Übung 6 - Lösung

Aufgabe 6.1

a) Für S_n gilt

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \qquad Var[S_n] = V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]$$

S_{50} ist normalverteilt, mit $N(50,200)$.

Für $\overline{X}_n$ gilt

$$E\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \qquad V\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2} V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$\overline{X}_{50}$ ist normalverteilt, mit $N\left(1, \frac{200}{50^2}\right) = N(1, 0.08)$.

b) X_1 ist normalverteilt, mit $N(1,2^2)$. Durch Standardisieren erhalten wir Z, mit $N(0,1)$ über $Z = \frac{X_1 - 1}{2}$. Wir erhalten dann

$$P\left(E[X_1]-1 \le X_1 \le E[X_1]+1\right) = P(0 \le X_1 \le 2) = P\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right)$$

$$P_Z\left(\frac{1}{2}\right) - P_Z\left(-\frac{1}{2}\right) = P_Z\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - P_Z\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= P_Z\left(\frac{1}{2}\right) + P_Z\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$\cong 2 \cdot 0.692 - 1 = 0.384$$

c) Durch Standardisieren: Für $n = 50$ erhalten wir $Z = \dfrac{S_n - 50}{\sqrt{200}}$.

Es folgt: $P(49 \le S_n \le 51) = P(-0.07 \le Z \le 0.07) = 2 \cdot \Phi(0.07) - 1 \cong 2 \cdot 0.53 - 1 = 0.06$

d) Durch standardisieren: Für $n = 50$ erhalten wir $Z = \dfrac{\overline{X}_{50} - 1}{\sqrt{0.08}}$.

Es folgt: $P\left(0 \le \overline{X}_{50} \le 2\right) = P(-3.5 \le Z \le 3.5) = 2 \cdot \Phi(3.5) - 1 \cong 2 \cdot 0.999 - 1 = 0.998$

Aufgabe 6.2

Auf das 1000-jährige Hochwasser bemessen heisst, dass das Bauwerk das Hochwasser Q_B schadlos abführen kann. Q_B ist der Abfluss, der im Mittel einmal in 1000 Jahren erreicht oder überschritten wird.

Ereignis H: Überflutung des Bauwerks in einem Jahr ($Qmax > Q_B$)
Ereignis K: keine Überflutung des Bauwerks in einem Jahr ($Qmax < Q_B$)

$$P(H) = \frac{1}{1000} = 0.001 = p_1$$

$$P(K) = 1 - 0.001 = 0.999 = \overline{p}_1$$

a) Das Ereignis Überflutung im 10-ten Jahr einer 10-Jahres-Periode kann durch eine geometrische Verteilung beschrieben werden:

$$P(H_{best.,1}) = (p_1)^1 \cdot (\overline{p}_1)^{10-1} = (0.001) \cdot (0.999)^9 = 0.000991$$

b) Die Jahre des Auftretens spielen keine Rolle $\Rightarrow$ Binomial-Verteilung

$$P(H_{unbest.,2}) = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} (p_1)^2 \cdot (\overline{p}_1)^{10-2} = 45 \cdot (0.001)^2 \cdot (0.999)^8 = 0.000045$$

c)

$$P(H_{unbest.,0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} (p_1)^0 \cdot (\overline{p}_1)^{10-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{10} = 0.99004$$

d) Ereignis darf 0-mal und 1-mal auftreten.

$$P(H_{unbest.,1}) = \frac{10!}{1! \cdot (10-1)!} (p_1)^1 \cdot (\overline{p}_1)^{10-1} = 10 \cdot (0.001)^1 \cdot (0.999)^9 = 0.00991$$

$$P(H_{unbest.,0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} (p_1)^0 \cdot (\overline{p}_1)^{10-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{10} = 0.99004$$

$$P(H_{\max,1}) = P(H_{unbest.,0}) + P(H_{unbest.,1}) = 0.99004 + 0.00991 = 0.99995$$

e) Die Auftretenshäufigkeit hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Mit Hilfe der Binomialverteilung ergibt sich daher:

$$P(H_{overflow,10}) = \frac{100!}{10! \cdot (100-10)!} (p_1)^{10} \cdot (\overline{p}_1)^{100-10} = 1.6 \cdot 10^{-17}$$

f) Verwendet man die Binomialverteilung erhält man:

$$P(H_{overflow,0}) = \frac{1000!}{0! \cdot (1000-0)!} (p_1)^0 \cdot (\overline{p}_1)^{1000-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{1000} = 0.368$$

Und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses:

$$P(H_{overflow,\geq 1}) = 1 - 0.368 = 0.632$$