1. Teilprüfung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

FS 2008

Lösungen

Dr. J. Köhler

ETH Zürich

Donnerstag 10. April 2008
08:15 – 09:45

Teil 1: Multiple Choice (56 Punkte maximal)

1.1 In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A einen Wert in den Grenzen annehmen von:

$0 \le P(A) \le 1$ ☑

$-1 \le P(A) \le 1$ ☐

$-\infty \le P(A) \le \infty$ ☐

1.2 Zwei Ereignisse A und B schliessen sich gegenseitig aus. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

$P(B|A) = P(B)$ ☐

$P(B|A) = 0$ ☑

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ☑

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ ☑

1.3 Für ein Ereignis E im Wahrscheinlichkeitsraum Ω stellt $\overline{E}$ das Komplementärereignis dar. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

$(E \cup \overline{E}) = \Omega$ ☑

$(E \cap \overline{E}) = \Omega - 1$ ☐

$(E \cup \overline{E}) = \varnothing$ ☐

1.4 Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von zwei voneinander abhängigen Ereignissen A_1 und A_2 ist durch $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A_1 ist gleich 0.15, die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A_2 ist 0.2, und die Wahrscheinlichkeit von $P(A_1 \mid A_2)$, ist 0.6. Welches Ergebnis ist richtig?

$P(A_1 \cup A_2) = 0.35$ ☐

$P(A_1 \cup A_2) = 0.12$ ☐

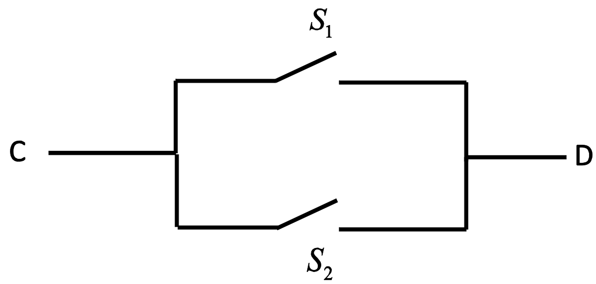
$P(A_1 \cup A_2) = 0.23$ ☑

Lösung:

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2) = 0.60 \cdot 0.20 = 0.12$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.15 + 0.20 - 0.12 = 0.23$$

1.5 Gegeben ist folgendes Schaltsystem mit zwei Schaltern. Es fliesst Strom von C nach D, wenn mindestens einer der beiden Schalter S_i geschlossen ist:



Mit E_1 bezeichnen wir das Ereignis {„Schalter S_1 ist geschlossen“}.

Mit E_2 bezeichnen wir das Ereignis {„Schalter S_2 ist geschlossen“}.

$\overline{E}_i$ stellt das Komplementärereignis dar.

a) Welche/s der folgenden Ereignisse ist/sind korrekt durch E_i ausgedrückt?

Bei welchem Ereignis A_i fliesst Strom von C nach D?

- $A_1 = E_1 \cap E_2$ ☑
- $A_2 = E_1 \cup E_2$ ☑
- $A_3 = E_1 \cap \overline{E}_2$ ☑

Bei welchem Ereignis B_i fliesst kein Strom von C nach D?

- $B_1 = E_1 \cap \overline{E}_2$ ☐
- $B_2 = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$ ☑
- $B_3 = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$ ☐

b) Die Schalter S_i seien unabhängig voneinander offen oder geschlossen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schalter S_i geschlossen ist, sei $p_i = 0.5$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_S {„es fliesst Strom von C nach D“}?

- $P(A_S) = 0.5$ ☐
- $P(A_S) = 0.75$ ☑
- $P(A_S) = 1$ ☐

Lösung:

$$P(A_1) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = 0.5 + 0.5 - 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$$

1.6 Die Studierenden (n=191) der Vorlesung „Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung“ im FS 2008 wurden u.a. hinsichtlich ihres Alters befragt. Das Histogramm in *Abbildung 1.1* zeigt das Ergebnis dieser Umfrage.

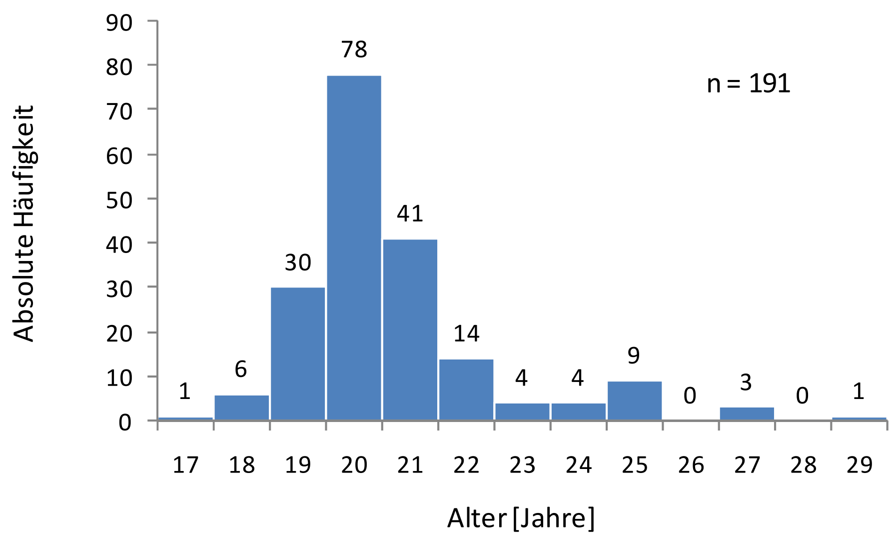


Abbildung 1.1: Histogramm zur Verteilung der Altersangaben.

Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an:

a) Die Verteilung ist rechtsschief. ☑

Der Modus beträgt 78. ☐

Der Modus beträgt 20. ☑

Die relative Häufigkeit der Altersangabe „19 Jahre“ beträgt 0.246. ☐

b) Der Median ist grösser als der Modus. ☐

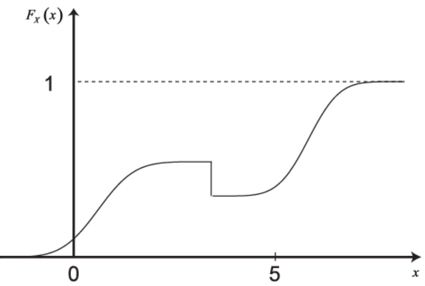
Der Median ist kleiner als der Modus. ☐

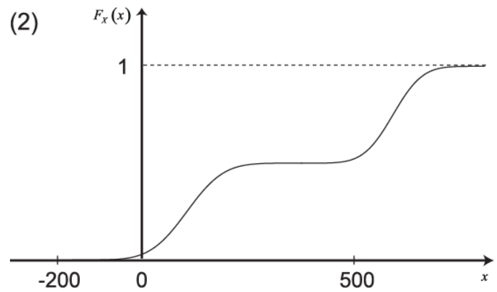
Median und Modus haben den gleichen Wert. ☑

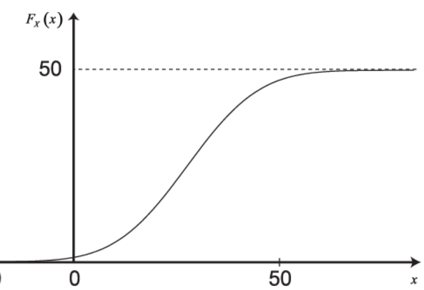
Der Stichprobenraum liegt im geschlossenen Intervall von 17 bis 29 Jahren. ☑

1.7 Welche der folgenden Funktionen ergibt/ergeben einen Sinn? Bitte kreuzen Sie diese an.

a) Als kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion?

(1)


(2)


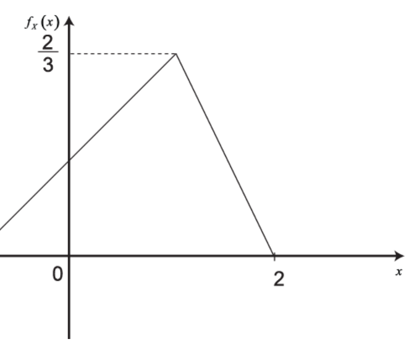
(3)


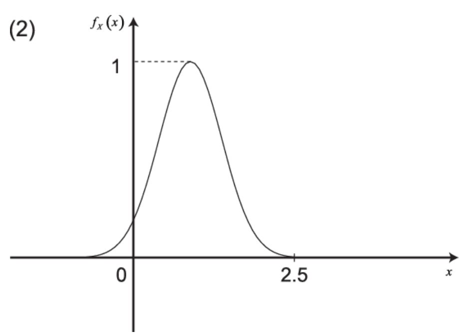
(1) ☐

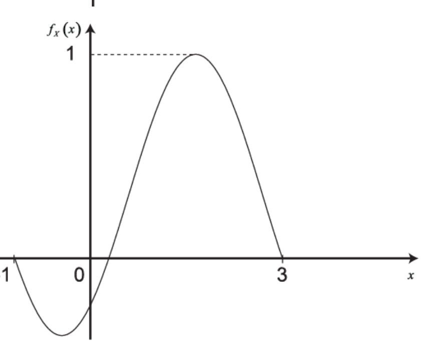
(2) ☑

(3) ☐

b) Als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion?

(1)


(2)


(3)


(1) ☑

(2) ☐

(3) ☐

1.8 Bretter der Holzart Fichte sollen für eine Holzkonstruktion verwendet werden. Anhand von Versuchen ist bekannt, dass die Zugfestigkeit eines Brettes von der sogenannten Ästigkeit abhängig ist. Die Ästigkeit pro Brett lässt sich anhand der Anzahl und Grösse der im Brett sichtbaren Astteile berechnen. Der Zusammenhang zwischen Ästigkeit und Zugfestigkeit ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

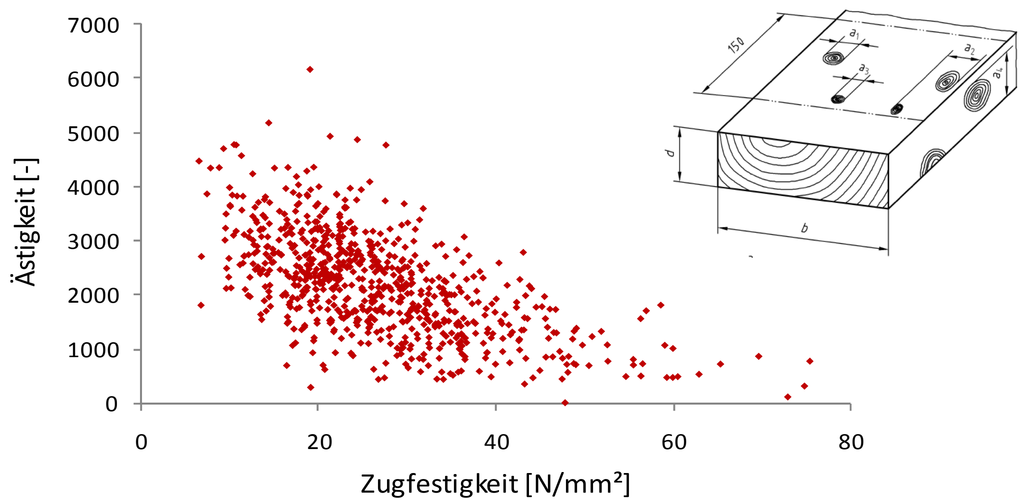


Abbildung 1.2 *Darstellung der Ästigkeit und Zugfestigkeit von Fichten-Brettern.*
+ Illustration von Astteilen in Brettern.

a) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- ☑ Bei der Abbildung handelt es sich um ein zweidimensionales Streudiagramm.
- ☐ Aus der Abbildung sind die Wahrscheinlichkeiten der Zugfestigkeit direkt ablesbar.
- ☐ Bei der Abbildung handelt es sich um einen Quantil-Plot.
- ☐ Keine der Aussagen ist richtig.

b) Anhand einer sorgfältigen Betrachtung der Abbildung ist zu erkennen, dass:

- ☑ eine negative Korrelation zwischen Ästigkeit und Zugfestigkeit besteht.
- ☐ mit steigender Ästigkeit auch die Zugfestigkeit des Holzes zunimmt.
- ☑ mit steigender Ästigkeit die Zugfestigkeit des Holzes abnimmt.
- ☑ die Verteilung der Zugfestigkeit rechtsschief ist.

c) Welche der folgenden Aussagen trifft am ehesten zu?

Der Korrelationskoeffizient liegt ungefähr bei 45 N/mm². ☐

Der Korrelationskoeffizient liegt ungefähr bei +0.55. ☐

Der Korrelationskoeffizient liegt ungefähr bei -0.55. ☑

Es ist keine Korrelation erkennbar, daher beträgt der Korrelationskoeffizient genau 1. ☐

1.9 Um die Streuung von Versuchsergebnissen zu beurteilen eignen sich folgende Masszahlen (bitte ankreuzen):

Arithmetische Mittel	☐	Korrelationskoeffizient	☐
Median	☐	Standardabweichung	☑
Varianz	☑		

1.10 Kreuzen Sie im Folgenden die Aussage(n) an, welche für kontinuierliche Zufallsvariablen zutrifft (zutreffen):

$0 \le F_X(x) \le 1$ ☑

$\int_a^\infty f_X(x)dx = 1 - F(a)$ ☑

wenn $a < b$, dann gilt $\int_a^b f_X(x)dx = F(a) - F(b)$ ☐

$m_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j^1 p_X(x_j)$ ☐

Name:

1.11 Wie ist das 2. zentrale Moment einer kontinuierlichen Zufallsvariable definiert? Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$$ ☐

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx$$ ☐

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$$ ☑

1.12 Die Temperatur wird ausgedrückt als Zufallsvariable X. Der Siedepunkt eines chemischen Elements sei bekannt mit Mittelwert $\mu_X = 100$ °C und Varianz = 25°C². Eine Temperaturveränderung um 1° Grad Celsius entspricht 1,8 Fahrenheit. Der Nullpunkt der Celsius-Skala entspricht 32 Fahrenheit. Wieviel beträgt die Standardabweichung, in Fahrenheit ausgedrückt?

- Standardabweichung ist 9 Fahrenheit ☑
- Standardabweichung ist 41 Fahrenheit ☐
- Standardabweichung ist 45 Fahrenheit ☐
- Standardabweichung ist 16.2 Fahrenheit ☐
- Keine der Antworten ist richtig. ☐

Lösung: Varianzoperator, Skript D.18:

$$Var[a+bX] = Var[32+1.8X] = 1.8^2 Var[X] = 1.8^2 \cdot 25 = 81$$
$$\sigma_X = \sqrt{81} = 9 \text{ Fahrenheit}$$

1.13 In einer Stadt gibt es 6 Baustellen. Jede Baustelle füllt pro Tag entweder 0 oder 1 Container voll Bauschutt.

Die Firma A hat mit den Betreibern dieser Baustellen einen Vertrag abgeschlossen, um auf Abruf die Container abzutransportieren. Von jedem der n=6 Betreiber könnte die Firma A am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von p=0.5 beauftragt werden, um von einer Baustelle einen Container mit Bauschutt wegzufahren.

Beantworten Sie mit Hilfe der Tabelle 1.1 die folgenden Fragen.

Tabelle 1.1: Werte der Binomialverteilung für p=0.5, n=6, x_i =[0,6] wobei x_i =Anzahl Transporte.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0.0156	0.0938	0.2344	0.3125	0.2344	0.0938	0.0156
$P(X \le x_i)$	0.0156	0.1094	0.3438	0.6562	0.8906	0.9844	1

a) Wie viele Aufträge für Transporte (x_i) werden mit grösster Wahrscheinlichkeit am nächsten Tag eintreffen?

- 0 ☐
- 1 ☐
- 2 ☐
- 3 ☑
- 4 ☐
- 5 ☐
- 6 ☐

Lösung ablesbar: Die höchste Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei x_i =3.

b) Die Kapazität der Firma liegt für einen Arbeitstag bei x_i = 4 Transporten. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Firma A am nächsten Arbeitstag nicht alle Aufträge erledigen kann?

- 0.0156 ☐
- 0.2344 ☐
- 0.8906 ☐
- 0.1094 ☑
- 1 ☐

Lösung: Die Firma kann nicht alle Aufträge erfüllen, wenn 5 oder 6 Aufträge eingehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 5 und oder 6 Aufträge eingehen, ist $P(X=5)+P(X=6)$ =0,0938+0,0156=0.1094. Kann auch aus der kumulativen Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion herausgelesen werden: $P(X>4)=1-P(X \le 4)$ =1-0.8906=0.1094.

1.14 Ein Student muss einen Multiple Choice Test mit 10 Fragen lösen. Jede Frage hat 2 mögliche Antworten, von denen nur eine richtig ist. Der Student löst den Test durch zufälliges Ankreuzen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Test besteht, wenn mindestens 3 richtige Antworten zum Bestehen der Prüfung erforderlich sind?

- [ ] 0.055
- [ ] 0.097
- [x] 0.945
- [ ] 0.901

Lösung: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

Die Frage lautet: Wahrscheinlichkeit für 0, 1, oder 2 richtige Antworten von den 10 Antworten → Binomialverteilung! Mit Wahrscheinlichkeit 0.5, da von 2 Antworten eine richtig ist, durch zufälliges Ankreuzen also die Wahrscheinlichkeit 0.5 besteht, die richtige Antwort anzukreuzen.

Gemäss Binomialverteilung ist

$$P(X=0) = \binom{10}{0} 0.5^0 0.5^{10} = 0.00097$$

$$P(X=1) = \binom{10}{1} 0.5^1 0.5^9 = 0.0097$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} 0.5^2 0.5^8 = 0.044$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 0.00097 - 0.0097 - 0.044 = 1 - 0.055 = \underline{\underline{0.945}}$$

1.15 Im Cockpit eines grossen Verkehrsflugzeuges zeigt eine Kontrollleuchte an, ob das Fahrwerk für die Landung korrekt ausgefahren ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrollleuchte korrekt funktioniert ist 0.999. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht funktioniert, z.B. durch Ausfall der Leuchtdiode oder durch fehlerhaftes Signal ist demnach 0.001. Ist das Fahrwerk tatsächlich nicht richtig ausgefahren leuchtet die Diode in jedem Fall nicht.
Nun kommt es recht selten vor, dass das Fahrwerk eines grossen Verkehrflugzeuges nicht korrekt ausfährt. Es kann angenommen werden, dass dies nur einmal bei 10^6 Flügen vorkommt.

a) Das Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Der Pilot will das Fahrwerk ausfahren, stellt aber fest, dass die Kontrollleuchte nicht leuchtet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Fahrwerk tatsächlich nicht korrekt ausgefahren ist.

- [ ] 0.000222
- [ ] 0.000777
- [x] 0.000999
- [ ] 0.003566

Lösung:

Ereignis D: Diode leuchtet; Ereignis $\overline{D}$: Diode leuchtet nicht

Ereignis F: Diode funktioniert; Ereignis $\overline{F}$: Diode funktioniert nicht

Ereignis A: Fahrwerk ist ausgefahren; Ereignis $\overline{A}$: Fahrwerk ist nicht ausgefahren

Gegeben:

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=\frac{1}{10^6}$ $\qquad$ $\mathrm{P}(\mathrm{A})=1-\frac{1}{10^6}$

$\mathrm{P}(\overline{D}|\overline{A})=1$ $\qquad$ $\mathrm{P}(D|\overline{A})=0$

$\mathrm{P}(F|\overline{D})=0.999$ $\qquad$ $\mathrm{P}(F|D)=0.999$

$\mathrm{P}(\overline{F}|\overline{D})=0.001$ $\qquad$ $\mathrm{P}(\overline{F}|D)=0.001$

$$\text{Gesucht: } \mathrm{P}(\overline{A}|\overline{D})=\frac{\mathrm{P}(\overline{D}|\overline{A})P(\overline{A})}{\mathrm{P}(\overline{D}|\overline{A})P(\overline{A})+\mathrm{P}(\overline{D}|A)P(A)}=\frac{1\cdot\frac{1}{10^6}}{1\cdot\frac{1}{10^6}+0.001(1-\frac{1}{10^6})}=\underline{\underline{0.000999}}$$

b) Wie könnte man die Kontrolleinrichtung verbessern?

Teil 2: Rechenaufgabe (28 Punkte maximal)

Bei der Auswertung der in der ersten Vorlesung erhobenen Daten interessieren wir uns für den Zusammenhang von Haarfarbe und Augenfarbe der Studentinnen und Studenten. In der folgenden Tabelle steht *H* für die Haarfarbe und *A* für die Augenfarbe.
Es wird angenommen, dass alle Studierenden entweder blondes, braunes oder schwarzes Haar haben und dass bei alle Studierenden die Augenfarbe entweder blaue, braune, grüne oder blaugraue ist.

Tabelle 2.1: Multivariate Wahrscheinlichkeiten für Augen- und Haarfarbe.

	A = blau	A = braun	A = grün	A = blaugrau	$P(H)$
H = blond	0.086	**0.034**	0.023	**0.052**	**0.195**
H = braun	0.115	0.402	**0.138**	0.063	**0.718**
H = schwarz	**0.006**	0.075	0	0.006	**0.087**
$P(A)$	**0.207**	**0.511**	**0.161**	0.121	**1**

a) Vervollständigen Sie die Tabelle unter Berücksichtigung, dass bei 19.5% aller Studierenden die Haarfarbe *H* = blond und bei 8.7 % aller Studierenden die Haarfarbe *H* = schwarz ist.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studierender, welche/r braune Haare hat auch noch grüne Augen hat?

$$P\left(A = grün \mid H = braun\right) = \frac{P\left(H = braun \mid A = grün\right) \cdot P\left(A = grün\right)}{P\left(H = braun\right)}$$

$$= \frac{P\left(H = braun \cap A = grün\right)}{P\left(H = braun\right)} = \frac{0.138}{0.718} = \underline{\underline{0.192}}$$

Bei der Auswertung der in der ersten Vorlesung erhobenen Daten interessieren wir uns des Weiteren für das Körpergewicht der Studierenden. Das Körpergewicht wird mit einer normalverteilten Zufallsvariablen X modelliert. Die Normalverteilung hat einen Mittelwert μ_X von 71 kg und eine Standardabweichung σ_X von 9.3 kg.

c) Berechnen Sie basierend auf diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student/ eine Studentin schwerer ist als 85 kg.

Lösung:

$N(71,9.3)$

$P(X>85)=1-P(X\leq 85)$

$\Phi(\frac{X-71}{9.3})=\Phi(1.505)=0.9338$

$P(X>85)=1-0.9338=\underline{\underline{0.0662}}$

Der Fahrstuhl im HIL hat eine maximal zulässige Traglast von 900 kg. Nach der Statistikvorlesung strömen 13 Studierende in diesen Fahrstuhl.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Traglast überschritten?
Verwenden Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

Lösung:

Sei Y die neue Zufallsvariable, gebildet aus der Summe der Zufallsvariablen X_i

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n=13} E[X_i] = 13 \cdot 71\text{kg} = 923\text{kg}$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n=13} Var[X_i] = 13 \cdot (9.3\text{kg})^2 = 1124.37\text{kg}^2 \rightarrow \sigma_Y = 33.53\text{kg}$$

$$P(Y > 900) = 1 - P(Y \leq 900)$$

Standardisierung:

$$P(\frac{Y-923}{33.53} \leq \frac{900-923}{33.53})$$

$$\Phi(\frac{-23}{33.53}) = \Phi(-0.686)$$

$$\Phi(0.686) = 0.75$$

$$\Phi(-0.686) = 1 - 0.75 = 0.25$$

$$P(Y > 900) = 1 - P(Y \leq 900) = 1 - 0.25 = \underline{\underline{0.75}}$$