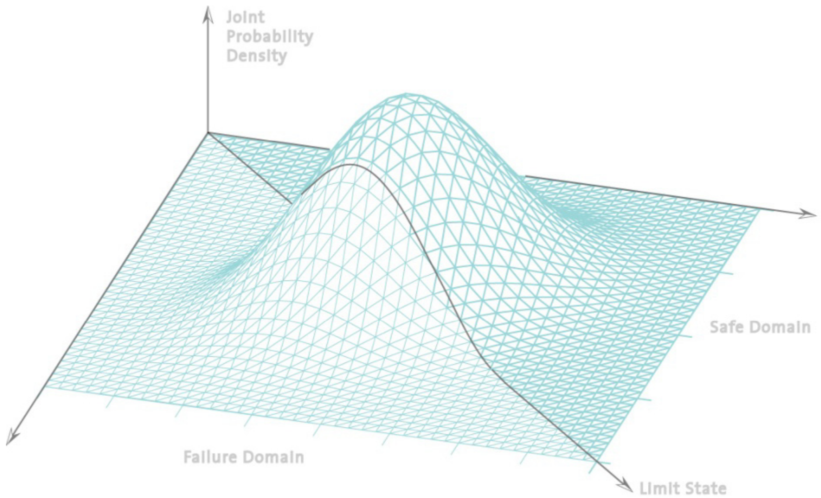
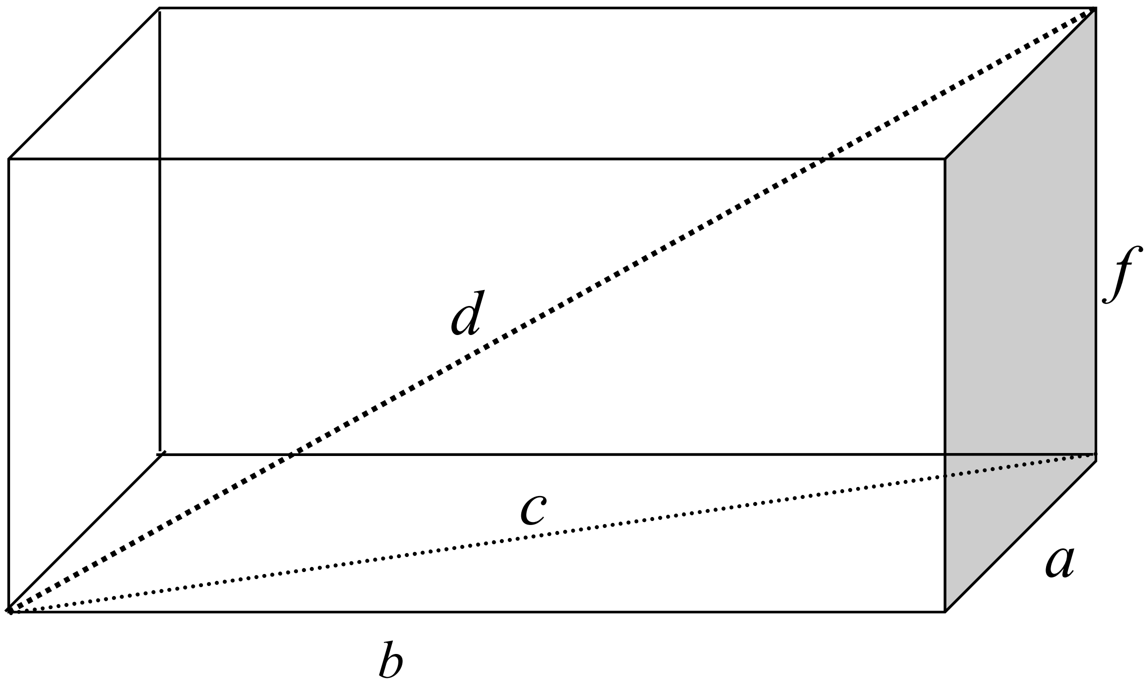


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

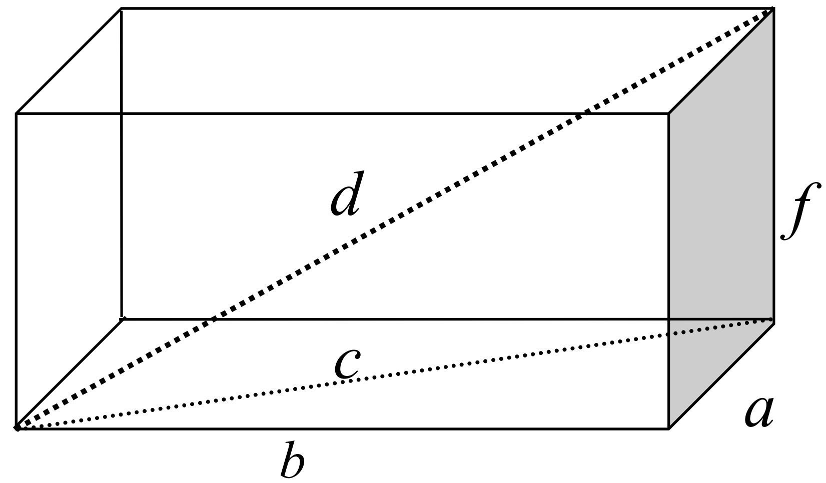
Übung 8

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

Gegeben sei ein Quader, bei welchem die Kanten a, b und f gemessen wurden. Die Messungen beinhalten einen Messfehler, welcher als ε bezeichnet wird. Es wird angenommen, dass der Fehler (erwartungstreu und) normalverteilt ist. Die Standardabweichung des Fehlers ist σ_ε .



Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

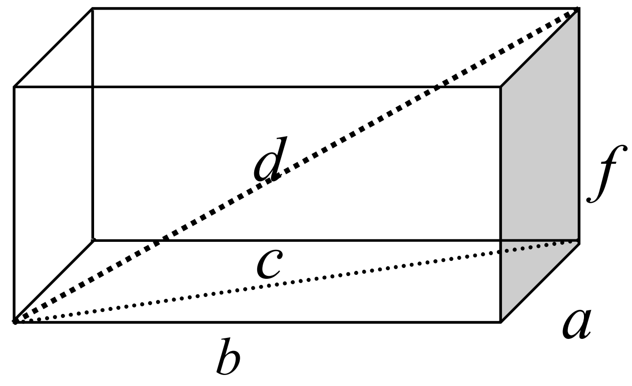


a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Fehlers für d auf, wenn d mit Hilfe der Messungen in a, b und f berechnet wird.

b) Wenn die gleichen Messungen zur Berechnung von c verwendet werden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in c grösser als $2.4 \cdot \sigma_\varepsilon$ ist?

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Fehlers für d auf, wenn d mit Hilfe der Messungen in a, b und f berechnet wird.



1. Schritt: Nehme an, dass sich der Fehler in d fortsetzt gemäss Pythagoras.

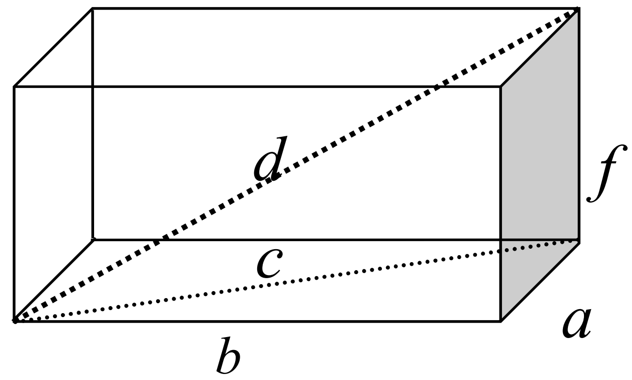
$$d^2 = f^2 + a^2 + b^2$$

$$\varepsilon_d = \sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$$

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

$$d^2 = f^2 + a^2 + b^2$$

$$\varepsilon_d = \sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$$



Zur Erinnerung

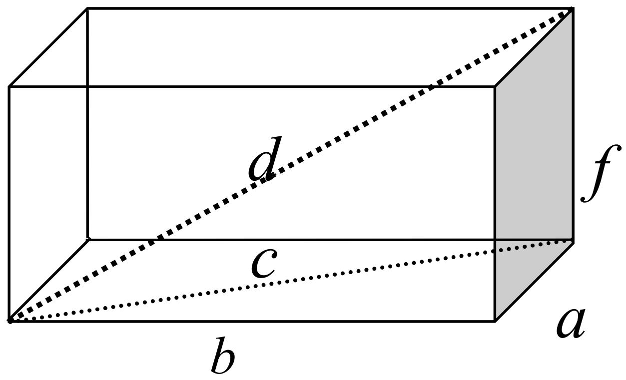
χ^2–Verteilung: $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, wobei X_i standardnormalverteilt

χ–Verteilung $Z = \sqrt{Y_n}$

Für eine χ – Verteilung müssten die Zufallsvariablen einer Standardnormalverteilung folgen. Daher müssen die Variablen standardisiert werden.

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

$$\varepsilon_d = \sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$$



2. Schritt: Mit einer Standardisierung kommt man auf eine χ -verteilte Zufallsvariable Z

(überlege: Was ist der Mittelwert eines Fehlers?)

$$Z = \frac{\varepsilon_d - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_f - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_a - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}$$

$$Z = \frac{\varepsilon_d}{\sigma_\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_f}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_a}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}$$

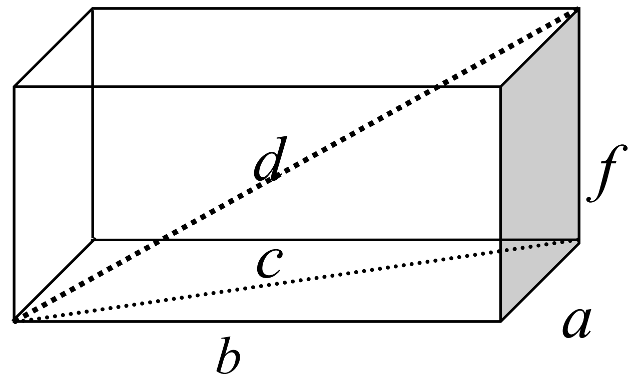
somit

ist Z χ – verteilt mit drei Freiheitsgraden.

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

$$Z \equiv \frac{\varepsilon_d}{\sigma_\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_f}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_a}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}$$

Z ist χ -verteilt mit n=3



3. Schritt:
   Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer χ-verteilten Zufallsvariable Z:
   (E.4) im Skript.

$$f_Z(z) = \frac{z^{(n-1)}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)}$$

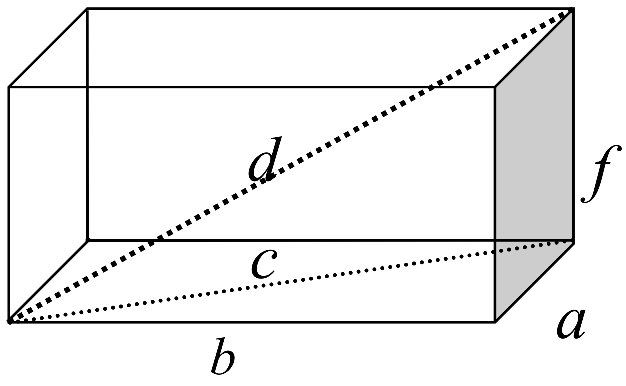
$$= \frac{z^{(3-1)}}{\underbrace{2^{\frac{3}{2}-1}}_{\sqrt{2}}\underbrace{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}} e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^2 e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)}$$

Eigenschaften der Gammaverteilung:
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

$$f_Y(y) = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| \cdot f_X(x)$$ (D.42) Skript



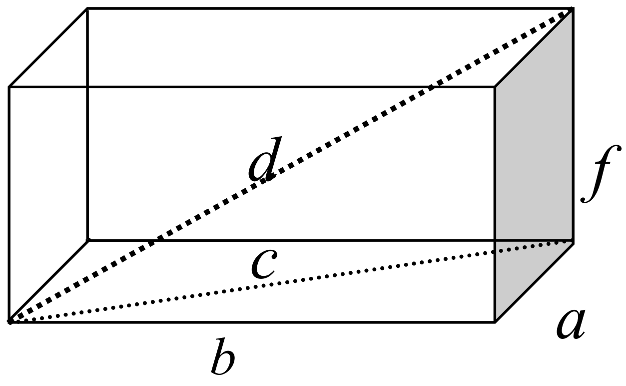
4. Schritt:
   Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von ε_d

$$f_{\varepsilon_d}(\varepsilon_d) = \left| \frac{\partial z}{\partial \varepsilon_d} \right| \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\varepsilon_d}{\sigma_e} \right)^2 e^{\left(\frac{-\left(\frac{\varepsilon_d}{\sigma_e} \right)^2}{2} \right)}$$

$$= \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\varepsilon_d}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 e^{\left(\frac{-\left(\frac{\varepsilon_d}{\sigma_e} \right)^2}{2} \right)}$$

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

b) Wenn die gleichen Messungen zur Berechnung von c verwendet werden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in c grösser als $2.4 \cdot \sigma_\varepsilon$ ist?



1. $$\varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$$

2. $$\frac{\varepsilon_c}{\sigma_\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}$$ χ–verteilt mit n=2 Freiheitsgraden

3. $$f_Z(z) = \frac{z^{(n-1)}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)} = \frac{z^{(2-1)}}{2^{\frac{2}{2}-1}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)} = z e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)}$$

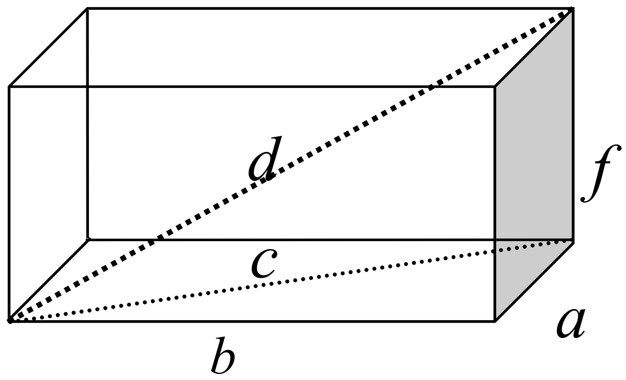
Eigenschaft der Gammaverteilung:

$\Gamma(1) = 1$

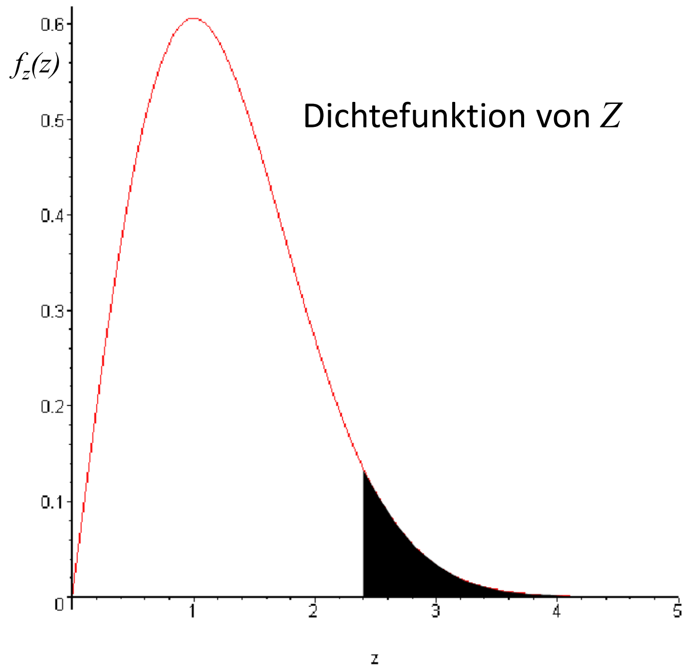
Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

4. $$P(\varepsilon_c > 2.4 \cdot \sigma_\varepsilon) = P(\frac{\varepsilon_c}{\sigma_\varepsilon} > 2.4) = P(Z > 2.4)$$

Mit $$Z = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}$$



$$\begin{aligned} P(Z > 2.4) &= 1 - \int_0^x f_Z(z)dz \\ &= 1 - \int_0^x z e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)} \\ &= 1 - \left(1 - e^{\left(-\frac{(2.4)^2}{2}\right)}\right) \\ &= e^{\left(-\frac{(2.4)^2}{2}\right)} = \underline{\underline{0.056}} \end{aligned}$$



Stichprobenstatistiken

Problemstellung

Wir wollen die Lage und Variabilität von Grundgesamtheiten beschreiben.

z.B. das Körpergewicht aller Studierenden an Schweizer Hochschulen im 2.Semester.

Stichprobenstatistiken

Problemstellung

Wir wollen die Lage und Variabilität von Grundgesamtheiten beschreiben.

z.B. das Körpergewicht aller Studierenden an Schweizer Hochschulen im 2.Semester. Wir beschreiben das Körpergewicht mit einer Zufallsvariablen. Die Zufallsvariable hat einen Mittelwert und eine Standardabweichung.
Die Grundgesamtheit besteht aus eine Sequenz identisch verteilter Zufallsvariablen X_i .

$$X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$$

Stichprobenstatistiken

Problemstellung

Wir wollen die Lage und Variabilität von Grundgesamtheiten beschreiben.

z.B. das Körpergewicht aller Studierenden an Schweizer Hochschulen im 2.Semester. Wir beschreiben das Körpergewicht mit einer Zufallsvariablen. Die Zufallsvariable hat einen Mittelwert und eine Standardabweichung.
Die Grundgesamtheit besteht aus eine Sequenz identisch verteilter Zufallsvariablen X_i .

$$X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$$

Wir wollen nun den Mittelwert und die Standardabweichung abschätzen -> anhand einer Stichprobe mit Umfang n = 10.

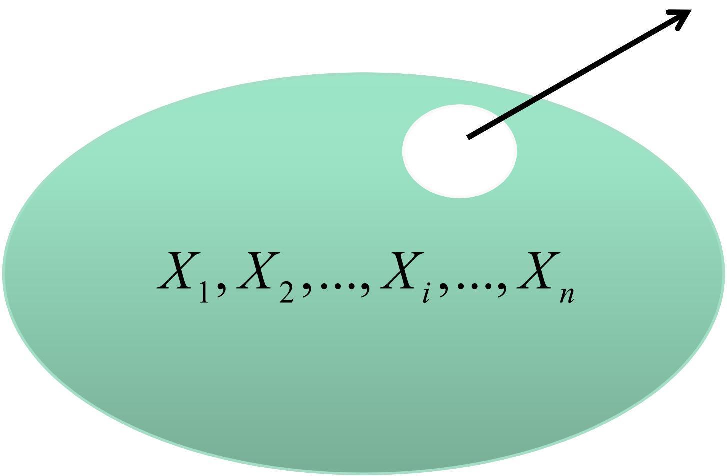
Stichprobenstatistiken

Problemstellung

Wir wollen die Lage und Variabilität von Grundgesamtheiten beschreiben.

Wir wollen nun den Mittelwert und die Standardabweichung abschätzen
-> anhand einer Stichprobe mit Umfang n = 10.

$$X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{i+10}$$



$$E\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad E\left[S_{unbiased}^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sigma_X^2$$

$$Var\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\sigma_X^2 \qquad Var\left[S_{unbiased}^2\right] = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma_X^4$$

Aufgabe 8.2

Die Entnahme einer Stichprobe des Studentengewichtes mit Stichprobenumfang $n = 4$ ergibt folgende Werte:
95, 77, 83, 71.

Das Studentengewicht lässt sich durch die Zufallsvariable X modellieren.

σ_X ist bekannt und gegeben mit 9 kg.

a)Schätze den Stichprobenmittelwert anhand von der Stichprobe. (Erwartungswert und Varianz).
b)Stelle die Streuung des Mittelwertes grafisch dar.
c)Ermittle den Bereich in dem der wahre Mittelwert mit 95% Konfidenz zu erwarten ist.

Aufgabe 8.2

a) Schätze den Stichprobenmittelwert anhand von der Stichprobe. (Erwartungswert und Varianz).

$$E\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{4}326 = 81.5$$

$$Var\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\sigma_X^2 = \frac{1}{4}81 = 20.25$$

Aufgabe 8.2

b) Stelle die Streuung des Mittelwertes grafisch dar.

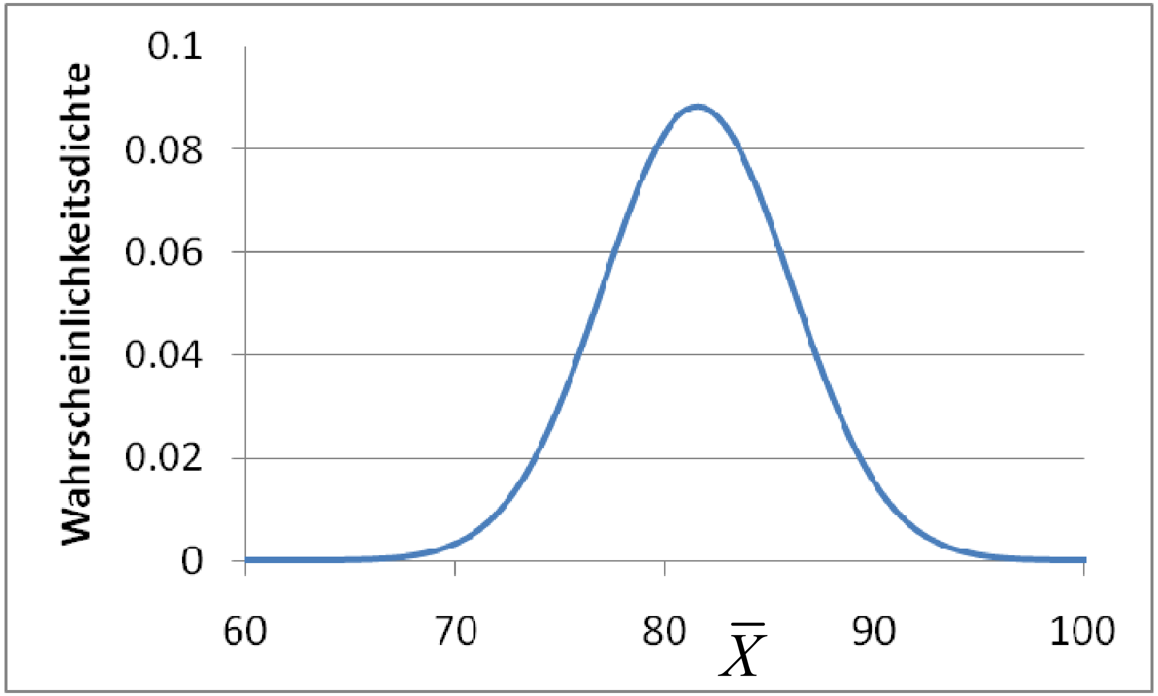
$E[\bar{X}] = 81.5$

$Var[\bar{X}] = 20.25$

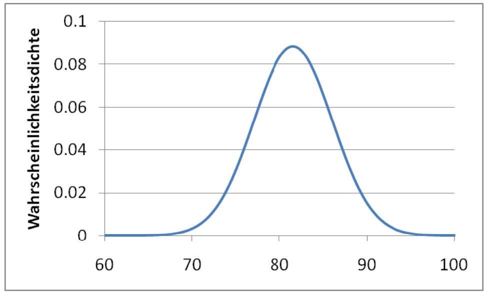
Annahme $\bar{X}$ ist Normalverteilt -> .

$\mu_{\bar{X}} = 81.5$

$\sigma_{\bar{X}} = 4.5$



Aufgabe 8.2



c) Ermittle den Bereich in dem der wahre Mittelwert mit 95% Konfidenz zu erwarten ist.

Stichprobenmittelwert

wahrer Mittelwert

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

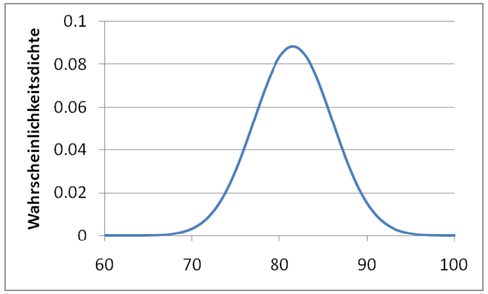
bekannte Standardabweichung

Anzahl Beobachtungen

Signifikanzniveau

Aufgabe 8.2

$$\bar{x} = 81.5$$
$$\sigma_X = 9$$
$$n = 4$$
$$\alpha = 0.05$$



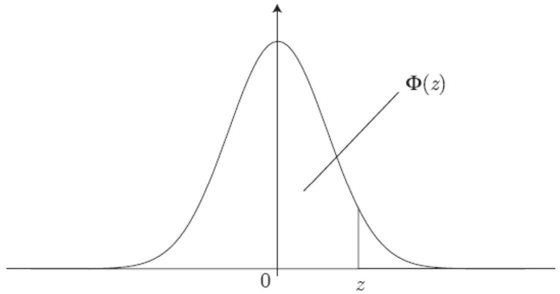
c) Ermittle den Bereich in dem der wahre Mittelwert mit 95% Konfidenz zu erwarten ist.

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

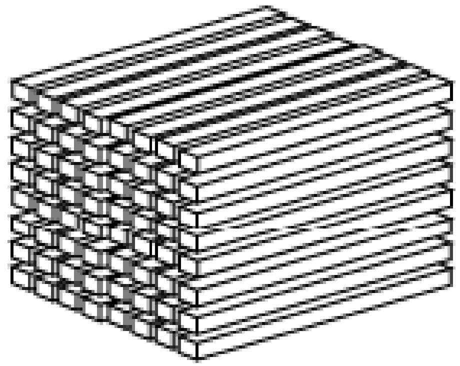
$$P\left[81.5 - k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}} < \mu_X < 81.5 + k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}}\right] = 0.95$$

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = TABELLE...$$

Aufgabe 8.3



Probability density function of the standard normal random variable.



Skript Anhang T1

0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		

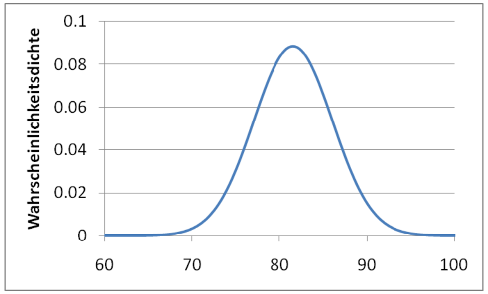
Aufgabe 8.2

$\bar{x} = 81.5$

$\sigma_X = 9$

$n = 4$

$\alpha = 0.05$



c) Ermittle den Bereich in dem der wahre Mittelwert mit 95% Konfidenz zu erwarten ist.

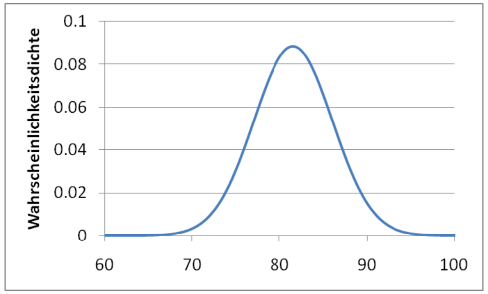
$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[81.5 - k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}} < \mu_X < 81.5 + k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}}\right] = 0.95$$

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

Aufgabe 8.2

$$\bar{x} = 81.5$$
$$\sigma_X = 9$$
$$n = 4$$
$$\alpha = 0.05$$



c) Ermittle den Bereich in dem der wahre Mittelwert mit 95% Konfidenz zu erwarten ist.

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

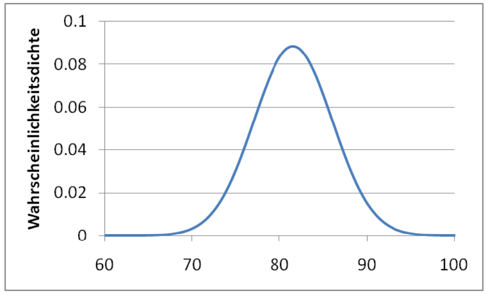
$$P\left[81.5 - k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}} < \mu_X < 81.5 + k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}}\right] = 0.95$$

$$P\left[81.5 - 1.96 \cdot 9 \frac{1}{\sqrt{4}} < \mu_X < 81.5 + 1.96 \cdot 9 \frac{1}{\sqrt{4}}\right] = 0.95$$

$$\underline{\underline{P\left[72.68 < \mu_X < 90.32\right] = 0.95}}$$

Aufgabe 8.2

$$\bar{x} = 81.5$$
$$\sigma_X = 9$$
$$n = 4$$
$$\alpha = 0.05$$



c) Ermittle den Bereich in dem der wahre Mittelwert mit 95% Konfidenz zu erwarten ist.

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[81.5 - k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}} < \mu_X < 81.5 + k_{\alpha/2} 9 \frac{1}{\sqrt{4}}\right] = 0.95$$

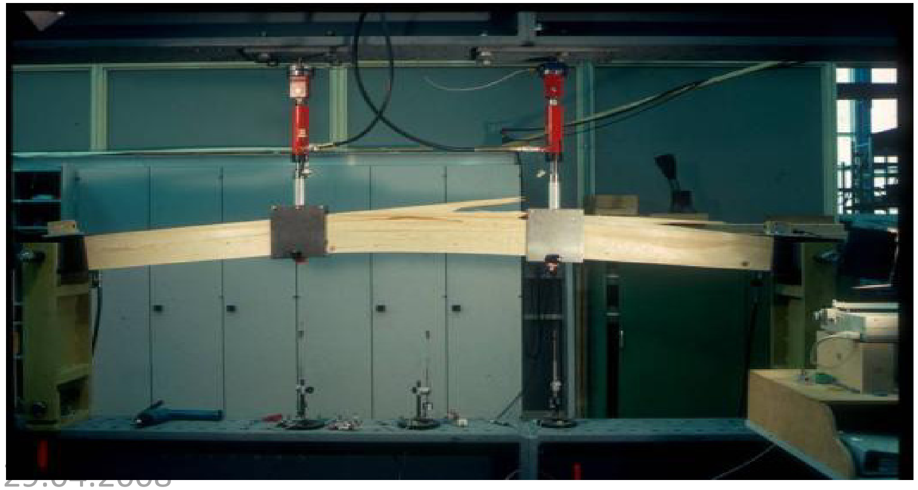
$$P\left[81.5 - 1.96 \cdot 9 \frac{1}{\sqrt{4}} < \mu_X < 81.5 + 1.96 \cdot 9 \frac{1}{\sqrt{4}}\right] = 0.95$$

$$\underline{\underline{P\left[72.68 < \mu_X < 90.32\right] = 0.95}}$$

Der wahre Mittelwert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 im Intervall zwischen 72.68 kg und 90.32 kg.

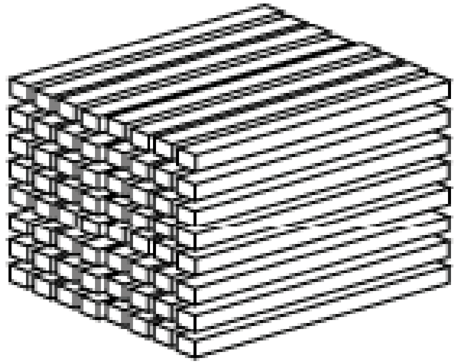
Aufgabe 8.3

Bei der Qualitätskontrolle von Schnittholz einer bestimmten Sortierklasse in einem grossen Sägewerk wird pro Produktionstag eine Stichprobe mit zehn Brettern entnommen und jedes Brett auf seine Steifigkeit getestet. Der Mittelwert der Steifigkeit für jede Stichprobe ist normalverteilt und wird in Kontrolltabellen festgehalten.



Basierend auf Erfahrung kann angenommen werden, dass die Standardabweichung der Steifigkeit unabhängig von der Qualität $\sigma = 1430\ MPa$ beträgt. Qualitätsschwankungen äussern sich nur in Form von Schwankungen des Mittelwertes.

Aufgabe 8.3

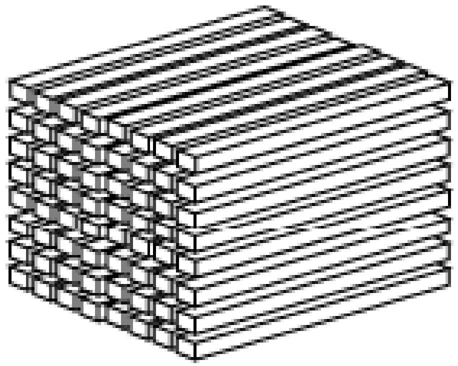


a) Berechne das Konfidenzintervall für die Schätzung des Stichprobenmittelwertes nach 15 Produktionstagen bei gegebenem $\alpha = 0.05$.

b) Berechne aus a) das Konfidenzintervall für einen gegebenen Stichprobenmittelwert von $\bar{X} = 11'000 MPa$.

c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha = 0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

Aufgabe 8.3



a) Berechne das Konfidenzintervall für die Schätzung des Stichprobenmittelwertes bei gegebenem $\alpha = 0.05$.

Was ist gegeben?

15 Produktionstage $\rightarrow \quad n = 10 \cdot 15 = 150 \qquad \sigma = 1430\ MPa \qquad \alpha = 0.05$

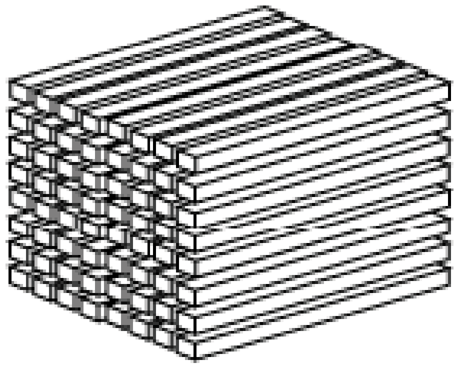
Stichprobenmittelwert normalverteilt

Lösungsansatz?

Für den Fall, dass der Mittelwert unsicher und die Varianz bekannt ist, ist das so genannte zweiseitige und symmetrische Konfidenzintervall des Mittelwertes gegeben durch:

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

Aufgabe 8.3



a) Berechne das Konfidenzintervall für die Schätzung des Stichprobenmittelwertes bei gegebenem $\alpha = 0.05$.

Was ist gegeben?

15 Produktionstage → $n = 150$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\alpha = 0.05$

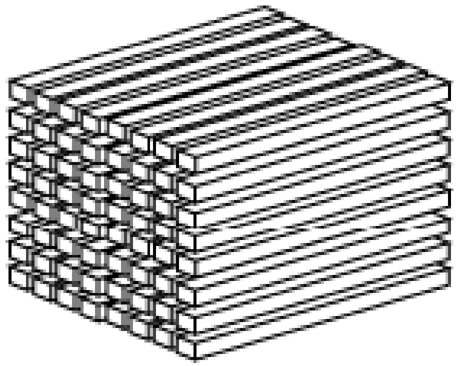
Stichprobenmittelwert normalverteilt

Lösungsansatz?

$$P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{0.05}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = \underline{\underline{1.96}}$$

Aufgabe 8.3



a) Berechne das Konfidenzintervall für die Schätzung des Stichprobenmittelwertes bei gegebenem $\alpha = 0.05$.

Was ist gegeben?

15 Produktionstage $\rightarrow n = 150$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\alpha = 0.05$

Stichprobenmittelwert normalverteilt

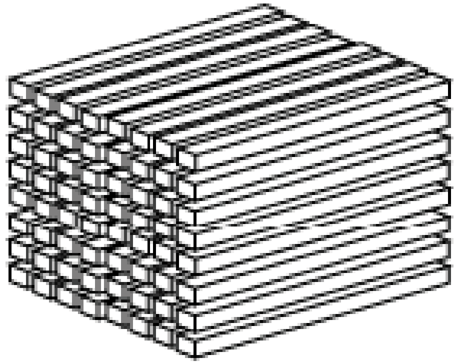
Lösungsansatz?

$$P\left[-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu_X}{1430\frac{1}{\sqrt{150}}} < 1.96\right] = 1 - 0.05$$

$$P\left[-228.85 < \bar{X} - \mu_X < 228.85\right] = 0.95$$

$$P\left[\bar{X} - 228.85 < \mu_X < \bar{X} + 228.85\right] = 0.95$$

Aufgabe 8.3



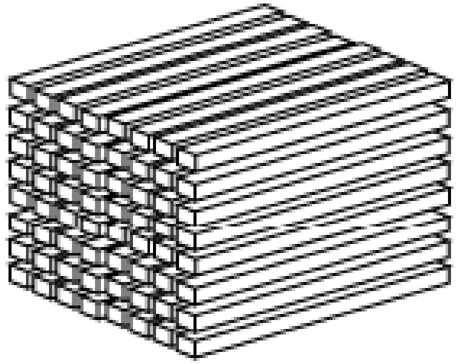
b) Berechne aus a) das Konfidenzintervall für einen beobachteten Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 11'000 MPa$.

$$P\left[\bar{X} - 228.85 < \mu_X < \bar{X} + 228.85\right] = 0.95$$

$$P\left[11'000 - 228.85 < \mu_X < 11'000 + 228.85\right] = 0.95$$

$$P\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right] = 0.95$$

Aufgabe 8.3



b) Berechne aus a) das Konfidenzintervall für einen beobachteten Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 11'000 MPa$.

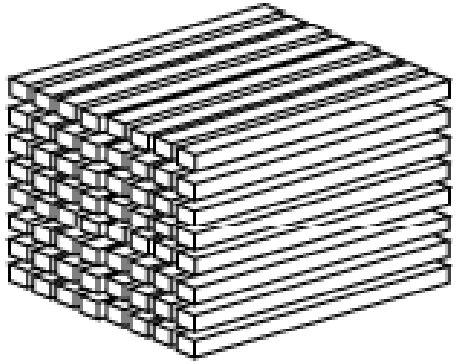
$$P\left[\bar{X} - 228.85 < \mu_X < \bar{X} + 228.85\right] = 0.95$$

$$P\left[11'000 - 228.85 < \mu_X < 11'000 + 228.85\right] = 0.95$$

$$P\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right] = 0.95$$

Der wahre Mittelwert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 im Intervall zwischen 10'771.15 MPa und 11'228.85 MPa.

Aufgabe 8.3



c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha=0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

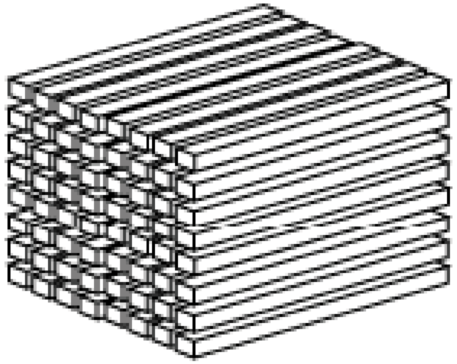
Was ist gegeben?

$\alpha = 0.01$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\overline{x} = 11'000 MPa$ Stichprobenmittelwert normalverteilt

$\text{Konfidenzintervall}\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$

Wie gross ist n?

Aufgabe 8.3



c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha=0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

Was ist gegeben?

$\alpha = 0.01$ $\quad\sigma = 1430\ MPa$ $\quad\overline{x} = 11'000MPa$ Stichprobenmittelwert normalverteilt

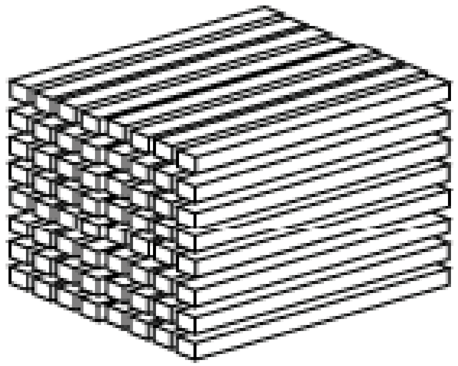
Konfidenzintervall$\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$

Wie gross ist n?

$$P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\overline{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \overline{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Aufgabe 8.3



c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha=0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

Was ist gegeben?

$\alpha = 0.01$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\bar{x} = 11'000 MPa$ Stichprobenmittelwert normalverteilt

Konfidenzintervall$\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$

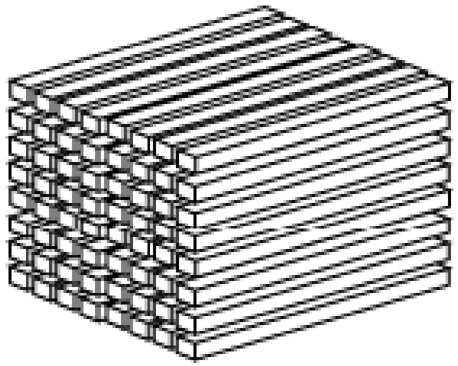
Wie gross ist n?

$$P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Symmetrie

$$P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Aufgabe 8.3



c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha=0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

Was ist gegeben?

$\alpha = 0.01$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\overline{x} = 11'000 MPa$ Stichprobenmittelwert normalverteilt

$$\text{Konfidenzintervall}\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$$

Wie gross ist n?

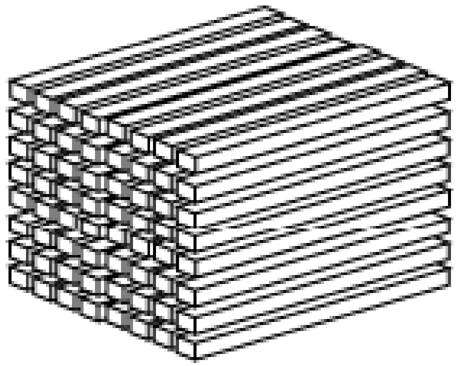
$$\text{Konfidenzintervall}\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$$

ist gleich

$$P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} = 10'771.15$$

Aufgabe 8.3



c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha=0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

Was ist gegeben?

$\alpha = 0.01$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\bar{x} = 11'000 MPa$ Stichprobenmittelwert normalverteilt

$$\text{Konfidenzintervall}\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$$

Wie gross ist n?

$$\text{Konfidenzintervall}\left[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85\right]$$

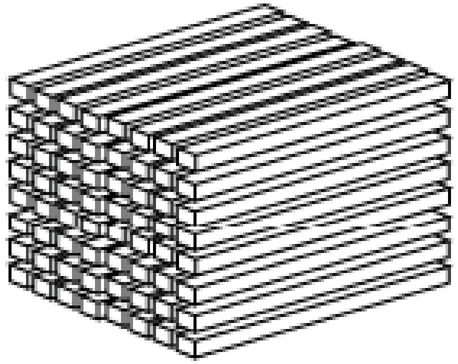
ist gleich

$$P\left[\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

?

$$\Rightarrow \bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} = 10'771.15$$

Aufgabe 8.3



c) Wie viele Stichprobenentnahmen wären notwendig, um zu zeigen, dass der Mittelwert aller Stichproben mit mindestens $\alpha=0.01$ im gleichen Konfidenzintervall wie unter b) berechnet liegt?

Was ist gegeben?

$\alpha = 0.01$ $\sigma = 1430\ MPa$ $\bar{x} = 11'000 MPa$ Stichprobenmittelwert normalverteilt

Konfidenzintervall $[10'771.15 < \mu_X < 11'228.85]$

Wie gross ist n?

$$\bar{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} = 10'771.15$$

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{0.01}{2}\right) = 2.60$$

$$11'000 - 2.60 \cdot 1430 \frac{1}{\sqrt{n}} = 10'771.15$$

$$n = \left(\frac{1}{0.0616}\right)^2$$

$$\underline{\underline{n = 263.53 \rightarrow n \geq 264}}$$

Aufgabe 8.4 *Gruppenaufgabe*

Um die Qualität des Betons auf einer Baustelle zu prüfen, wird die Druckfestigkeit des hergestellten Betons getestet.

Erfahrungsgemäss folgt die Druckfestigkeit einer Normalverteilung und die Varianz der Druckfestigkeit für diese Betonsorte liegt bei 16.36 [MPa^2].

Das Akzeptanzkriterium für die Qualität des Betons auf der Baustelle ist, dass die Druckfestigkeit einen Mittelwert von 30 [MPa] hat .

Dies wird täglich am jeweils hergestellten Beton gemessen.
Um die Homogenität der Verarbeitung zu gewährleisten, sind sowohl kleinere wie auch grössere Werte für die Druckfestigkeit nicht akzeptabel.

Aufgabe 8.4 *Gruppenaufgabe*

Aus einer Tagesproduktion werden 15 Proben entnommen und ihre Druckfestigkeit getestet.

Kann die Qualität des Betons akzeptiert werden?

Teste die Hypothese jeweils für ein Signifikanzniveau von 10 % und 1 %.

Nummer der Probe (i)	Druckfestigkeit (MPa)
1	24.4
2	26.5
3	27.8
4	29.2
5	39.2
6	37.8
7	35.1
8	30.8
9	30.3
10	39.7
11	38.4
12	33.3
13	33.5
14	28.1
15	34.6

Testen von Hypothesen

Generelles Vorgehen beim Hypothesentest

Bitte verfolgt beim Lösen dieses Schema

1. Festlegen der Null-Hypothese
2. Festlegen der Vorgehensregel
3. Auswahl des Signifikanzniveaus
4. Berechnung der Akzeptanzkriterien
5. Durchführung des Tests und Überprüfung der Akzeptanz
6. Rückschluss auf gewähltem Signifikanzniveau

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit…