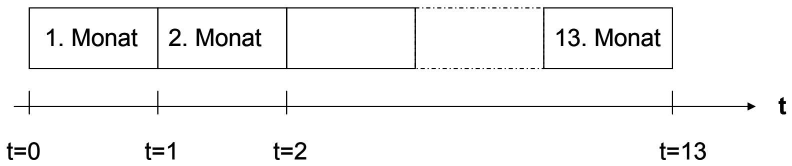
Übung 7

Aufgabe 7.1

Das voneinander unabhängige Auftreten von Regenereignissen innerhalb eines Jahres in einem Gebiet wird durch einen Poisson-Prozess mit der Intensität $\lambda(t)$ (d.h der mittleren Auftretensrate von Regenereignissen pro Zeiteinheit t),mit t = 0, 1, 2…, 13 für die entsprechenden Zeitintervalle beschrieben. Hierbei beschreibt t jeweils ein Zeitintervall von einem Monat.



a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass im 4. , 5. und 6. Monat insgesamt

- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet.

Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poisson Prozess mit der durchschnittlichen Anzahl Regenereignissen $\lambda(t) = 2$ folgen.

Für die Aufgabe 7.1 b) und c) wird angenommen, dass die Regenereignisse einem inhomogenen Poisson Prozess folgen, für welchen die Intensität für die jeweiligen Monate wie folgt definiert ist:

$$\lambda(t) \begin{cases} = \dfrac{2t}{3} & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \\ = 2 & \text{für } 3 < t \leq 7 \\ = \dfrac{13-t}{3} & \text{für } 7 < t \leq 13 \end{cases}$$

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass 3 oder mehr Regenfälle in den ersten 5 Monaten des Jahres auftreten.
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Ereignis während der Monate 8, 9, 10 *und* der letzen 3 Monate.

Hinweis: Für inhomogene Poisson-Prozesse wird angenommen, dass λ variabel mit der Zeit ist. Der Poisson-Parameter ν kann für jedes Zeitintervall (t_1, t_2) auf folgende Weise berechnet werden:

$$\nu = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt$$

Aufgabe 7.2

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.

Für gewöhnliche Bauwerke ist eine Lebenszeit von 50 Jahren vorgesehen. Die Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren resultieren in Bodenbeschleunigungsparametern, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % überschritten werden.

a) Zeige, dass die Wiederkehrperiode von 475 Jahren einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 10% in 50 Jahren entspricht.
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren tatsächlich innerhalb der 475 Jahre auftritt?

Es wird angenommen, dass das Auftreten der Erdbeben einem homogenen Poisson Prozess folgt.

Aufgabe 7.3

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbelverteilung folgt mit dem Mittelwert μ_X =10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welche der Wiederkehrperiode T von 100 Jahren entspricht?

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abflusses des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

Hinweis: Die Gumbelverteilungsfunktion hat nachfolgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert

σ_X – Standardabweichung

u – Parameter der Verteilung

α – Parameter der Verteilung

Aufgabe 7.4

Die Lebenszeit eines Dieselmotors wird als exponentialverteilt angenommen, mit dem Mittelwert $\mu_T = 24$ Monaten.
Normalerweise wird ein solcher Motor alle 6 Monate untersucht und für den Fall, dass ein Defekt gefunden wird, vollständig repariert. Es wird angenommen, dass ein Defekt ein schwerer Schaden ist, welcher zu einem Ausfall führt, falls er nicht repariert wird.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Motor vor der ersten Inspektion repariert werden muss.
b) Angenommen, die erste Inspektion wurde bereits durchgeführt und keine Reparatur war nötig. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Motor bis zur nächsten Inspektion nicht ausfällt.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Dieselmotor zwischen der ersten und der zweiten Inspektion ausfällt.
d) Ein Kraftwerk besitzt sechs dieser Dieselmotoren. Die Lebensdauer der Motoren wird als statistisch unabhängig angenommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Motor bei der ersten Inspektion repariert werden muss?
e) Als Anforderung wird festgelegt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Motor bei jeder Inspektion repariert werden muss, nicht mehr als 60% beträgt. Die Lebensdauer der Motoren wird als statistisch unabhängig angenommen. In welchem Intervall sollten die Motoren inspiziert werden?

Aufgabe 7.5 (Gruppenaufgabe)

Gegeben sei ein Quader, bei welchem die Kanten a, b und f (Abb. 8.1.1) gemessen wurden. Die Messungen beinhalten einen Messfehler, welcher als ε bezeichnet wird. Es wird angenommen, dass der Fehler ε erwartungstreu und normalverteilt ist. Die Standardabweichung des Fehlers ist σ_{ε} .

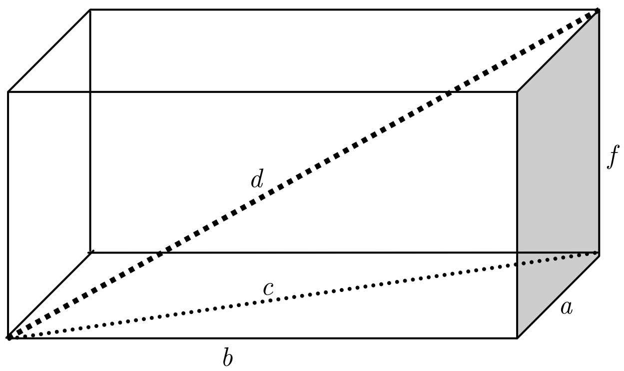


Abb. 8.1.1: Quader.

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion des Fehlers für d auf, wenn d mit Hilfe der Messungen in a, b und f berechnet wird.
b) Wenn die gleichen Messungen zur Berechnung von c verwendet werden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in c grösser als 2.4 σ_{ε} ist?