

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

Inhalte der heutigen Vorlesung

- Kurze Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Ereignisse und einfache Zufallsvariablen
- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Variablen
- Fehlerfortpflanzung
- Nicht-lineare Grenzzustandsfunktion
- Monte-Carlo Simulation

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

- Tests auf die Güte der Anpassung
 - Der χ^2 -Güte der Anpassung Test
 - Der Kolmogorov-Smirnov-Güte der Anpassung Test
- Modellvergleich

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

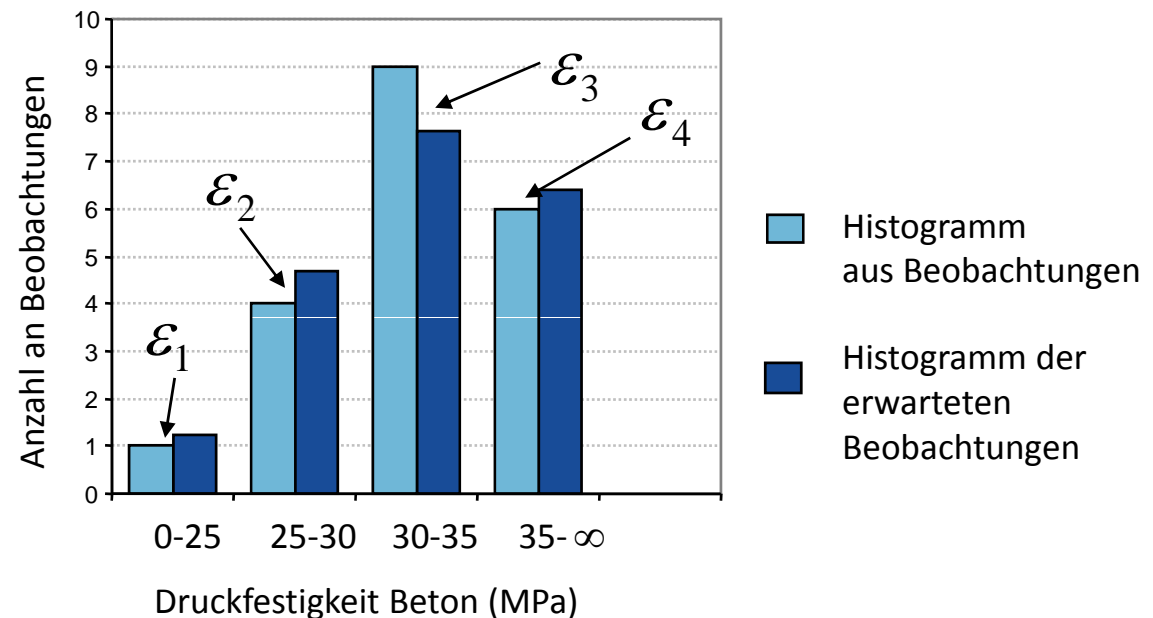
- Der χ^2 -Güte der Anpassung Test

Wir testen die Statistik der quadrierten Abweichungen zwischen dem beobachteten und dem erwarteten Histogramm

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_{o,i} - N_{p,i})^2}{N_{p,i}(1 - p(x_i))}$$

$$\varepsilon_m^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_{o,i} - N_{p,i})^2}{N_{p,i}}$$

CHI-Quadrat verteilt mit $k-1$ Freiheitsgraden



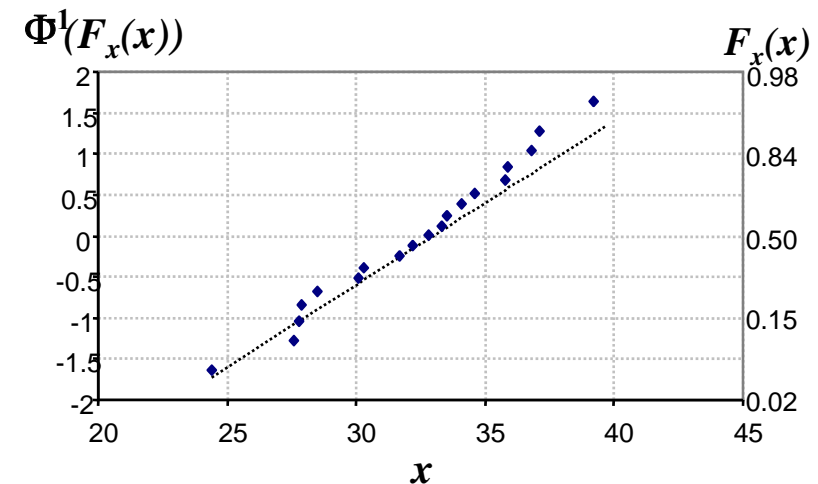
Zusammenfassung der letzten Vorlesung

- Kolmogorov-Smirnov-Güte der Anpassung Test

Die beobachtete kumulative Verteilungsfunktion kann mit Hilfe von

$$F_o(x_i) = \frac{i}{n}$$

berechnet werden.



$$\mathcal{E}_{\max} = \max_{i=1}^n \left[\left| F_o(x_i) - F_p(x_i) \right| \right] = \max_{i=1}^n \left[\left| \frac{i}{n} - F_p(x_i) \right| \right]$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

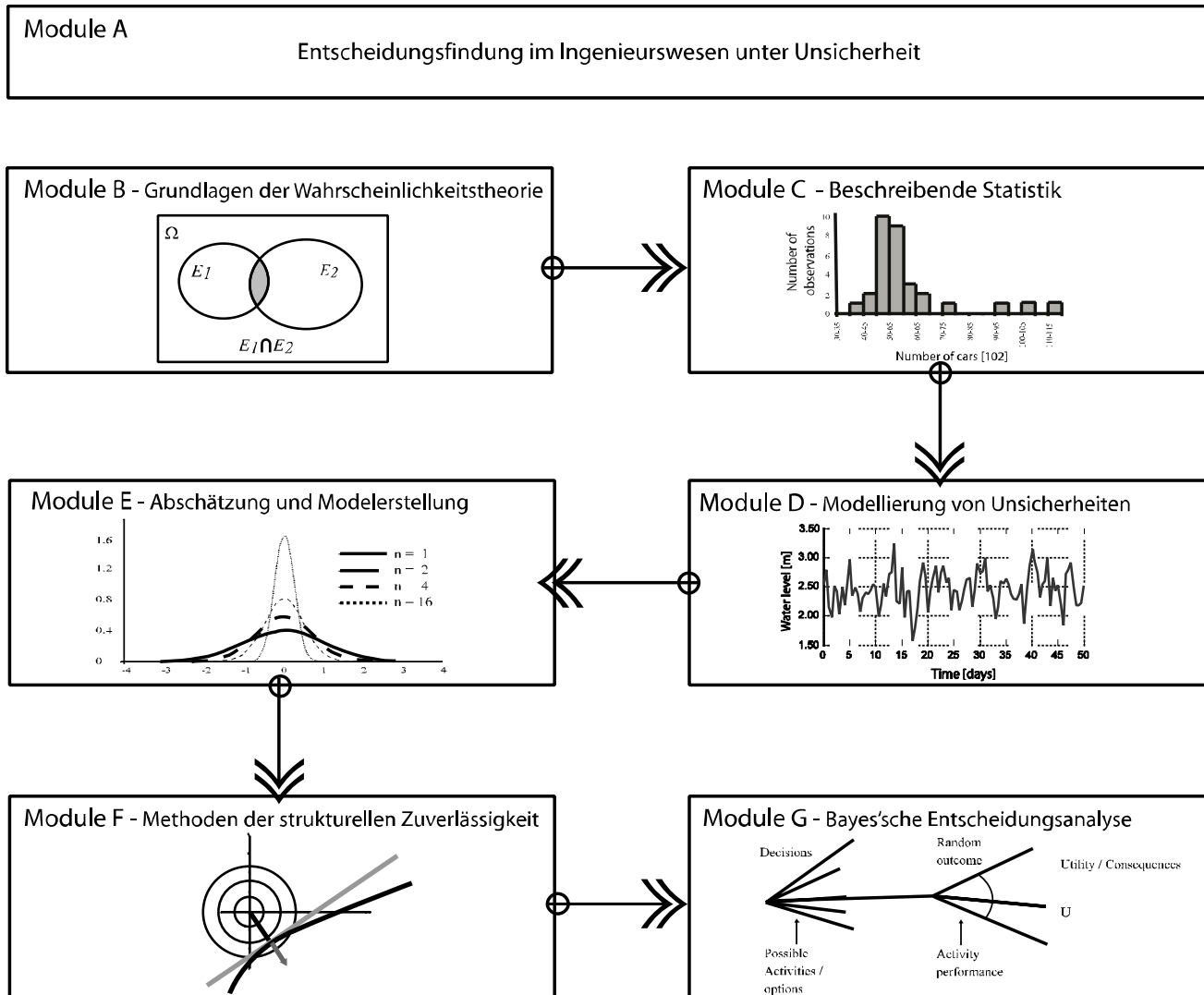
- Vergleich der Modelle

Wie soll man nun zwischen zwei Modellen entscheiden, die beide den Test für die Güte der Anpassung bestanden haben?

Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

- direkter Vergleich der Stichprobenstatistiken selbst
 - nicht konsistent, da unterschiedliche Anzahl der Freiheitsgrade
- den Vergleich der *Stichproben-Likelihood*

Kurs im Überblick



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Versagensereignisse und einfache Zufallsvariablen

Mit einem Versagensereignis assoziieren wir im Prinzip

- Verlust der Funktionalität
- Kosten
- Todesfälle
- Umweltschäden

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Versagensereignis und einfache Zufallsvariable

Ein Versagensereignis lässt sich als funktionelle Beziehung beschreiben:

$$\mathbf{F} = \{g(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

Eine solche funktionelle Beziehung bezeichnet man als **Grenzzustandsfunktion**.

$g(\mathbf{x})$



Realisationen von einfachen
Zufallsvariablen

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $\mathbf{F} = \{g(\mathbf{x}) \leq 0\}$, z.B. eines Versagensereignisses, kann mit Hilfe des folgenden Integrals berechnet werden.

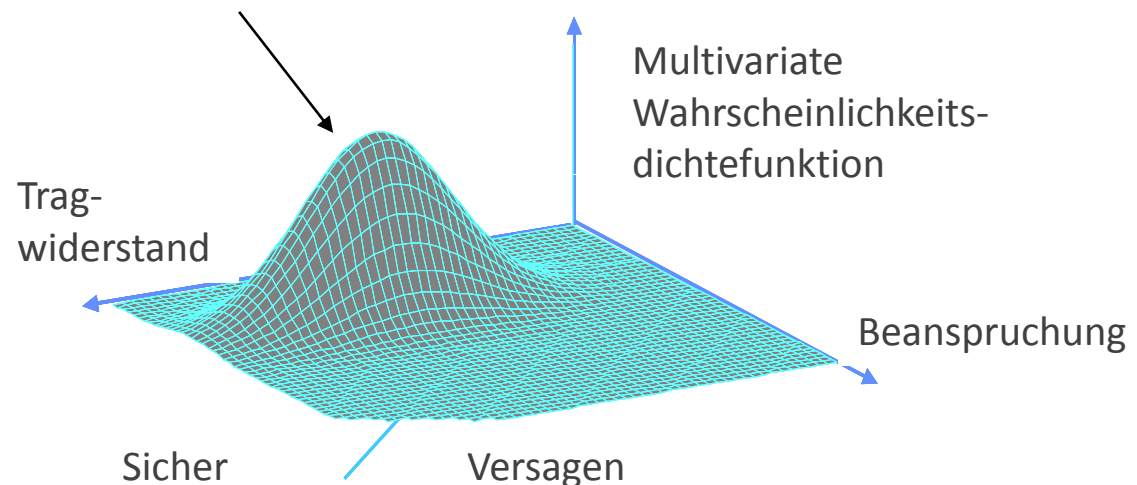
$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$g(\mathbf{x}) = r - s$$

r : Tragwiderstand

s : Beanspruchung

Multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der einfachen Zufallsvariable X



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Die Lösung des Wahrscheinlichkeitsintegrals ist im allgemeinen nicht trivial – kann multidimensional sein und eine komplizierte Integrationsdomäne besitzen

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Klassische numerische Integrationsmethoden wie Gauss oder Schebyshev sind nicht effizient für Dimensionen grösser als 5-6. Andere Wege sind notwendig, welche wir nun in Folge besprechen.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen

$$g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Ist die Zufallsvariable normalverteilt, dann ist die sogenannte *Sicherheitsmarge M* auch normalverteilt.

$$M = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad \mu_M = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \rho_{ij} a_i a_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \leftarrow \text{Korrelationskoeffizient}$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist dann:

$$P_F = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = P(M \leq 0)$$

Welche sich direkt mit der Standard Normalverteilung errechnen lässt:

$$P_F = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta)$$

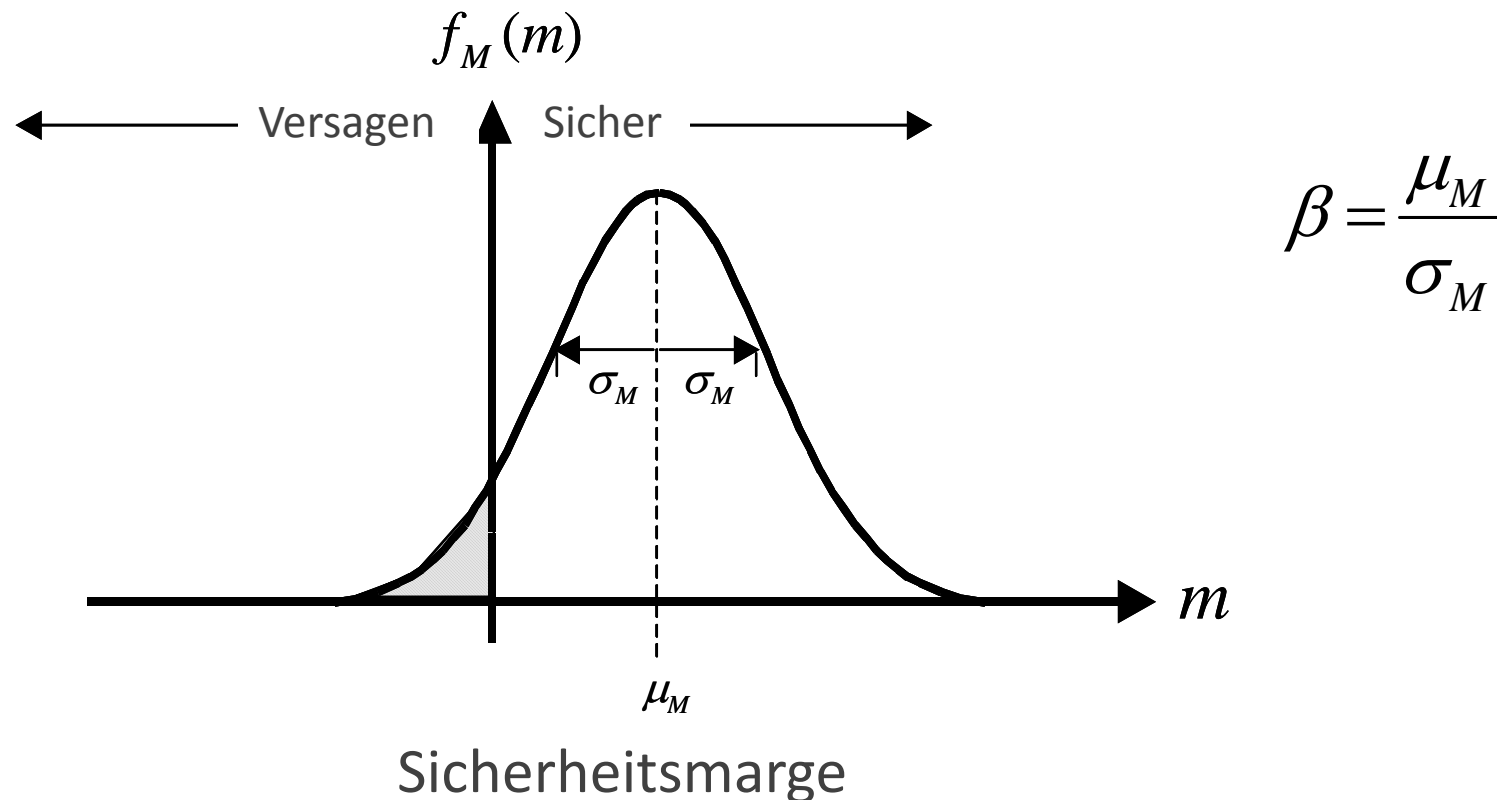
mit

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

Zuverlässigkeits- oder Sicherheitsindex

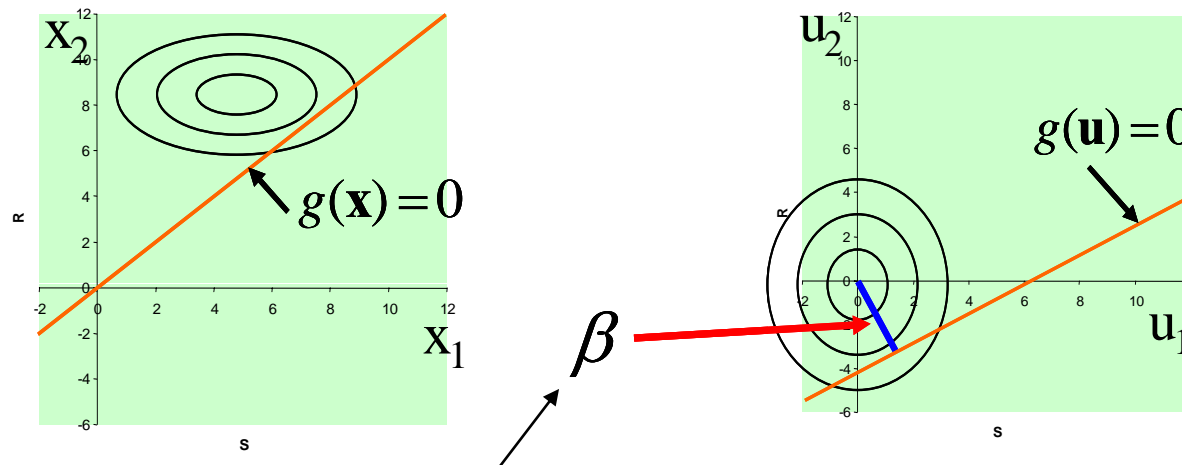
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen
Der Sicherheitsindex β hat eine geometrische Interpretation



$$U_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$$

Kürzeste Distanz zwischen dem Ursprung und der Grenzzustandsfunktion im standardisierten normalverteilten Raum.

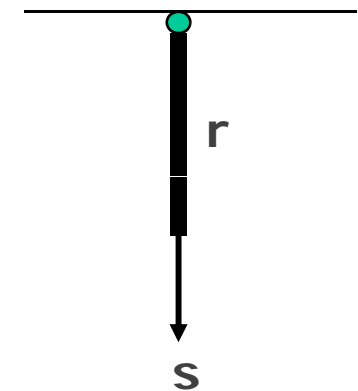
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen
Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes unter Zugbeanspruchung

Der Widerstand R
und die maximale jährliche Beanspruchung S
sind normalverteilt

$$\mu_R = 350, \sigma_R = 35$$

$$\mu_S = 200, \sigma_S = 40$$



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

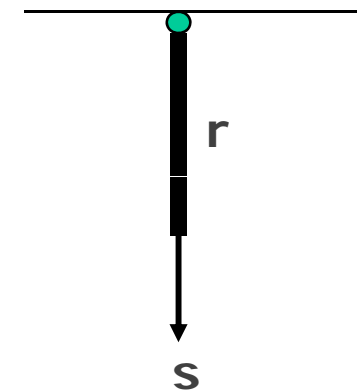
- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen
Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes unter Zugbeanspruchung

Die Sicherheitsmarge ist daher normal verteilt mit den Parametern:

$$\mu_M = 350 - 200 = 150 \quad \sigma_M = \sqrt{35^2 + 40^2} = 53.15$$

Der Zuverlässigkeitsindex β berechnet sich zu

$$\beta = \frac{150}{53.15} = 2.84 \quad P_F = \Phi(-2.84) = 2.4 \cdot 10^{-3}$$



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Die Fehlerfortpflanzung

In vielen Ingenieur Anwendungen ist die Fehlerfortpflanzung von zentraler Bedeutung

Beispiele:

- Fehler aufgrund Produktionstoleranzen von Bauteilen
- Vermessungsfehler
- Labor-Messfehler

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Angenommen der Fehler \mathcal{E} kann durch eine differenzierbare Funktion von Zufallsvariablen beschrieben werden

$$\mathcal{E} = h(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \longleftarrow \text{Vektor der Realisationen von Zufallsvariablen}$$

mit Parametern

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})^T$$

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$$

↑ Korrelationskoeffizient
 ↑ Standardabweichung

Die Idee ist $f(x)$ zu linearisieren:

$$\mathcal{E} \cong h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i,0}) \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

Erste partielle Ableitung
in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Wenn wir die Fehlerfunktion um den Mittelwert der Zufallsvariable linearisieren, dann wird der Erwartungswert und die Varianz zu:

$$\varepsilon \cong h(\boldsymbol{\mu}_X) + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_{X_i}) \left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}_X}$$

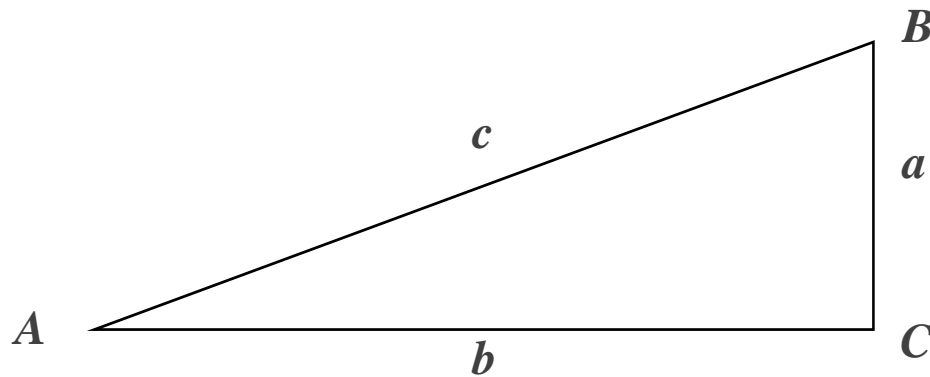
$$E[\varepsilon] = h(\boldsymbol{\mu}_X)$$

$$\text{Var}[\varepsilon] = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}_X} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}_X} \right) \left(\left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}_X} \right) \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$$

Der Mittelwert und die Varianz hängen vom Punkt der Linearisation ab.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Bsp. Fehlerfortpflanzung in einer Messung
Um die Strecke c (Strecke zwischen A und B) zu bestimmen, werden a und b gemessen.



Aufgrund der Messunsicherheit der Messungen von a und b wird auch c eine Unsicherheit aufweisen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass c grösser als 13.5 ist?

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Bsp. Fehlerfortpflanzung in einer Messung

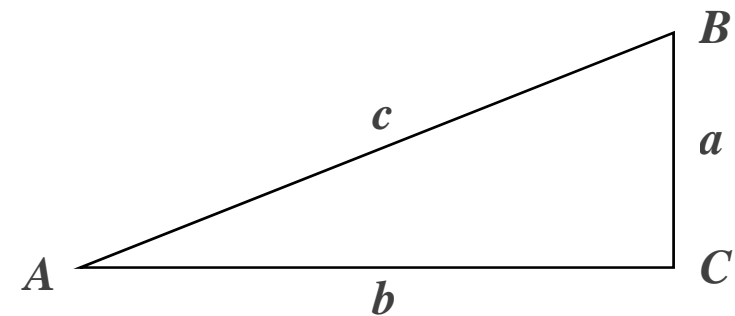
Es wird angenommen, dass a und b als normalverteilte Zufallsvariablen modelliert werden können mit:

$$\mu_a = 12.2 \quad \mu_b = 5.1$$

$$\sigma_a = 0.4 \quad \sigma_b = 0.3$$

Mit diesen Angaben kann

c berechnet werden: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



Die statistischen Charakteristiken von c können durch das Fehlerfortpflanzungsgesetz geschätzt werden.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Bsp. Fehlerfortpflanzung in einer Messung

$$E[c] = \sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2}$$

$$Var[c] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}_x} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 = \frac{\mu_a}{\sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2}} \sigma_a^2 + \frac{\mu_b}{\sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2}} \sigma_b^2$$

$$E[c] = \sqrt{12.2^2 + 5.1^2} = 13.22$$

$$Var[c] = \frac{12.2}{\sqrt{12.2^2 + 5.1^2}} 0.4^2 + \frac{5.1}{\sqrt{12.2^2 + 5.1^2}} 0.3^2 = 0.1823$$

$$P_f = P(13.5 - C \leq 0) = \Phi\left(-\frac{(13.5 - 13.22)}{\sqrt{0.18}}\right) = 0.26$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

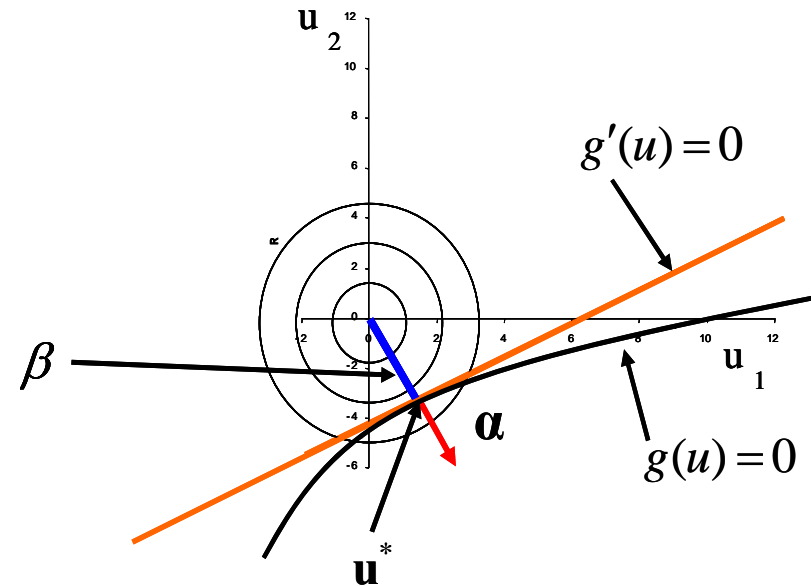
Grenzzustandsfunktionen sind oft nicht linear

Wie wir bei der Fehlerfortpflanzung gesehen haben, ist es möglich solche Grenzzustandsfunktionen zu linearisieren. Das Resultat hängt jedoch vom Linearisations-Punkt und von der Formulierung der Grenzzustandsfunktion ab.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen
Grenzzustandsfunktionen sind oft nicht linear

Hasofer und Lind empfehlen im Punkt zu linearisieren, in dem die Grenzzustandsfunktion Null ist und der am nächsten zum Ursprung im standardisierten Normalraum ist.

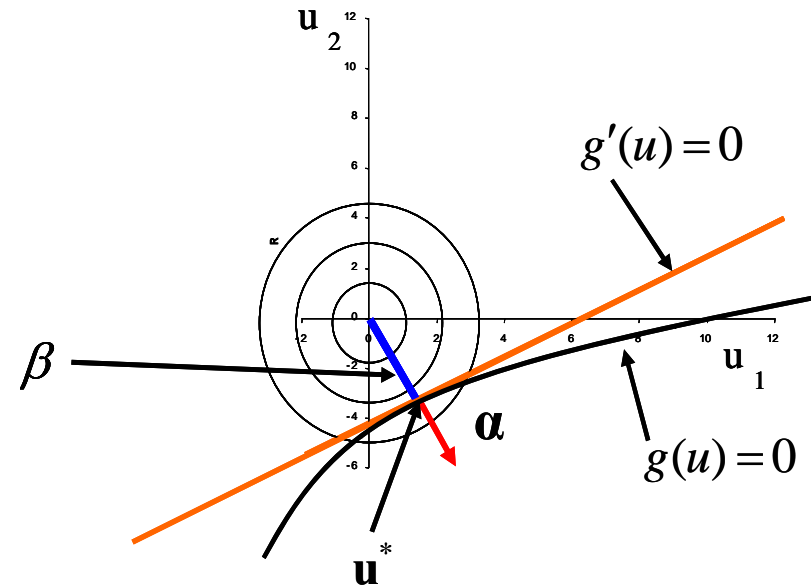


Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

Die Identifizierung des Zuverlässigkeitsindex β kann als Optimierungsproblem gelöst werden:

$$\beta = \min_{\mathbf{u} \in \{g(\mathbf{u})=0\}} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$



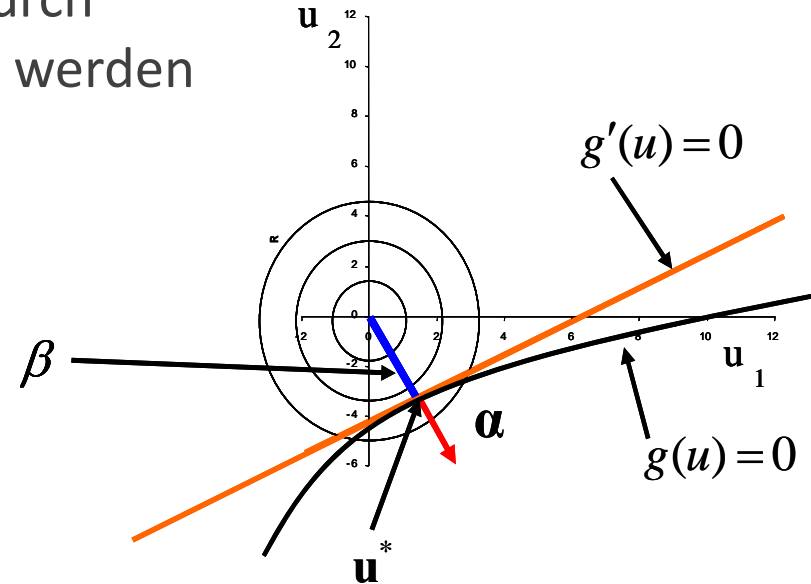
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

Das Optimierungsproblem kann durch folgendes Iterationsschema gelöst werden

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \mathbf{a})}{\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_j}(\beta \mathbf{a})^2 \right]^{1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$g(\beta \alpha_1, \beta \alpha_2, \dots, \beta \alpha_n) = 0$$



Vorausgesetzt die Grenzzustandsfunktion
ist differenzierbar!

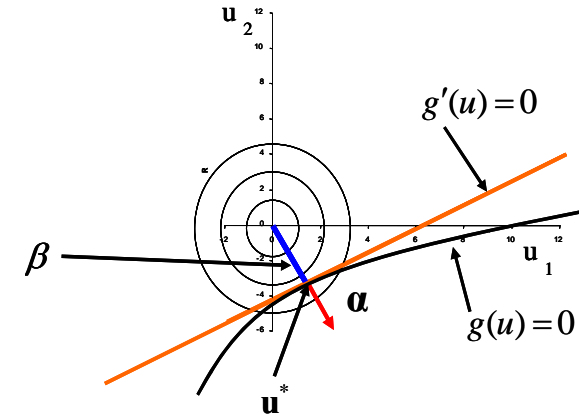
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

Iterationsschritte:

1. Der Linearisationspunkt wird gewählt als $u^* = \beta \cdot \alpha$
2. Der Normalvektor zur Grenzzustandsfunktion wird um den Linearisationspunkt ermittelt

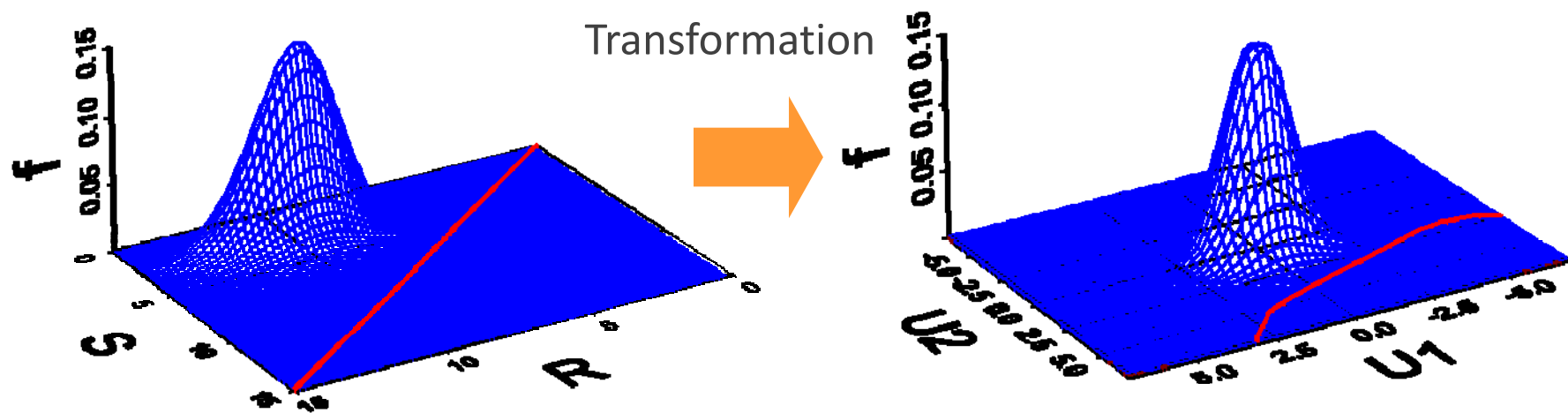
$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \alpha)}{\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_j}(\beta \alpha)^2 \right]^{1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Der Zuverlässigkeitsindex β wird berechnet von $g(\beta \alpha_1, \beta \alpha_2, \dots, \beta \alpha_n) = 0$
4. Der neue Linearisationspunkt ist β
5. Wiederhole ab Schritt 2) bis Konvergenz in $u^* = (\beta \alpha_1, \beta \alpha_2, \dots, \beta \alpha_n)^T$



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



$g(Z)$: linear

$$\mu_{Z_1}, \mu_{Z_2} \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_{Z_1}, \sigma_{Z_2} \in \mathbb{R}$$

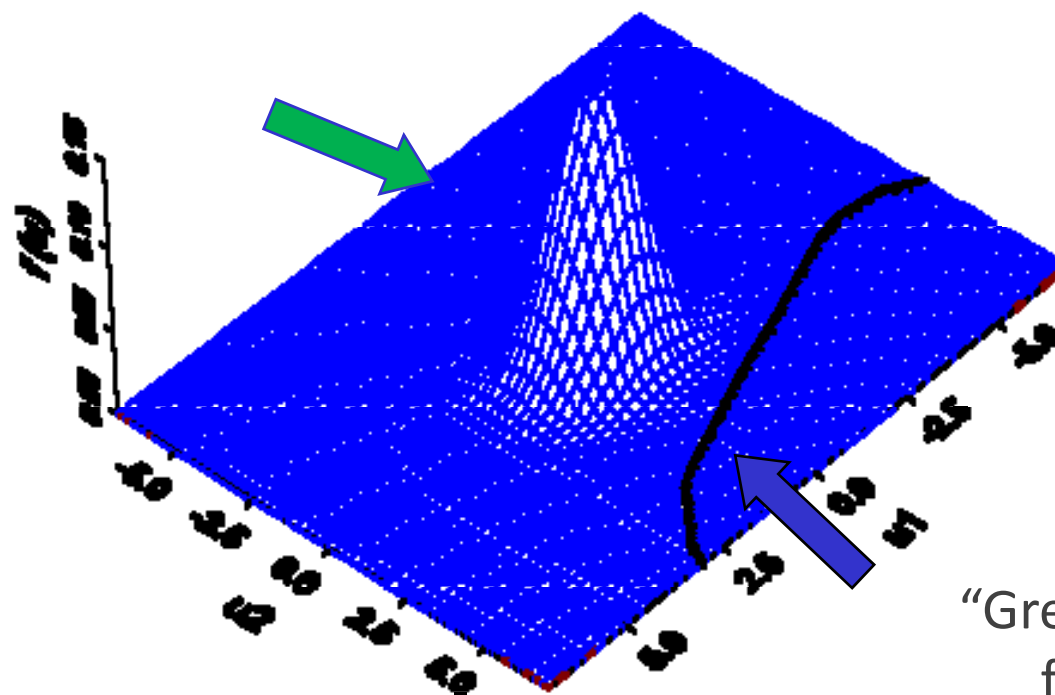
$g(U)$: Nicht linear

$$\mu_{Z_1} = \mu_{Z_2} = 0$$

$$\sigma_{Z_1} = \sigma_{Z_2} = 1$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge

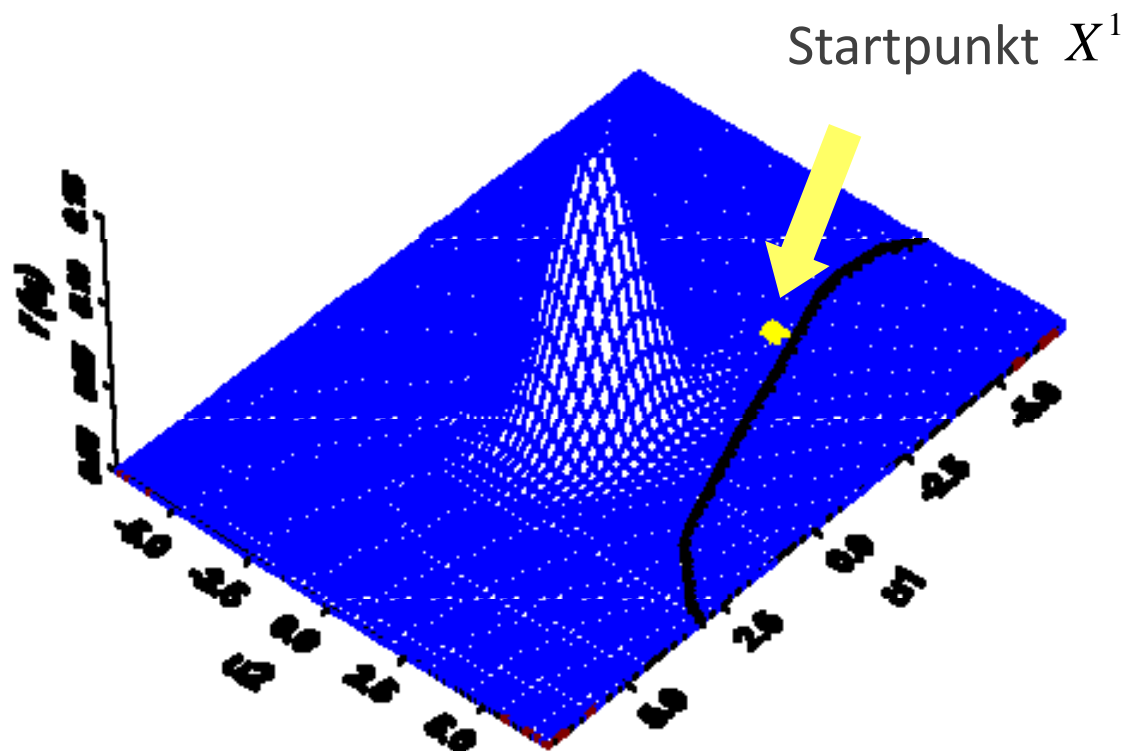


“Grenzzustands-
funktion”

$$g(U) = R - S$$

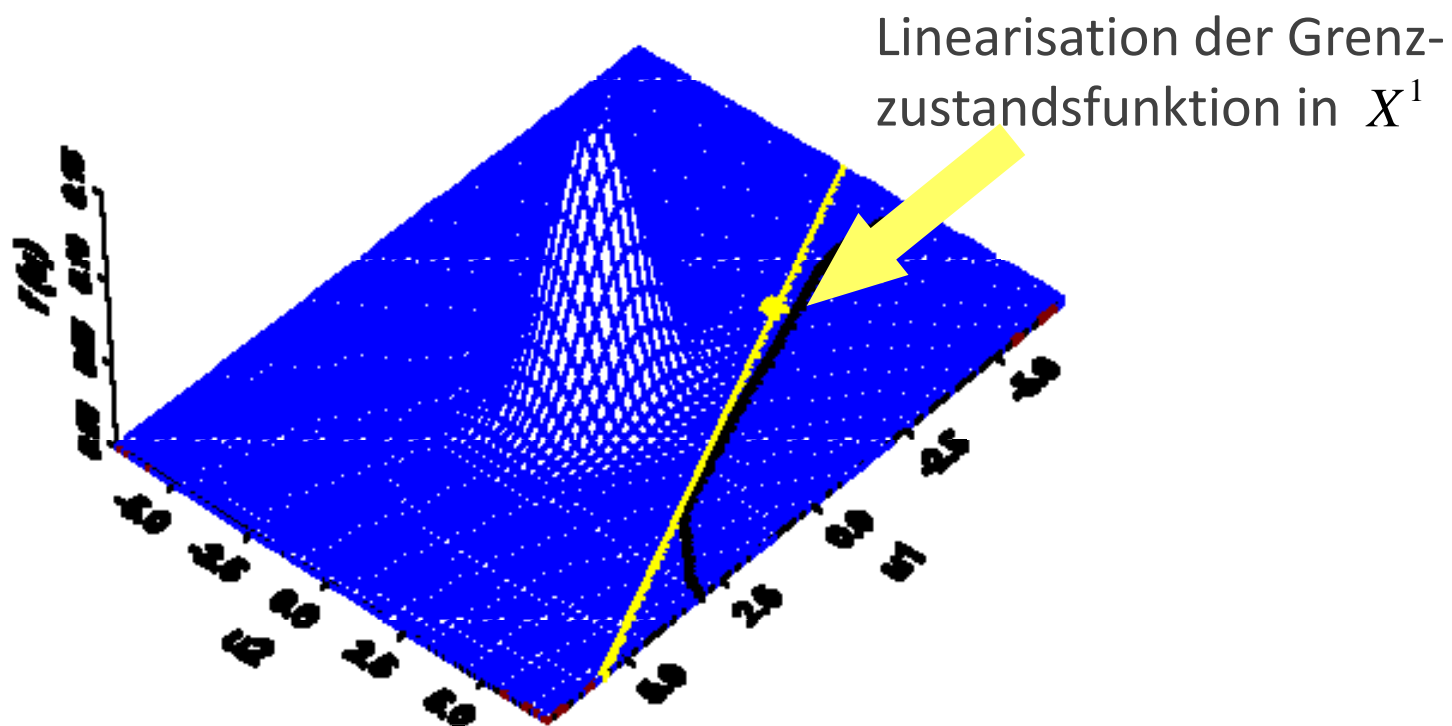
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



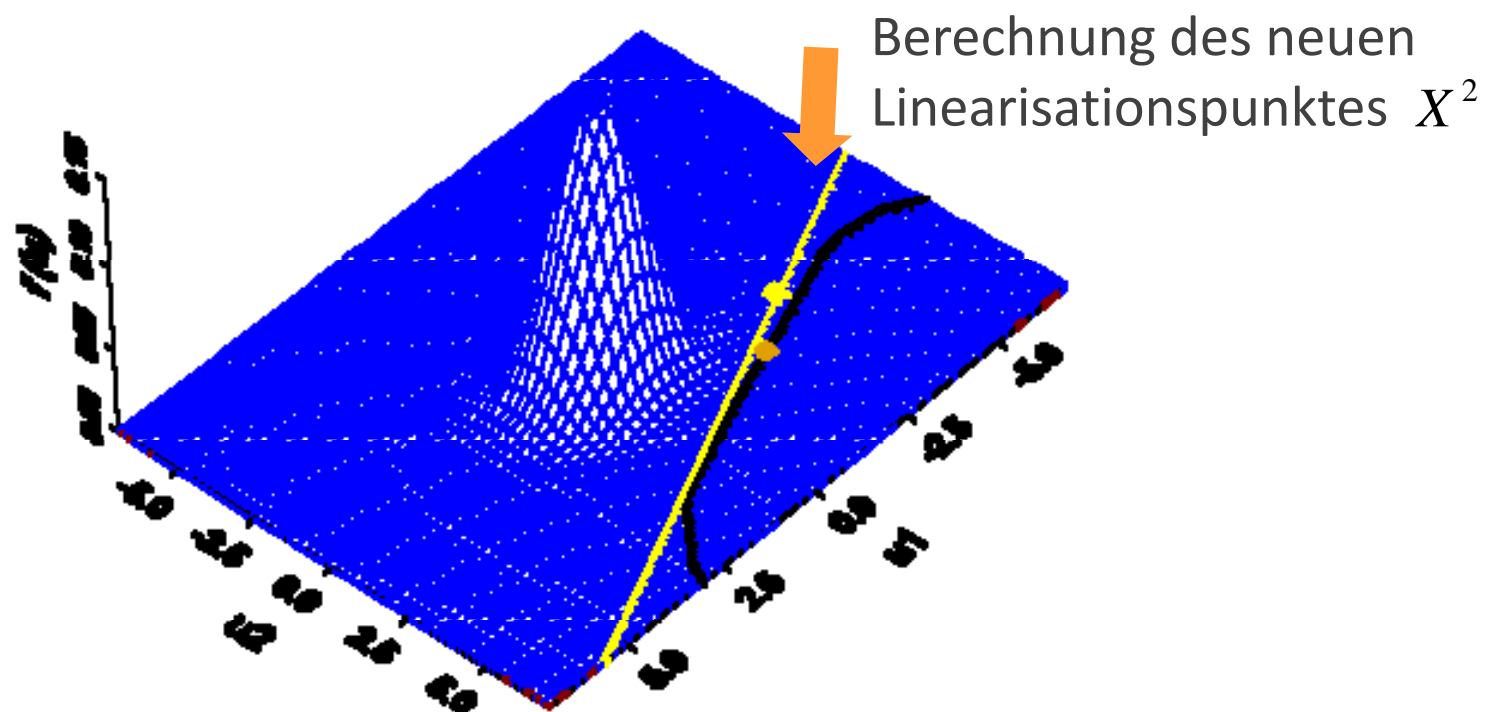
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



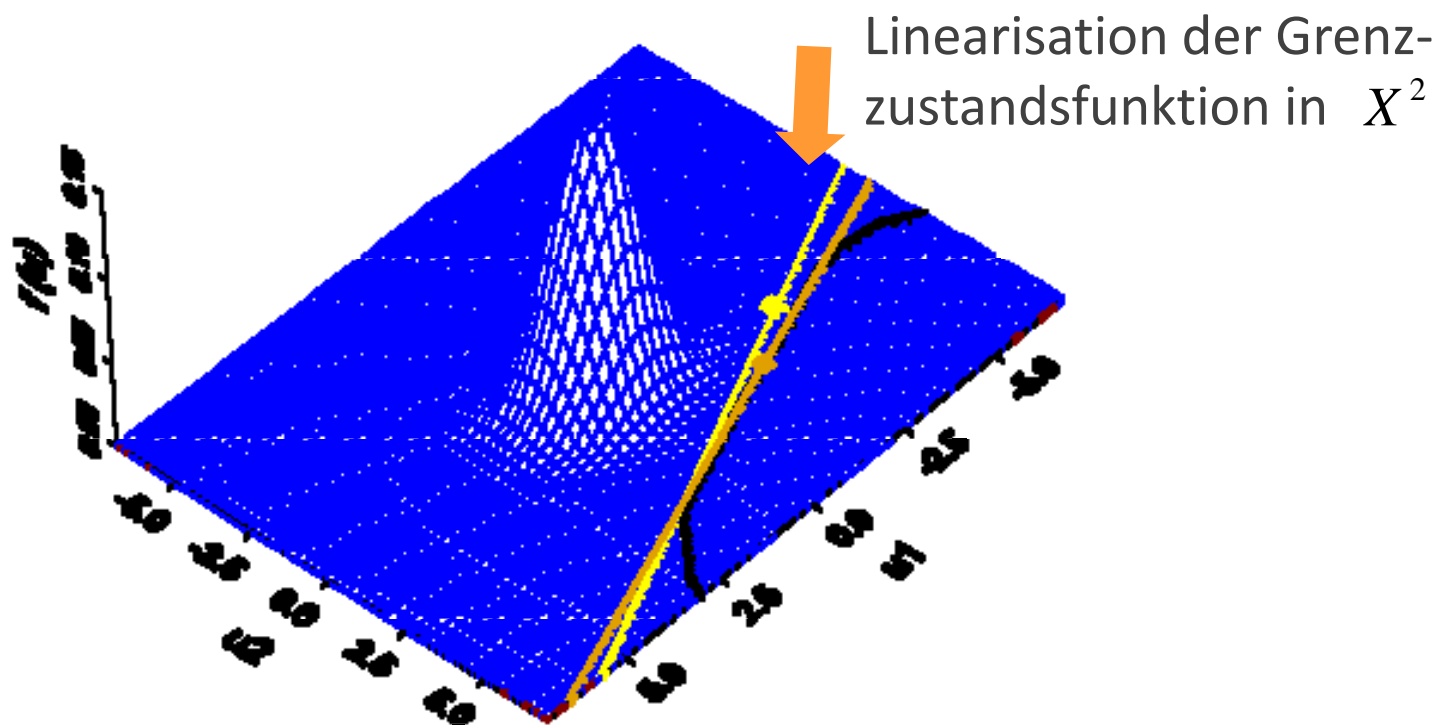
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



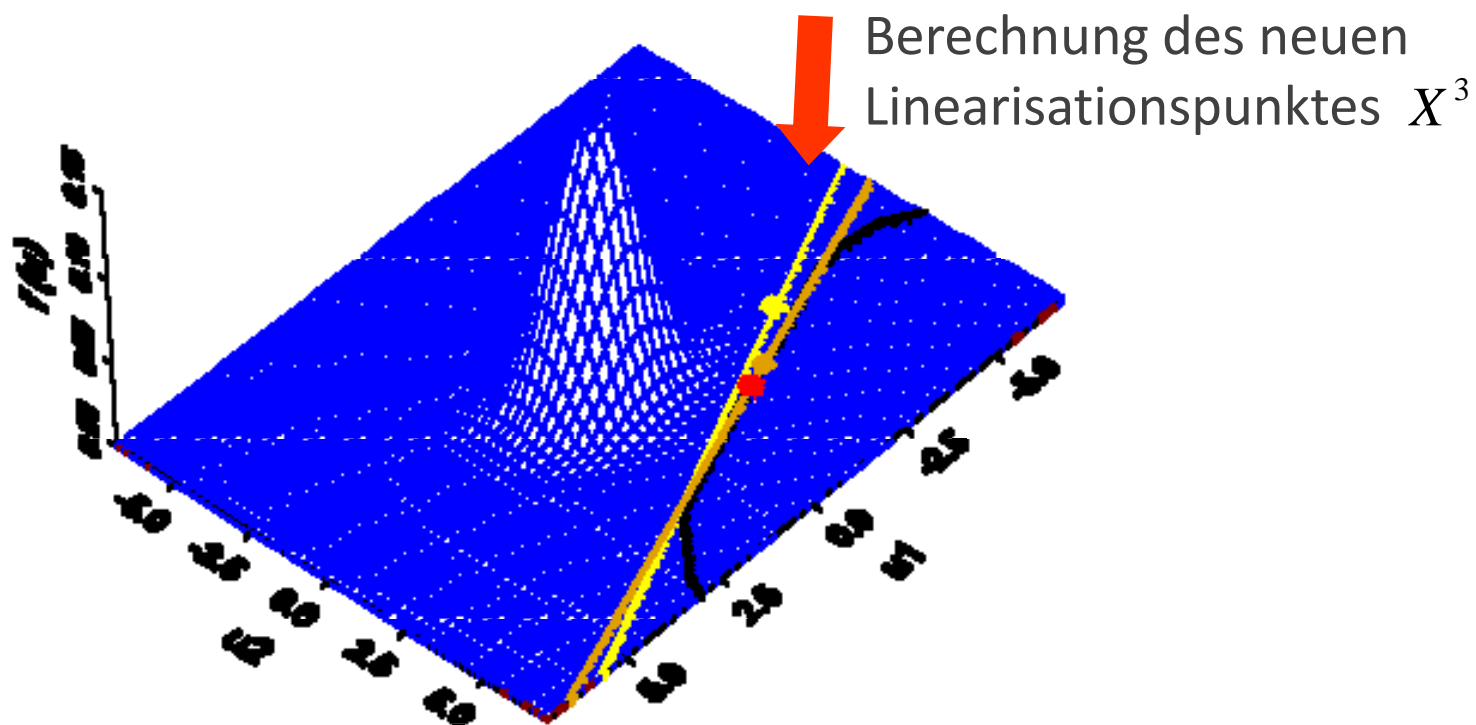
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



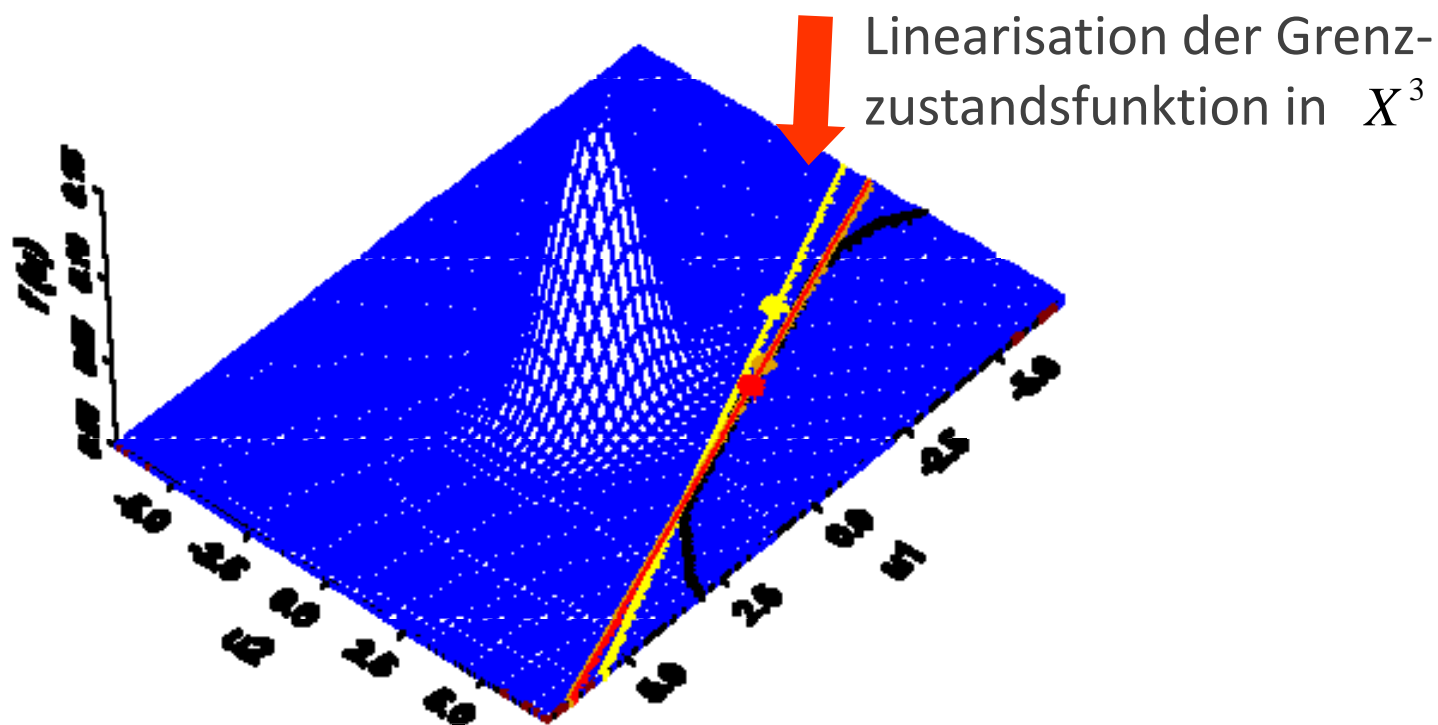
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



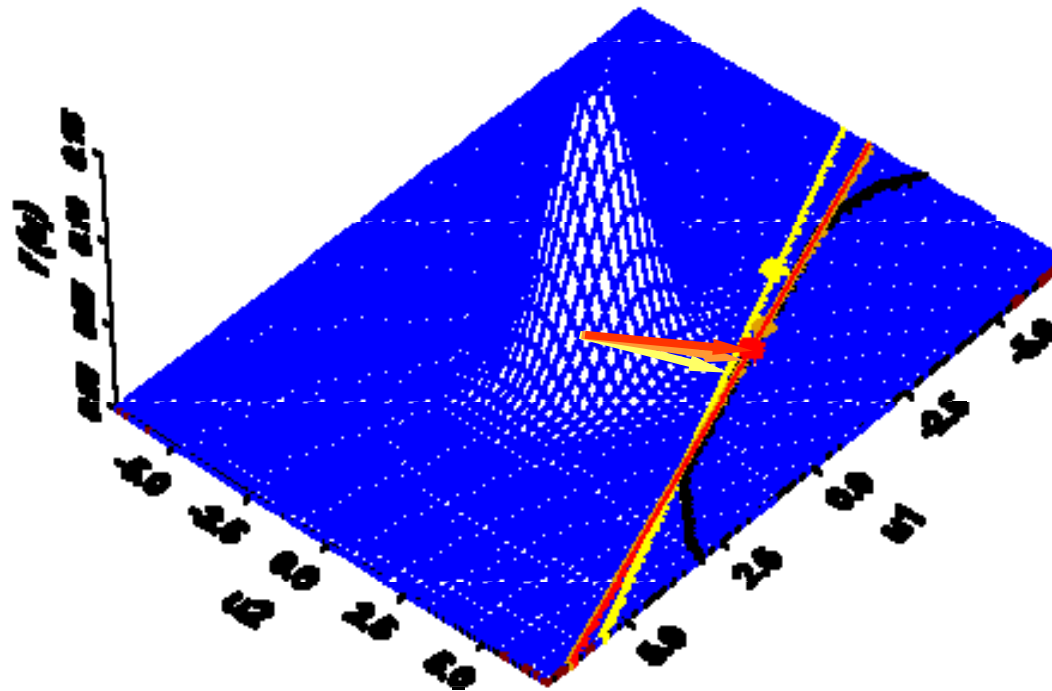
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



$$\beta^1 = 3.556$$

$$\beta^2 = 3.607$$

$$\beta^3 = 3.608$$

$$\beta^4 = 3.608$$

Konvergenzkriterium

$$\Delta\beta = \left| \beta^{n+1} - \beta^n \right| \leq \varepsilon$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes

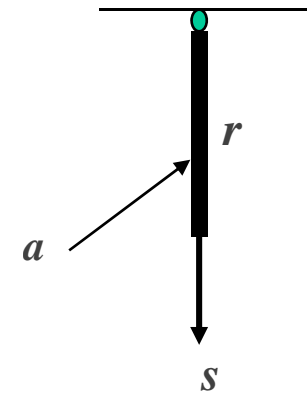
Grenzzustandsfunktion

Fließgrenze

$$g(\mathbf{x}) = r \cdot a - s$$

Beanspruchung

Querschnittfläche



Es wird angenommen, dass R , S und A normal verteilte Zufallsvariablen sind:

$$U_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad U_S = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad U_A = \frac{A - \mu_A}{\sigma_A}$$

$$\mu_R = 350, \sigma_R = 35$$

$$\mu_S = 1500, \sigma_S = 300$$

$$\mu_A = 10, \sigma_A = 2$$

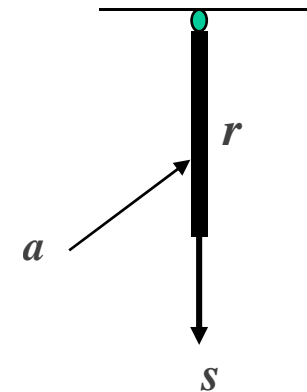
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes

Wir können nun die Grenzzustandsfunktion mit der Variable u ausdrücken

$$g(u) = (u_R \sigma_R + \mu_R)(u_A \sigma_A + \mu_A) - (u_S \sigma_S + \mu_S)$$

$$\begin{aligned} &= (35u_R + 350)(u_A + 10) - (300u_S + 1500) \\ &= 350u_R + 350u_A - 300u_S + 35u_R u_A + 2000 \end{aligned}$$



Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes

Der Zuverlässigkeitsindex β kann mittels Iteration ermittelt werden:

$$\alpha_R = -\frac{1}{k}(350 + 35\beta\alpha_A)$$

$$\alpha_A = -\frac{1}{k}(350 + 35\beta\alpha_R)$$

$$\alpha_S = \frac{300}{k}$$

$$k = \sqrt{\alpha_R^2 + \alpha_A^2 + \alpha_S^2}$$

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta\mathbf{a})}{\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_j}(\beta\mathbf{a})^2\right]^{1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\beta = \frac{-2000}{350\alpha_R + 350\alpha_A - 300\alpha_S + 35\beta\alpha_R\alpha_A}$$

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \dots, \beta\alpha_n) = 0$$

Iteration	Start	1	2	3	4	5
β	3.0000	3.6719	3.7399	3.7444	3.7448	3.7448
α_R	-0.5800	-0.5701	-0.5612	-0.5611	-0.5610	-0.5610
α_A	-0.5800	-0.5701	-0.5612	-0.5611	-0.5610	-0.5610
α_S	0.5800	0.5916	0.6084	0.6086	0.6087	0.6087

$$g(u) = (u_R\sigma_R + \mu_R)(u_A\sigma_A + \mu_A) - (u_S\sigma_S + \mu_S)$$

$$= (35u_R + 350)(u_A + 10) - (300u_S + 1500)$$

$$= 350u_R + 350u_A - 300u_S + 35u_Ru_A + 2000$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

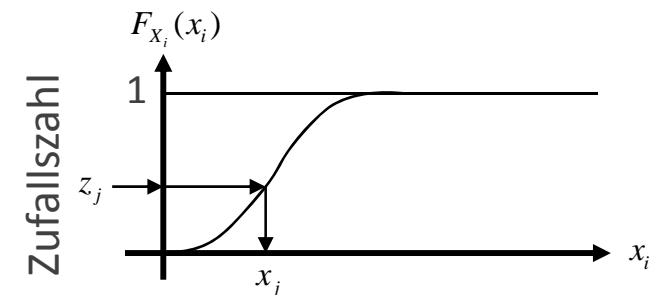
- Monte Carlo Simulation

Lösung des Integrationsproblems:

- m Realisationen des Vektors \mathbf{X} werden erzeugt
- Für jede Realisation wird die Grenzzustandsfunktion berechnet
- Die Realisationen für welche die Grenzzustandsfunktion null oder weniger ist werden gezählt n_f
- Die Versagenswahrscheinlichkeit wird geschätzt mit

$$p_f = \frac{n_f}{m}$$

$$P_f = \int_{\Omega_f = \{g(\mathbf{x}) \leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$



Z ist eine Zufallszahl gleichmässig zwischen 0 und 1 verteilt

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Monte Carlo Simulation

m zufällige Realisationen von R und S werden generiert und die Anzahl der Realisationen n_f im Versagensraum werden gezählt.

Die Versagenswahrscheinlichkeit p_f ist dann gegeben durch:

$$p_f = \frac{n_f}{m}$$

