ÜBUNG 5

Aufgabe 5.1

Die marginale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer zwei-dimensionalen Zufallsvariablen $Z = \left(X, Y\right)^T$ ist wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{für} \ \ -1 \le x \le 1 \\ \\ 0 & \textit{andere} \end{cases}$$

und

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot (2y - y^2) & \textit{für} \ \ 0 \le y \le 2 \\ \\ 0 & \textit{andere} \end{cases}$$

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} zwischen X und Y entspricht: $\rho_{XY} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$.

b) Berechne die Kovarianz $Cov(6X; 4Y)$.

c) Berechne die Varianz von $6X - 4Y + 2$.

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$.

Aufgabe 5.2

An einer Wetterstation werden Windgeschwindigkeiten gemessen.

In den vergangenen Jahren wurden die Messungen mit einem weniger genauen Gerät durchgeführt. Wir interessieren uns nun für den Zusammenhang zwischen dem genauen und weniger genauen Messgerät. Dafür wird die multivariate Wahrscheinlichkeit der gemessenen Windgeschwindigkeiten beider Geräte in den nächsten Jahren erfasst.

Tabelle 5.2.1 zeigt die multivariate Wahrscheinlichkeit der Anzahl der Tage, an denen die gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert überschreitet, für beide Geräte.

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

Tabelle 5.2.1: Multivariate Wahrscheinlichkeit von N_G *und* N_U.

N_G zeigt darin die Anzahl der Tage, an denen die mit dem genauen Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.
N_U zeigt die Anzahl der Tage, an denen die mit dem ungenaueren Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der Tage, an denen Überschreitungen des Grenzwertes von beiden Geräten gemessen wurden, entspricht.

b) Es gilt die Annahme, dass das genaue Gerät immer die exakte Windgeschwindigkeit misst.
Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Windgeschwindigkeit den Grenzwert innerhalb eines Jahres 0, 1, 2 und 3 mal überschreitet, wenn die Angaben des ungenaueren Messgeräts den Grenzwert zwei mal übersteigen?

Aufgabe 5.3 (Gruppenaufgabe)

Autobahnbrücken müssen während ihrer Lebensdauer gewartet werden. Die Zeitdauer T zwischen den Wartungseinheiten folgt einer Exponentialverteilung mit einem Mittelwert von 10 Jahren . Die Wartungsarbeiten nehmen einen Zeitraum S in Anspruch, die ebenfalls exponentiell verteilt ist und einen Mittelwert von 1/12 Jahren aufweist.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, z.B. $Z=S+T$.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?