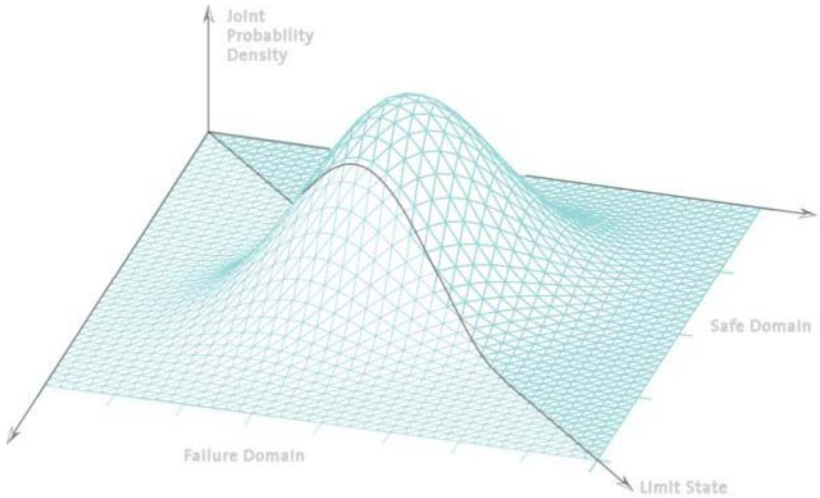


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

1. Teilprüfung - Erkenntnisse

Tipps und Tricks (Generell):

- Nutzen Sie die Zeit, die Sie in der Vorlesung und Übung verbringen zur aktiven Mitarbeit.
- Nutzen Sie die alten Prüfungsaufgaben und die Aufgaben im Skript für eine gezielte Prüfungsvorbereitung.
- Lösen Sie immer die Gruppenaufgabe.
- Nutzen Sie die Hilfestellung der Assistenten. (Sprechstunden)

1. Teilprüfung - Erkenntnisse

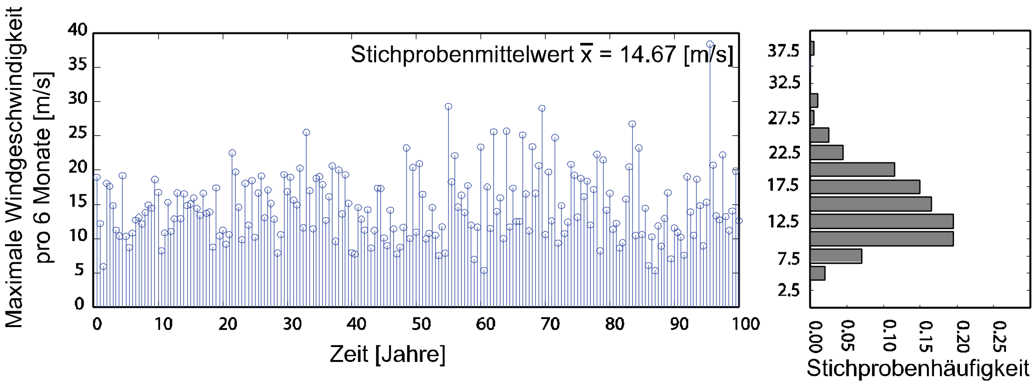
Tipps und Tricks (in der Prüfung):

- Beachten Sie die Anzahl möglicher Punkte pro Aufgabe für ein strategisches Zeitmanagement.
- Erstellen Sie sich Ihr persönliches Formelblatt.
- Geben Sie zu jedem Ergebnis, das Sie liefern den Lösungsweg an.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und vor jede Lösung die Nummer der dazugehörigen Aufgabe.

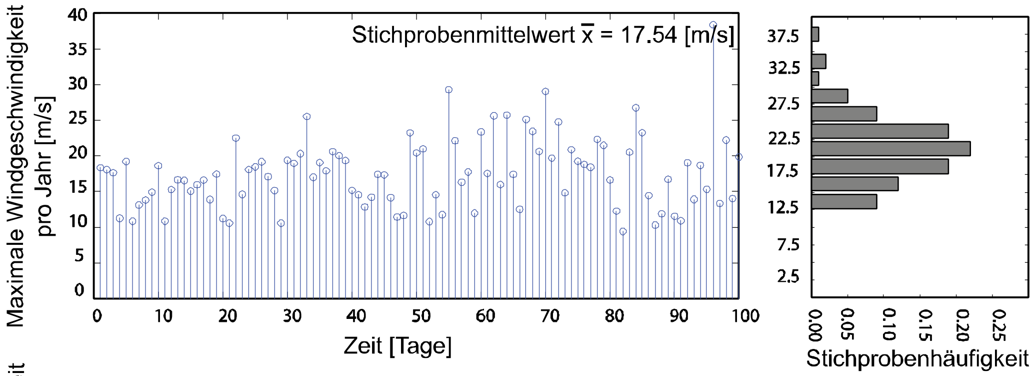
Inhalte der heutigen Vorlesung

- Kurze Zusammenfassung der letzten Vorlesung
- Parameterschätzung für Stichproben (Grundlagen)
- Konfidenzintervalle
- Testen der statistischen Signifikanz
  - Vorgehen beim Hypothesen-Test
  - Testen des Mittelwertes mit bekannter Varianz
  - Testen des Mittelwertes mit unbekannter Varianz
  - Testen der Varianz
  - Testen von zwei oder mehreren Datensätzen

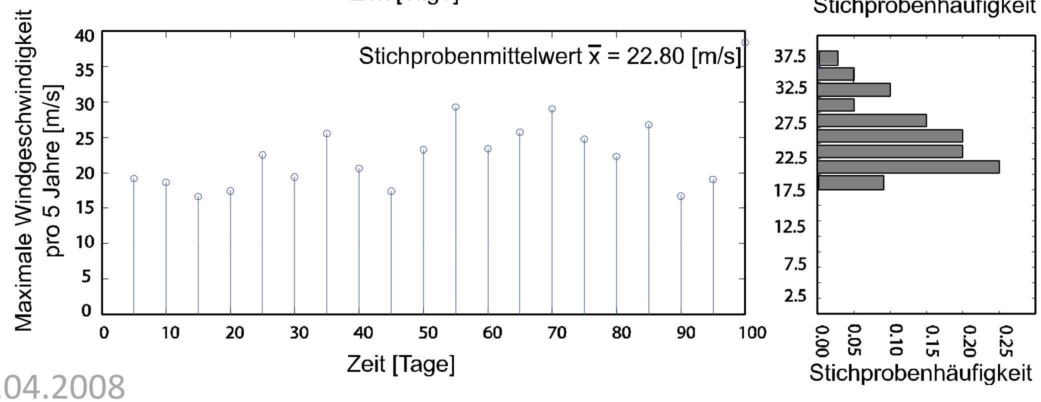
Extremwertverteilungen



Beobachtete 6-monatliche Extremwerte



Beobachtete jährliche Extremwerte



Beobachtete 5-Jahres Extremwerte

Extremwertverteilungen

Wenn die Extremwerte innerhalb einer Periode T eines ergodischen Zufallsprozesses $X(t)$ unabhängig sind und der Verteilung

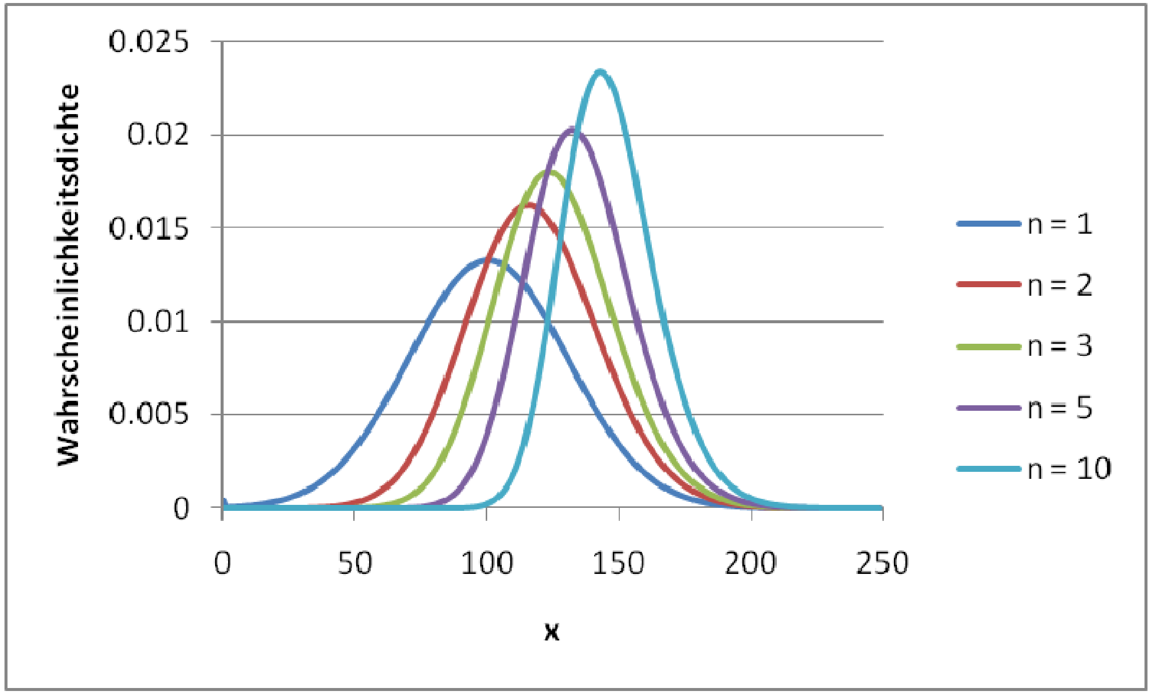
$$F_{X,T}^{\max}(x)$$

folgen, dann werden die Extremwerte des gleichen Prozesses innerhalb der Periode

$$n \cdot T$$

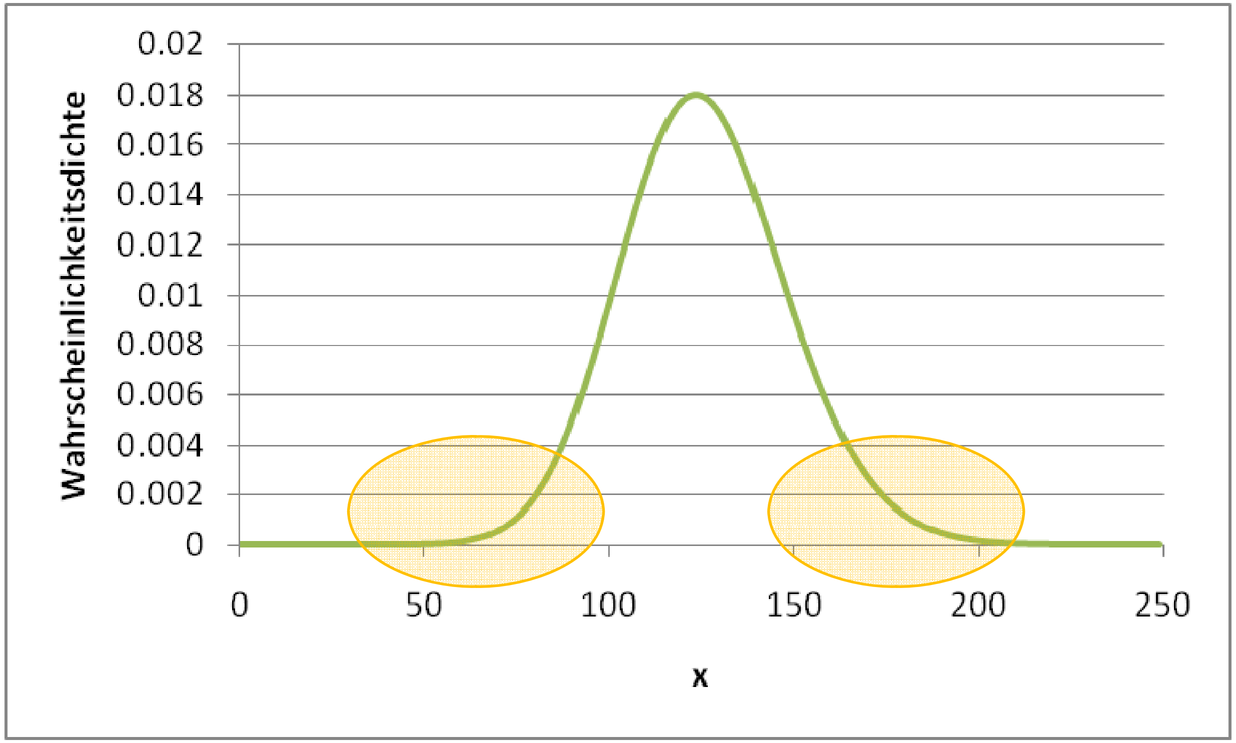
folgender Verteilung folgen:

$$F_{X,nT}^{\max}(x) = \left(F_{X,T}^{\max}(x)\right)^n$$



Extremwertverteilungen

Verschieden Typen von Extremwertverteilungen in Abhängigkeit von der Form der Dichteverteilung der Variablen in den ‚Extremen'.



Typ I: Oberer Bereich fällt exponentiell ab -> z.B. Gumbel max.

Typ II: nach unten begrenzt + Abfall im oberen Bereich $F_X(x) = 1 - \beta(\frac{1}{x})^k$ -> z.B. Frechet max.

Typ III: nach unten begrenzt bei ε und Abfall im unteren Bereich $F(x) = c(x - \varepsilon)^k$ -> z.B. Weibull min

Neue Verteilungstypen

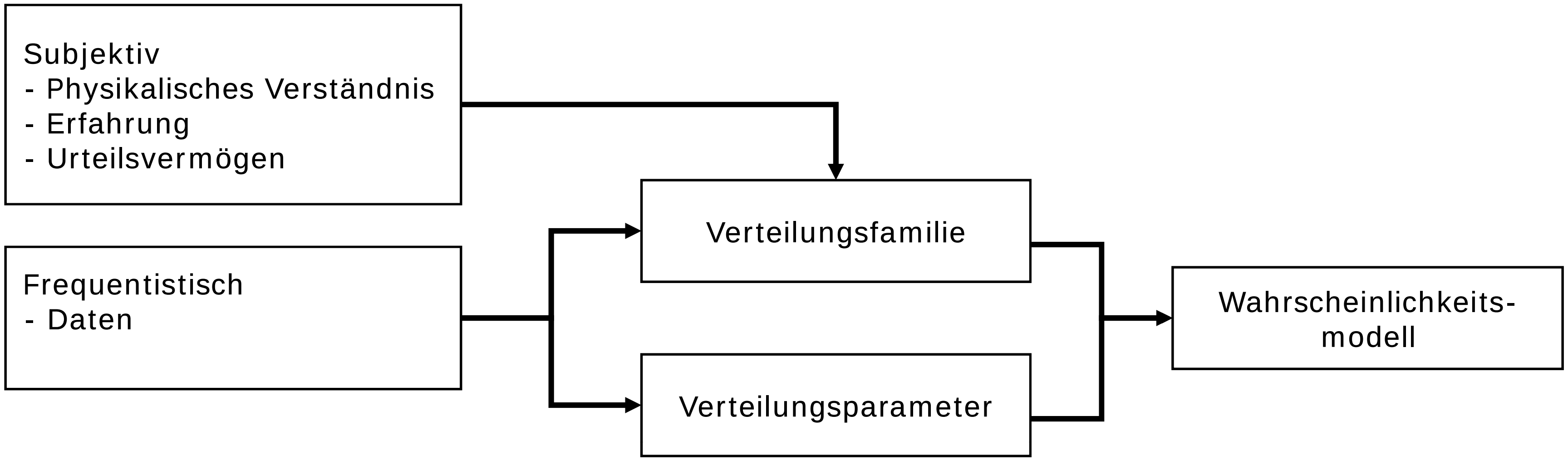
Basierend auf unabhängigen normal verteilten Zufallsvariablen lassen sich folgende Verteilungen ableiten

Verteilungstyp	Falls
– Chi-Quadrat Verteilung	Summe von quadrierten N(0;1)
– Chi-Verteilung	Quadratwurzel von Chi-Quadrat
– *t*-Verteilung	Ratio zwischen N(0;1) und Chi/*n*
– *F*-Verteilung	Ratio zwischen zwei Chi-Quadraten

Übersicht: Abschätzung und Modellerstellung

- Verschiedene Informationstypen werden bei der Entwicklung eines Ingenieurmodells verwendet.

  - subjektive Information
  - frequentistische Information



Parameterschätzung für Stichproben

Wenn neue Daten verfügbar sind, ist der erste Schritt, diese zu beurteilen.

Daten/Beobachtungen

n	x_n	$F_X(x_n)$
1	24.4	0.047619048
2	27.6	0.095238095
3	27.8	0.142857143
4	27.9	0.19047619
5	28.5	0.238095238
6	30.1	0.285714286
7	30.3	0.333333333
8	31.7	0.380952381
9	32.2	0.428571429
10	32.8	0.476190476
11	33.3	0.523809524
12	33.5	0.571428571
13	34.1	0.619047619
14	34.6	0.666666667
15	35.8	0.714285714
16	35.9	0.761904762
17	36.8	0.80952381
18	37.1	0.857142857
19	39.2	0.904761905
20	39.7	0.952380952

→ Mittelwert

→ Varianz

→ Median

→

→ Usw..

Funktion von Stichproben

Stichproben Charakteristik

oder

Stichproben Statistik

Parameterschätzung für Stichproben

Beispiel: Körpergewicht der Studierenden.

	1. Probe	2. Probe	3. Probe	4. Probe	5. Probe
	G [kg]	G [kg]	G [kg]	G [kg]	G [kg]
1	75	65	63	72	59
2	75	77	62	78	73
3	80	68	58	59	73
4	72	85	76	65	69
5	84	71	93	90	56
6	90	76	72	76	60
7	55	79	58	62	71
8	85	80	76	77	75
9	69	75	58	57	60
10	70	80	79	63	70

Mittelwert	75.5	75.6	69.5	69.9	66.6
Standardabweichung	8.99	5.47	10.51	9.40	6.34

Parameterschätzung für Stichproben

Die Zufallsvariable X ist beschrieben durch ihre Verteilungsfunktion.

Die Momente der Zufallsvariablen und die Parameter der Verteilungsfunktion sind konstant (aber unbekannt).

Die Stichproben sind Realisationen der Zufallsvariable X :

$$X_i, \quad i = 1, 2, ..n$$

Diese sind variabel. So auch die Stichproben-Statistiken.

Die Momente der Stichproben wie der Stichprobenmittelwert und die Stichprobenvarianz sind Zufallsvariablen!

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Parameterschätzung für Stichproben

Die Stichproben Statistiken sind Zufallsvariablen, solange die Ergebnisse das Experiments noch nicht realisiert sind.

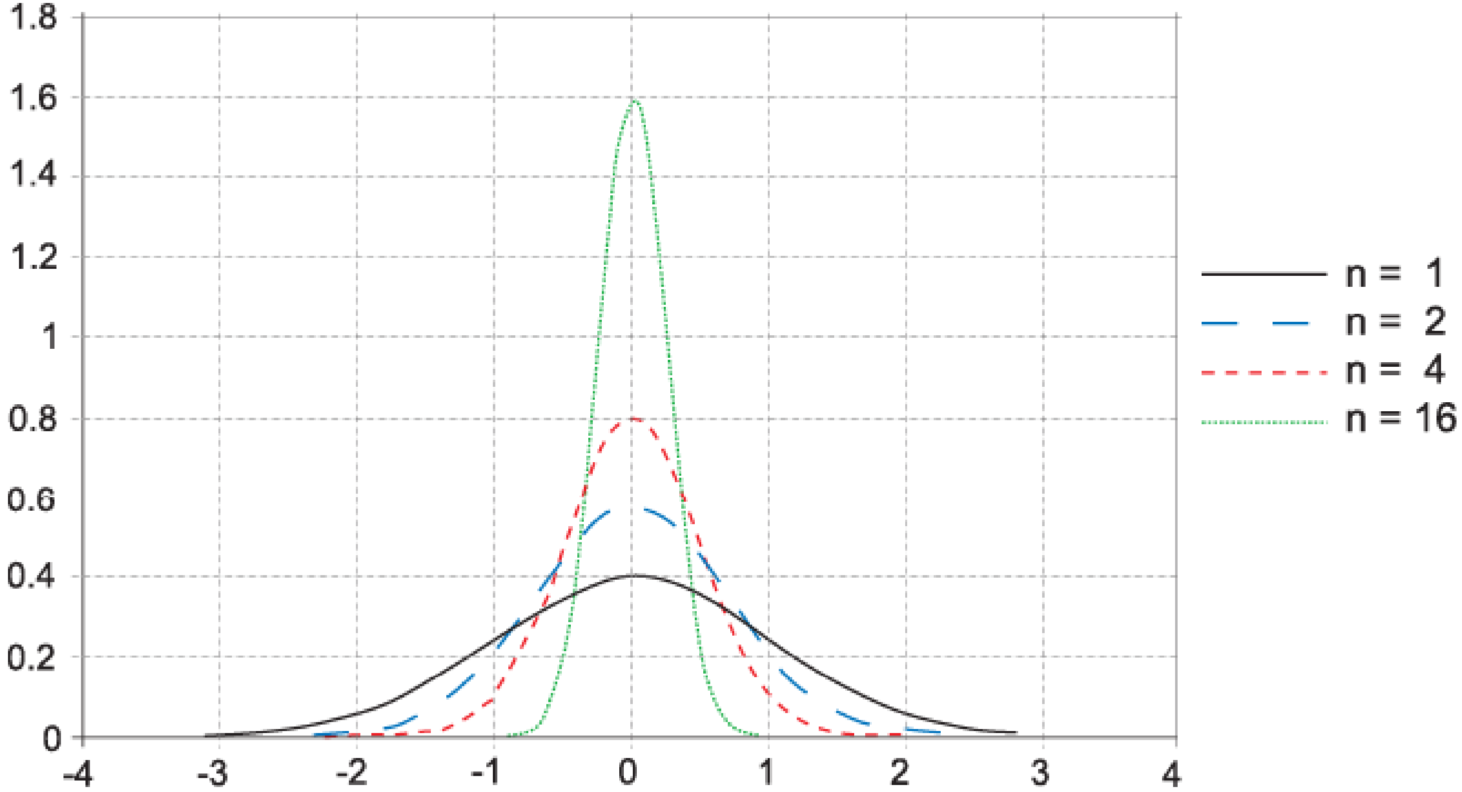
Der Erwartungswert und die Varianz des Stichprobenmittelwertes können folgendermassen bestimmt werden:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n \cdot \mu_X = \mu_X$$

$$Var\left[\bar{X}\right] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sigma_X^2$$

Parameterschätzung für Stichproben

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Stichprobenmittelwert kann als eine Normalverteilung angenommen werden – Zentraler Grenzwertsatz



Parameterschätzung für Stichproben

Für die Stichproben Varianz erhalten wir:

$$E\left[S^2\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu))^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i-\mu)^2\right]-n\,E\left[(\overline{X}-\mu)^2\right]\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\cdot E\left[(X_i-\mu)^2\right]-n\,E\left[(\overline{X}-\mu)^2\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\cdot\sigma_X^2\ -\ n\frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

$$=\sigma_X^2-\frac{1}{n}\sigma_X^2=\frac{(n-1)}{n}\sigma_X^2$$

Der Erwartungswert der Stichprobenvarianz ist nicht gleich der Varianz der Zufallsvariablen – verzerrt (biased).

Parameterschätzung für Stichproben

- Wir können nun einfach erwartungstreue / unverzerrte (unbiased) Schätzer für die Varianz bestimmen:

$$S^2_{unbiased} = \frac{n}{n-1} S^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Vorhergehend haben wir gesehen, dass Schätzer z.B. des Mittelwertes mit Unsicherheiten assoziiert sind, und wir haben Ausdrücke erstellt, um ihren Mittelwert und ihre Varianz zu bestimmen.

- Basierend auf diesen Informationen ist es uns möglich, das so genannte Konfidenzintervall der Schätzer zu bestimmen.

- Konfidenzintervalle können als Intervalle verstanden werden, innerhalb welchen z.B. der Mittelwert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gefunden werden kann.

Konfidenzintervalle für Schätzer

Wir können ein Konfidenzintervall z.B. für den Mittelwert erstellen.

Für den Fall, dass der Mittelwert unsicher und die Varianz bekannt ist, ist das so genannte zweiseitige und symmetrische Konfidenzintervall des Mittelwertes gegeben durch:

Stichprobenmittelwert

wahrer Mittelwert

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

bekannte Standardabweichung

Anzahl Stichproben

Signifikanzniveau

Konfidenzintervalle für Schätzer

Das Konfidenzintervall definiert ein Intervall, in dem der Stichprobenmittelwert mit der Wahrscheinlichkeit 1-α liegt.

$$P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$$

Bekannte Standardabweichung

Stichproben Mittelwert

Wahrer Mittelwert

Anzahl Stichproben

Das Konfidenzintervall kann, durch die Annahme, dass der Mittelwert normalverteilt ist, wie folgt bestimmt werden:

$$k_{\alpha/2}=\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\Phi^{-1}\left(1-\frac{0.05}{2}\right)=1.96$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

Für den Fall, dass $\alpha = 0.05$, $n = 16$ und $\sigma_X = 20$ erhalten wir

$$P\left[-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu_X}{20 \frac{1}{\sqrt{n}}} < 1.96\right] = 1 - 0.05$$

$$P\left[-9.8 < \bar{X} - \mu_X < 9.8\right] = 0.95$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Wenn wir beobachten, dass der Stichprobenmittelwert z.B. gleich 400 ist, wissen wir, dass der wahre Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 innerhalb des Intervalles liegt.

$$P\left[-9.8 < \bar{X} - \mu_X < 9.8\right] = 0.95$$

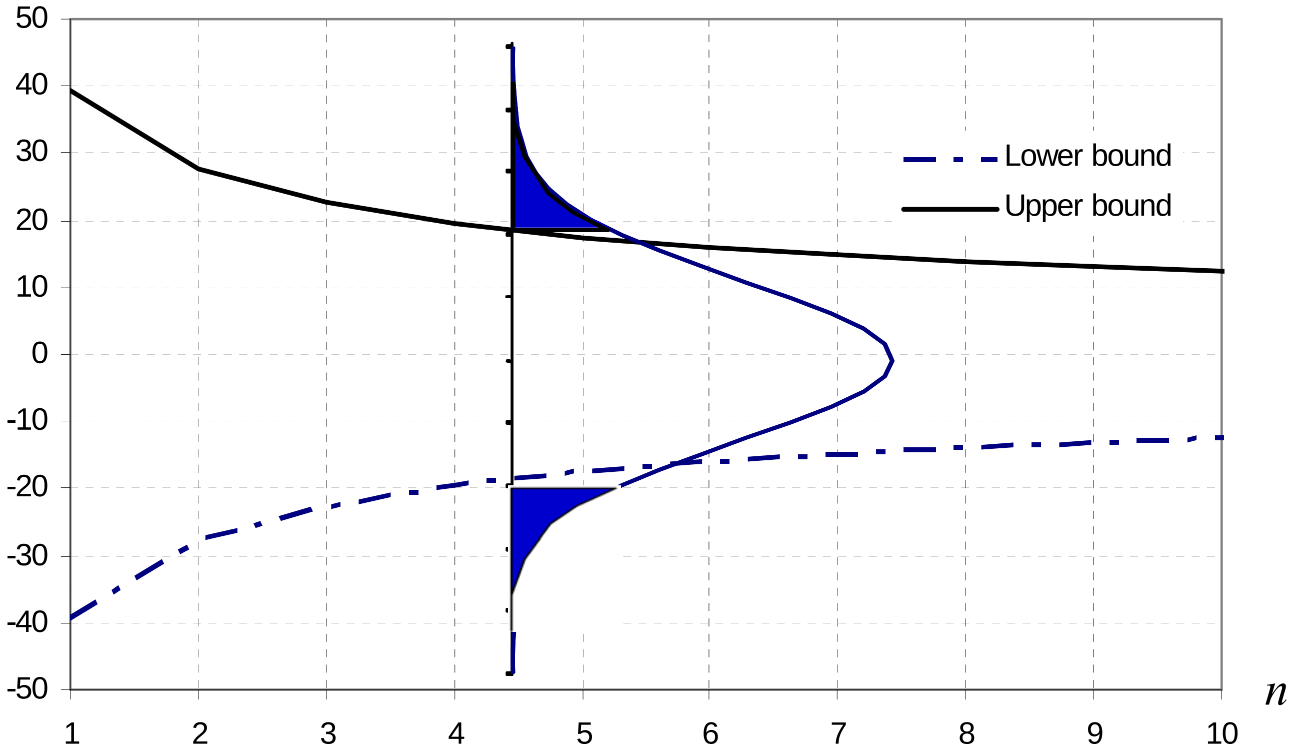
$$390.2 < \mu_X < 409.8$$

- Normalerweise werden Konfidenzintervalle für Mittelwert, Varianz und charakteristische Werte (Fraktilwerte) in Betracht gezogen.
- Das Konfidenzintervall repräsentiert / beschreibt die (statistische) Unsicherheit, welche durch zu wenig Daten entsteht.

Konfidenzintervalle für Schätzer

Die Anzahl verfügbarer Daten hat einen signifikanten Einfluss auf das Konfidenzintervall.

Unter Verwendung des vorherigen Beispiels (σ_X = 20) ist in der folgenden Graphik die Abhängigkeit des Konfidenzintervalls von der Anzahl der Experimente n illustriert.



Statistische Signifikanztests

Dilemma:

Man muss einfache Rückschlüsse ziehen, die jedoch nur auf einer begrenzten Datenmenge mit einer hohen Variabilität basieren.

Beispiele:

Es sollen ein paar "vor Ort" – Tests durchgeführt werden, um ein Modell für die Bodenfestigkeiten zu verifizieren.

Das Verkehrsaufkommen auf einer Brücke soll beobachtet werden, um zu überprüfen, ob die vorherigen Annahmen diesbezüglich zutreffend sind.

Grundwasserproben sollen entnommen werden, um die Trinkwasserqualität zu bestätigen.

Statistische Signifikanztests

Es ist wichtig, dass diese Rückschlüsse anhand konsistenter und transparenter Grundlagen gezogen werden. So sollten die Rückschlüsse alle Beweismittel (Daten) berücksichtigen und gegebene Abhängigkeiten (welcher Beweis bedingt welchen Rückschluss) mit einbeziehen.

Ein häufig angewandter und hilfreicher Weg, um solche Rückschlüsse zu unterstützen ist folgender:

1. Formulieren einer Hypothese
2. Hypothesentest

Im Folgenden wird ein genauer Blick auf diesen Ansatz geworfen…

Statistische Signifikanztests

1. Der erste Schritt liegt in der Formulierung einer Null-Hypothese H_0.
   Man legt fest, dass eine Stichprobenstatistik (z.B. Stichprobenmittelwert) einem bestimmten Wert entspricht.

2. Der Folgeschritt beinhaltet die Formulierung einer Entscheidungsregel, nach der die Null-Hypothese entweder akzeptiert oder abgelehnt wird.
   Kann man auf Beweise (Testergebnisse) zugreifen, wird diese Entscheidungsregel häufig anhand eines Intervalls Δ bestimmt, innerhalb dessen die beobachtete Stichprobenstatistik liegen muss, damit die Null-Hypothese akzeptiert werden kann.
   Eine Ablehnung der Null-Hypothese bedingt die Akzeptanz der Testhypothese H_1.

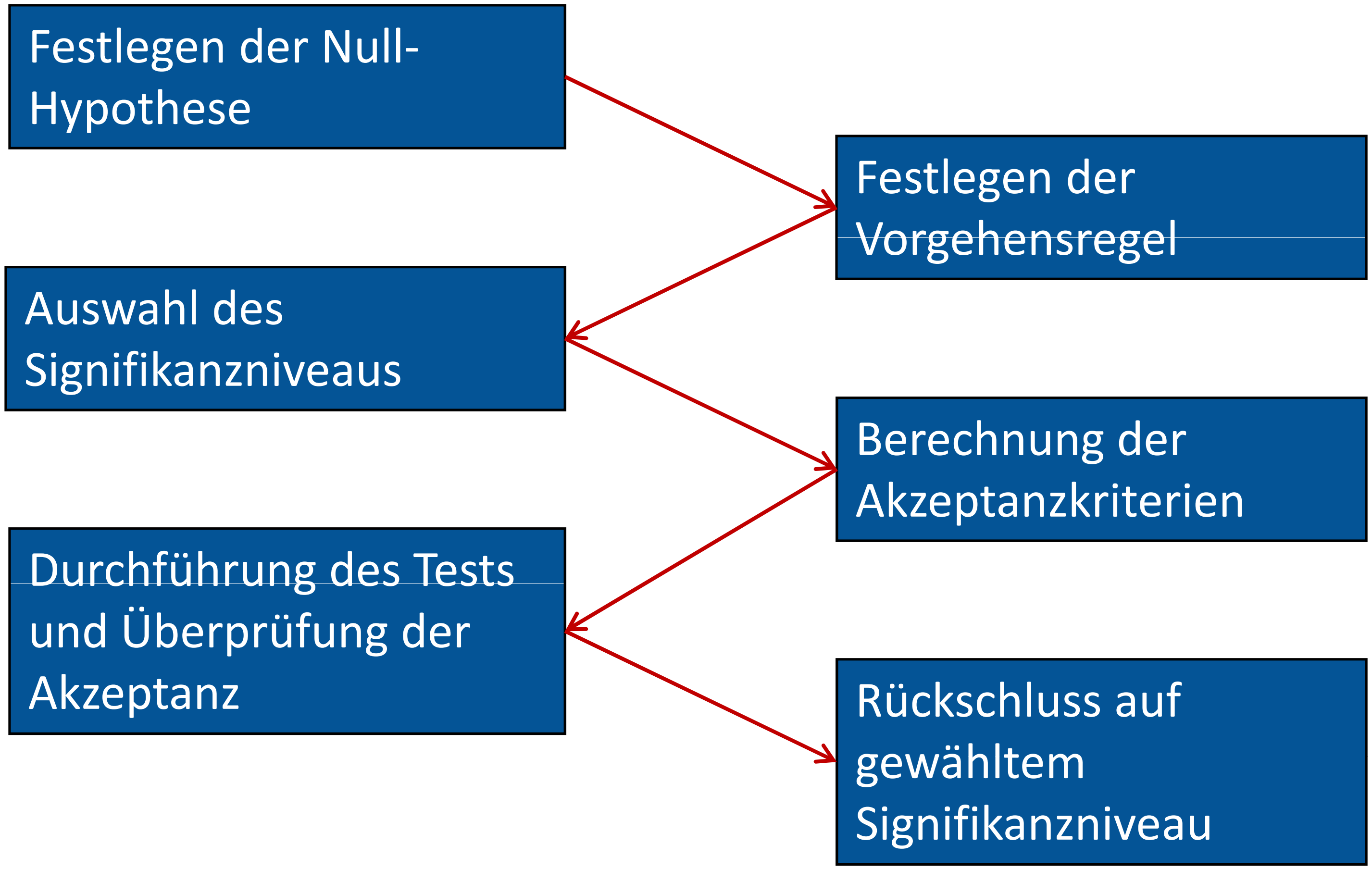
3. Nun wählt man ein Signifikanzniveau für die Testdurchführung, wobei α die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl sie zutrifft (Fehler 1. Art). Auf diesem Weg beeinfluss α ebenso die Wahrscheinlichkeit, dass die Null-Hypothese akzeptiert wird, obwohl sie nicht zutrifft (Fehler 2. Art).

Statistische Signifikanztests

4. Nun muss man den zu α gehörigen Wert von Δ berechnen.
   Bei Bedarf kann man auch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art berechnen.
5. Die geplanten Tests werden durchgeführt und die beobachteten Stichprobenstatistiken beurteilt. Eine Ablehnung oder Akzeptanz der Null-Hypothese wird geprüft.
6. Sollte die Null-Hypothese von den Ergebnissen der Stichprobe nicht gestützt werden, wird sie auf dem Signifikanzniveau von α abgelehnt – sonst wird sie akzeptiert.

Statistische Signifikanztests

Grafische Darstellung des Vorgehens bei Hypothesentests:



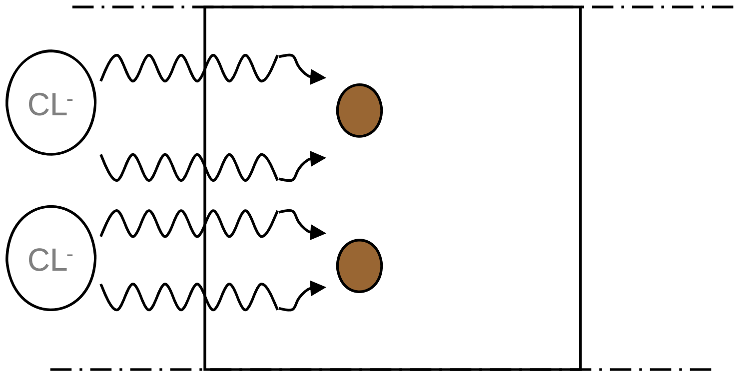
Statistische Signifikanztests

Typische Anwendungen im Ingenieursbereich:

- Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz
- Testen des Mittelwertes – mit unbekannter Varianz
- Testen der Varianz
- Testen zweier oder mehrerer Datensätze

Statistische Signifikanztests

Beispiel: Chlorid bedingte Korrosion an Betonkonstruktionen



Man betrachte beispielsweise die Situation, in der beurteilt werden soll, ob die Chlorid-Konzentration an der Oberfläche einer Betonkonstruktion mit den vorher angenommenen Bemessungsgrundlagen übereinstimmt.

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Bemessungsgrundlage: Mittelwert der Oberflächen-Chlorid-Konzentration: 0,3%

Null-Hypothese

Die Standardabweichung der Oberflächen-Chlorid-Konzentration sei bekannt und entspricht 0,04%.

Festlegung des Annahmebereichs:

Die Null-Hypothese wird auf dem Signifikanzniveau α akzeptiert, falls

$$0.3 - \Delta \leq \bar{X} \leq 0.3 + \Delta$$

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

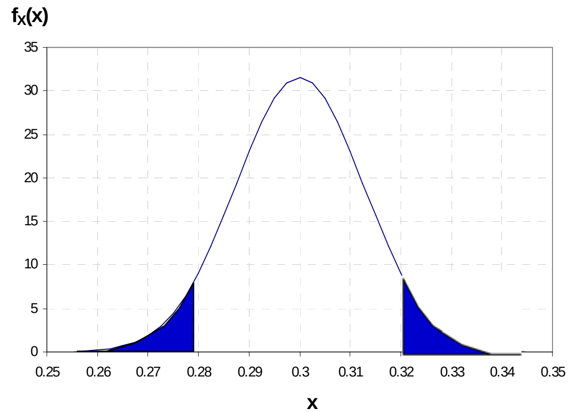
Das Akzeptanzkriterium bei gegebenem α kann wie folgt berechnet werden:

$$P\left(0.3-\Delta \leq \overline{X} \leq 0.3+\Delta\right) = 1-\alpha$$

Wählt man $\alpha = 0.1$ und $n = 10$ Versuche und nimmt man an, dass der Stichprobenmittelwert normalverteilt ist, erhält man:

$$\Phi\left(\frac{x_U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_L-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{(0.3+\Delta)-0.3}{\frac{0.04}{\sqrt{10}}}\right) - \Phi\left(\frac{(0.3-\Delta)-0.3}{\frac{0.04}{\sqrt{10}}}\right) = 0.9 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = 0.0208$$



Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Liegt die Stichprobenvarianz innerhalb von $[0.28 \leq \bar{x} \leq 0.32]$, sollte die Null-Hypothese H_0 akzeptiert werden.

Nimmt man an, dass 10 Versuche durchgeführt wurden und die folgenden Ergebnisse daraus entstanden sind,

$$\mathbf{x} = (0.33, 0.32, 0.25, 0.31, 0.28, 0.27, 0.29, 0.3, 0.27, 0.28)^T$$

bei einem Stichprobenmittelwert von $\bar{x}$=0.29, kommt man zu dem Schluss, dass die Null-Hypothese auf einem Signifikanzniveau von 0.1 akzeptiert werden sollte.

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit unbekannter Varianz

Geht man nun davon aus, dass die Varianz nicht bekannt ist, muss die folgende Stichprobenstatistik berücksichtigt werden…

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{unbiased}}{\sqrt{n}}}$$

die als t-verteilt und mit einem Freiheitsgrad von n-1 auftreten könnte.

Die Vorgehensregel wäre dem entsprechend: $P(-\Delta \leq T \leq \Delta) = 1 - \alpha$

Indem man eine t-Verteilung mit einem Freiheitsgrad von 9 voraussetzt, lässt sich $\Delta = 1.83$ berechnen.

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit unbekannter Varianz

Mit den gleichen Versuchsergebnissen wie zuvor erhält man nun den gleichen Stichprobenmittelwert, aber die Varianz ist:

$$S_{unbiased} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 0.025$$

Und die t-Statistik ist: $$t = \frac{(0.29 - 0.3)\sqrt{10}}{0.025} = -1.27$$

was sich innerhalb des Intervalls von $\pm \Delta$ $(= \pm 1.83)$ befindet.

Folglich sollte die Null-Hypothese nicht abgelehnt werden.

Statistische Signifikanztests

Testen der Varianz

Man betrachte beispielsweise den Fall, bei dem versucht wird, die Varianz der Lebensdauern von geschweißten Verbindungen zu reduzieren, indem die Schweißoberfläche behandelt wird.

Weil Experimente sehr teuer sind, stehen nur wenige Daten zur Verfügung, um den Effekt der Schweißnahtbehandlung zu bestätigen.

Statistische Signifikanztests

Testen der Varianz

Als Null-Hypothese nehmen wir an, dass die Varianz der Lebensdauern der Schweißnähte mit einer Oberflächenbehandlung geringer ist, als diejenige ohne eine Behandlung:

$$\sigma_{neu}^2 \leq \sigma_{alt}^2$$

Die Entscheidungsregel besagt demzufolge, dass die Null-Hypothese akzeptiert wird, wenn

$$P\left[S^2 \geq \Delta\right] = 1 - \alpha$$

wobei Δ aus $S^2 \geq \Delta$ berechnet werden kann.

In der Regel ist S^2 Chi-Quadrat verteilt mit n Freiheitsgraden.

Statistische Signifikanztests

Testen von mehr als einem Datensatz

Typischerweise befinden wir uns in einer Situation, in der uns mehr als nur ein Datensatz vorliegt, von denen jeder nicht sonderlich umfangreich ist. Dabei entsteht die Frage, wie man die Daten hinsichtlich folgender Grössen vergleichen kann:

- Mittelwerte — Test für gleiche Mittelwerte
- Varianzen — Test für gleiche Varianzen
- Korrelation — Test für Null-Korrelation

Statistische Signifikanztests

Testen für gleiche Mittelwerte

Wir nehmen an, dass uns zwei Datensätze vorliegen:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_k)^T \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, .., y_l)^T$$

Diese sind Realisationen der Zufallsvariablen X und Y, die beide als normalverteilt gelten, mit den Mittelwerten μ_x, μ_y und den Varianzen σ_x, σ_y.

Die Statistik $T = \bar{X} - \bar{Y}$ ist normalverteilt mit einem Mittelwert von:

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

und einer Varianz von:

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\sigma_X^2}{k} + \frac{\sigma_Y^2}{l}$$

Statistische Signifikanztests

Testen für gleiche Mittelwerte

Wenn α gleich 0.1 ist, kann Δ wie folgt berechnet werden:

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} \leq \Delta\right) = 1 - \alpha \qquad \Delta = 1.28\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{k} + \frac{\sigma_Y^2}{l}}$$

Statistische Signifikanztests

Testen für gleiche Varianzen

Für gleiche Varianzen kann auf folgende Weise ein Test durchgeführt werden:

$$T = \frac{S^2_{X,unbiased}}{S^2_{Y,unbiased}}$$

was als Verhältnis von Chi-Quadrat verteilten Zufallsvariablen verstanden werden kann. Daraus leitet sich ab, dass T F-verteilt ist mit den entsprechenden Parametern k und l.

Die Null-Hypothese H_0 ist: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Die Vorgehensregel, um H_0 zu akzeptieren, ist: $T \leq \Delta$

wobei Δ aus $P(T \leq \Delta) = 1 - \alpha$ berechnet wird.

Statistische Signifikanztests

Besondere Bemerkungen:

Statistische Signifikanztests können für eine Vielzahl unterschiedlicher Problemstellungen formuliert werden.

Man sollte aufpassen, dass man die Aussage dieser Tests nicht überschätzt, da die Hypothesen auf unterschiedlichen Wegen und mit unterschiedlichen Signifikanzniveaus formuliert werden können. Es sollte deshalb zum Prinzip werden, alles zu überprüfen.

Unterschiedliche Herangehensweisen verursachen einen direkten Effekt auf die Wahrscheinlichkeit, dass Fehler der 1. oder 2. Art entstehen. Dies kann signifikante ökonomische Konsequenzen nach sich ziehen.

Die Formulierung der Hypothese und die Wahl des Signifikanzniveaus sollte als Entscheidungsproblem behandelt werden – dazu später mehr…