ÜBUNG 9

Aufgabe 9.1

Die wöchentliche Arbeitszeit in der Bauindustrie wurde um 2 Stunden reduziert. Auf einer Baustelle soll untersucht werden, ob dies tatsächlich auch so durchgesetzt wird. Die Baugewerkschaft behauptet, dass die Arbeiter immer noch gleichviel arbeiten müssten wie vor der Reduktion der Arbeitszeit.

9 Arbeiter wurden zufällig ausgewählt und ihre Arbeitszeit in der Woche vor (X) und nach der Arbeitszeitverkürzung (Y) festgestellt. Es wird angenommen, dass X und Y normalverteilt sind, und die Varianz der wöchentlichen Arbeitszeit sowohl vor wie auch nach der Reduktion $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 9.5$ Stunden^2 beträgt. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle festgehalten:

Tabelle 9.2: Wöchentliche Arbeitszeiten.

Arbeiter (*i*)	Arbeitszeit vor der Reduktion (h)	Arbeitszeit nach der Reduktion (h)
1	38	38
2	41	39
3	40	41
4	42	39
5	43	40
6	40	40
7	39	39
8	37	38
9	43	40

a. Kann man anhand dieser Daten auf einem Signifikanzniveau von 5 % behaupten, dass der Mittelwert der wöchentlichen Arbeitszeit vor der Reduktion gleich 40 Stunden/Woche war?

b. Teste die Hypothese der Baugewerkschaft auf einem Signifikanzniveau von 5 %.

Aufgabe 9.2

In einem Prüflabor werden jeden Tag 30 Messungen durchgeführt, um die Qualität des Wassers zu kontrollieren. Jedes Messergebnis folgt einer Normalverteilung mit einem Mittelwert $\mu = 23\ ng/ml$ und einer Standardabweichung $\sigma = 4.3\ ng/ml$.

a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Messung einen Wert kleiner als $23 ng/ml$ aufweisen?

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eine Messung im Intervall $[19.5\ ng/ml ; 20.5 ng/ml]$?

c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich ein Tagesmittelwert von kleiner als $20 ng/ml$?

d. Das Labor hat ein neues Instrument für die Messungen der Wasserqualität erworben und führt Eichmessungen durch, d.h. es vergleicht die Messwerte des neuen Instruments mit dem alten Instrument. Es werden 15 Proben mit dem neuen Instrument gemessen, und deren Mittelwert liegt bei $\overline{x} = 19 ng/ml$, mit einer Standardabweichung von $s = 5\ ng/ml$. Teste auf einem 5% Signifikanzniveau, ob die neuen Messwerte zur gleichen Grundgesamtheit gehören wie die alten Messwerte.

Aufgabe 9.3

Aus Verkehrszählungen liegt eine Datenserie vor, die den täglichen Verkehrsfluss in der Rosengartenstrasse in Zürich beschreibt (Tabelle 8.6.1).

Tabelle 9.3: Anzahl der beobachteten Fahrzeuge pro Tag, sortiert.

Tag (*i*)	Anzahl Fahrzeuge
1	3600
2	4500
3	5400
4	6500
5	7000
6	7500
7	8700
8	9000
9	9500

a. Erstelle ein Wahrscheinlichkeitspapier für eine Dichtefunktion $f(x) = 2/10000^2 x$ für $0 < x < 10000$.

b. Überprüfe mit Hilfe des erstellten Wahrscheinlichkeitspapiers, ob der tägliche Verkehrsfluss mit dieser Verteilung angenommen werden kann.

Verwende folgende beobachtete kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion: $F(x_i^o) = \frac{i}{N+1}$

Aufgabe 9.4

Um die Druckfestigkeit von Beton einer bestimmten Produktionsmarge zu modellieren, wurden 20 Stichproben gemessen. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt. Es wird angenommen, dass die Grundgesamtheit der Stichproben einer Normalverteilung $N(\mu,\sigma)$ folgt.

Tabelle 9.4: Messwerte der Druckfestigkeit von den Betonproben.

Nr. der Messung	Druckfestigkeit [N/mm^2]	Nr. der Messung	Druckfestigkeit [N/mm^2]
1	24.4	11	33.3
2	27.6	12	33.5
3	27.8	13	34.1
4	27.9	14	34.6
5	28.5	15	35.8
6	30.1	16	35.9
7	30.3	17	36.8
8	31.7	18	37.1
9	32.2	19	39.2
10	32.8	20	39.7

Schätze die unbekannten Parameter (μ,σ) anhand der Momentenmethode.

Aufgabe 9.5 (Gruppenaufgabe)

Aufbauend auf die vorhergehende Aufgabenstellung aus 9.5 sollen folgende Berechnungen durchgeführt werden:

a) Beschreibe die Likelihood-Funktion.
b) Schätze die unbekannten Parameter (μ,σ) anhand der MLM.

Was passiert, wenn die Normalverteilung durch eine Exponentialverteilung ersetzt wird?

c) Schätze die Parameter der Exponentialverteilung mit der MLM und vergleiche die kumulative Verteilungsfunktion mit den beobachteten Werten.

zusätzliche Übungsaufgaben:

Aufgabe 9.6

Zur Dimensionierung eines Parkhauses wurden die Ankunftszeiten von Fahrzeugen aufgenommen. Die Zeitdifferenzen zwischen ankommenden Fahrzeugen sind in Tabelle 8.7.1 gegeben.

a. Zeichne das Wahrscheinlichkeitspapier für die Exponentialverteilung und trage die Werte der Zeitdifferenzen ein. Beurteile, ob die Intervalle einer Exponentialverteilung folgen.

b. Bestimme den Erwartungswert der Zeitdifferenz grafisch aus der in a) erzeugten Grafik unter der Annahme, dass die Daten exponentialverteilt sind. Berechne den Erwartungswert und vergleiche die beiden Werte.

Verwende für die beobachtete kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion: $F_o(x_i) = \frac{i}{n+1}$

Tabelle 9.5: Gemessene Zeitdifferenzen der ankommenden Fahrzeuge in einem Parkhaus.

i	Zeitdifferenz (Sekunden)
1	1.52
2	6.84
3	9.12
4	10.64
5	15.2
6	21.28
7	30.4
8	30.4
9	34.2
10	60.8
11	78.28
12	95.76

Aufgabe 9.7

Ein Student liest in einem Bericht über Verkehrsanalysen, dass die mittlere Fahrzeit mit einem Personenwagen von seinem Wohnort Baden bis zur ETH Hönggerberg während des Berufsverkehrs 23.7 Minuten, mit einer Standardabweichung von 3 Minuten, beträgt.

Bei seinen nächsten 13 Fahrten während des Berufsverkehrs notiert er sich seine eigenen Fahrzeiten und kommt auf einen Durchschnitt von 22.3 Minuten.

Berechne auf einem Signifikanzniveau von 5 %, ob der Bericht mit diesen Messungen übereinstimmen kann, unter der Annahme einer normalverteilten Fahrzeit und unter der Annahme, dass auch bei seinen Messungen die Standardabweichung 3 Minuten beträgt.