Gruppenaufgabe)

Aus Daten der letzten Jahre ist ersichtlich, dass von allen eingereichten Projektvorschlägen eines Planungsbüros im Umweltingenieurwesen 27% erfolgreich einen Zuschlag erhalten haben.
Als neuer Besitzer dieses Planungsbüros setzt du dich nun mit der Wirtschaftsplanung der kommenden Jahre auseinander. In diesem Zusammenhang interessiert dich,

a. wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass spätestens der 12. Projektvorschlag einen Zuschlag erhält.

b. wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass nur der letzte der nächsten 10 Projektvorschläge erfolgreich sein wird?

c. wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass höchstens 2 der nächsten 13 Projektvorschläge erfolgreich sein werden?

Bitte berechne diese Wahrscheinlichkeiten...