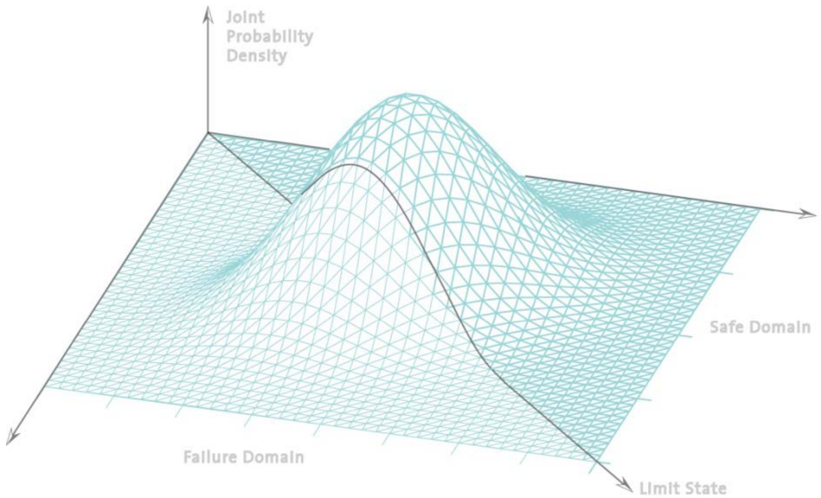
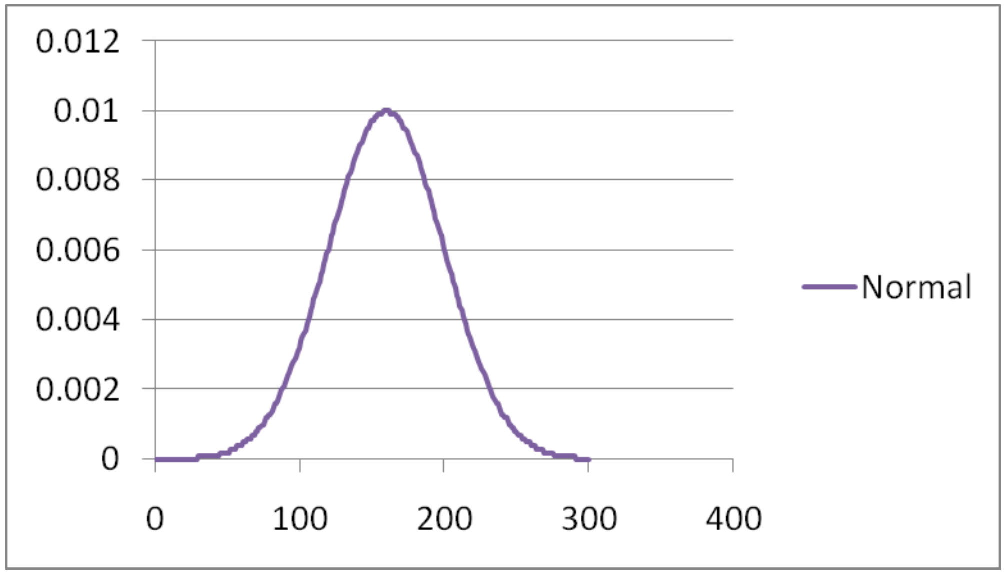


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

Der zentrale Grenzwertsatz - Normalverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Summe von Zufalls-variablen konvergiert zu einer Normalverteilung wenn deren Anzahl gross wird.

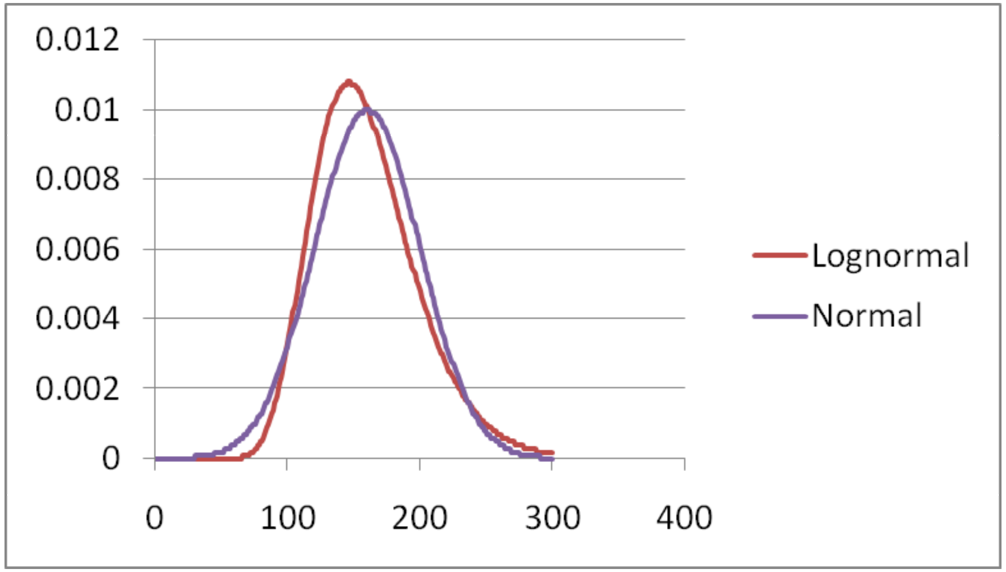


Weitere Verteilungstypen

Alle mit Mittelwert 160, Standardabweichung 40 !

Lognormal:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\zeta} \right)^2 \right) \qquad F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\zeta} \right) \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le \infty \\ \lambda, \zeta > 0 \end{array}$$



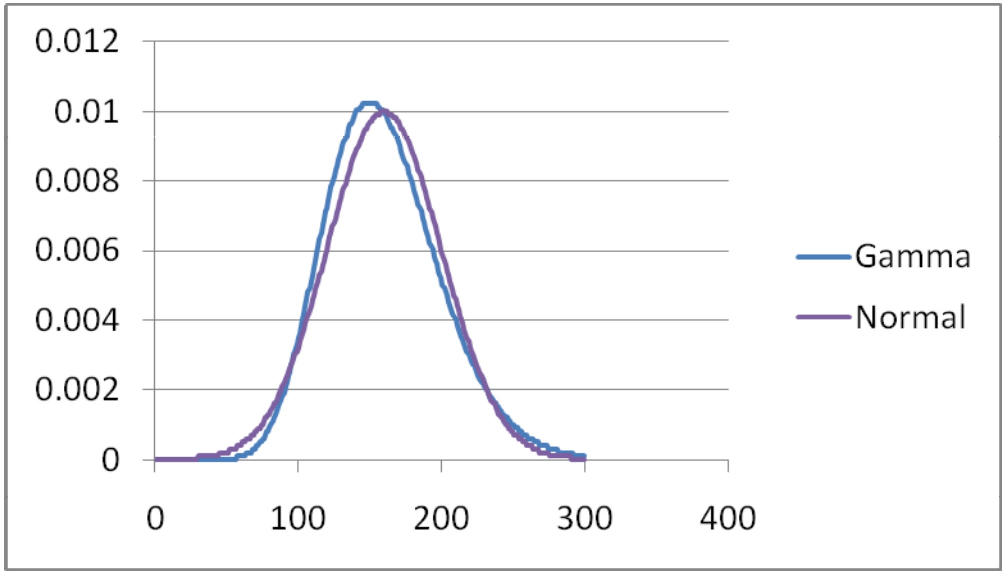
$$\mu = \exp\left(\lambda + \frac{\zeta^2}{2} \right)$$

$$\sigma = \mu\sqrt{\exp\left(\zeta^2\right) - 1}$$

Weitere Verteilungstypen

Alle mit Mittelwert 160, Standardabweichung 40 !
Gamma:

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp(-\lambda x) \qquad F_X(x) = \frac{\Gamma(k, \lambda x)}{\Gamma(k)}, \; \Gamma(k,t) = \int_0^t \exp(-u)\, u^{k-1}\, du \qquad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ k \geq 0 \\ \lambda > 0 \end{array}$$



$$\mu = \frac{k}{\lambda}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$$

Weitere Verteilungstypen

Alle mit Mittelwert 160, Standardabweichung 40 !

Gleich:

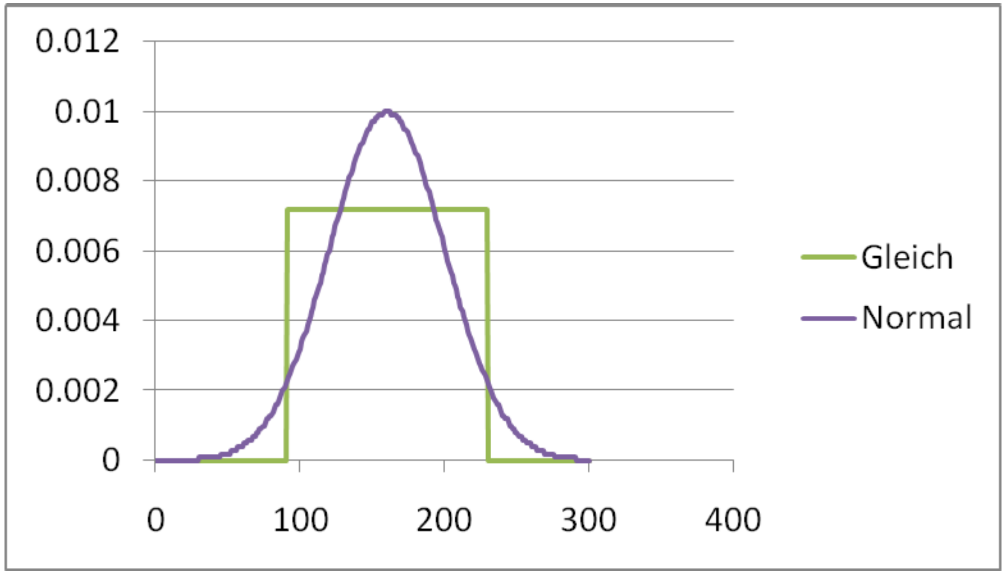
$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$a \le x \le b$$

$$a, b$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$



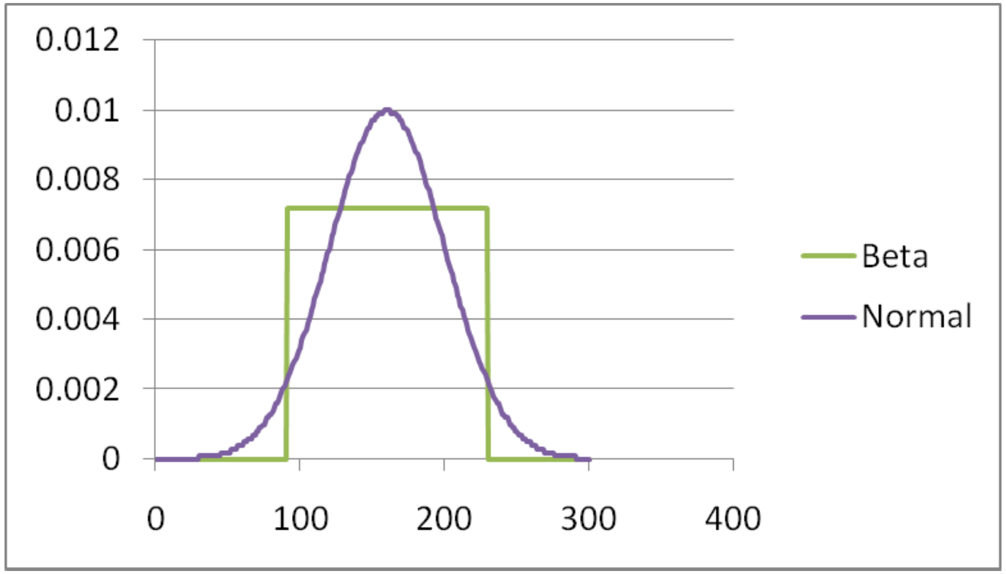
Weitere Verteilungstypen

Alle mit Mittelwert 160, Standardabweichung 40 !

Beta:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r)\cdot\Gamma(t)} \cdot \frac{(x-a)^{r-1}(b-x)^{t-1}}{(b-a)^{r+t-1}} \qquad F_X(x) = \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r)\cdot\Gamma(t)} \int_a^u \frac{(x-a)^{r-1}(b-x)^{t-1}}{(b-a)^{r+t-1}}\, du$$

$$a \le x \le b$$
$$a, b \ge 0$$
$$r, t > 0$$



$$\mu = a + (b-a)\frac{r}{r+t}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{r+t}\sqrt{\frac{r\,t}{r+t+1}}$$

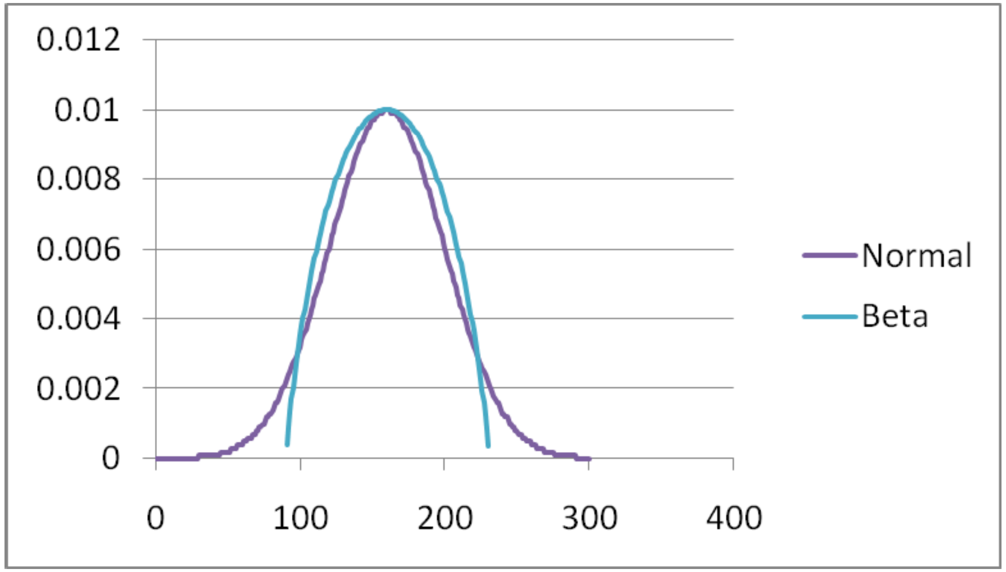
Weitere Verteilungstypen

Alle mit Mittelwert 160, Standardabweichung < 40 !

Beta:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r)\cdot\Gamma(t)} \cdot \frac{(x-a)^{r-1}(b-x)^{t-1}}{(b-a)^{r+t-1}} \qquad F_X(x) = \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r)\cdot\Gamma(t)} \int_a^u \frac{(x-a)^{r-1}(b-x)^{t-1}}{(b-a)^{r+t-1}}\, du$$

$$a \le x \le b$$
$$a, b \ge 0$$
$$r, t > 0$$

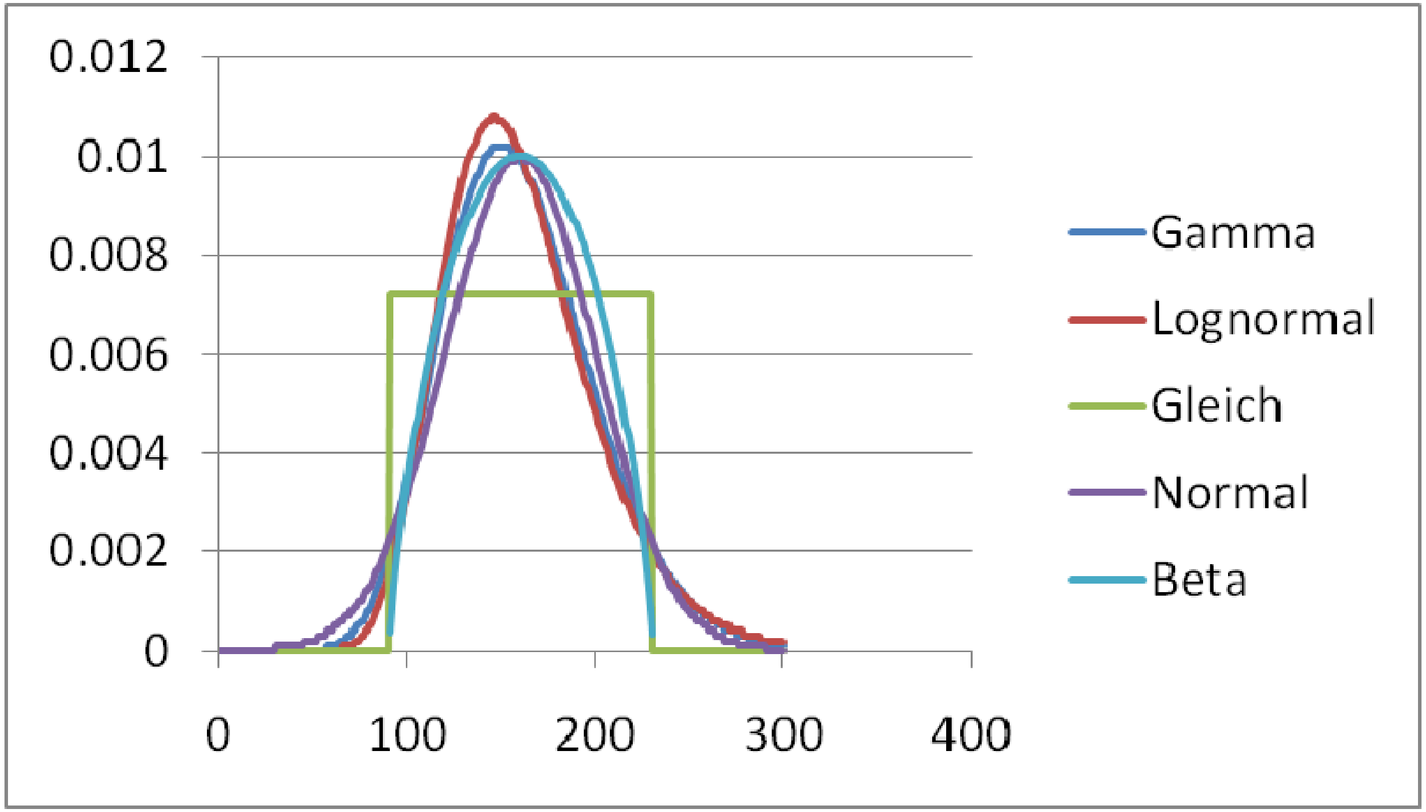


$$\mu = a + (b-a)\frac{r}{r+t}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{r+t}\sqrt{\frac{r\,t}{r+t+1}}$$

Weitere Verteilungstypen

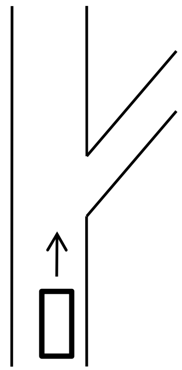
Alle mit Mittelwert 160, Standardabweichung 40 !



Bernoulli Versuch und Binomialverteilung

- Eine Reihe von Experimenten mit nur zwei möglichen und exklusiven Ereignissen nennt man einen Bernoulli Versuch.
- Typischerweise nennt man die Ereignisse eines Bernoulliversuches Erfolg und Versagen.

Zum Beispiel:



Autos auf einer Strasse; Abbiegen: Versagen, Wahrscheinlichkeit p

Gerade: Erfolg, Wahrscheinlichkeit 1- p

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf Autos zwei abbiegen?

Wahrscheinlichkeit, dass keines (von 5) abbiegt: $P[Y=0]=(1-p)(1-p)...(1-p)=(1-p)^5$

Wahrscheinlichkeit das zwei (von 5) abbiegen: $P[Y=2]=k\cdot p^2(1-p)^{5-2}$

k = Anzahl Möglichkeiten 2 aus 5

Binomialverteilung: $$p_Y(y)=\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}$$

Bernoulli Versuch und Binomialverteilung

Zum Beispiel:

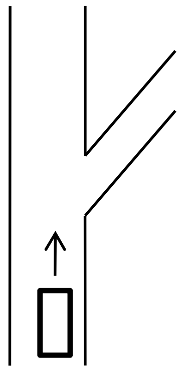
Autos auf einer Strasse; Wahrscheinlichkeit Abbiegen $p = 0.3$

Gesucht Wahrscheinlichkeitsdichte für 2 aus 5 biegen ab.

Binomialverteilung:

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$p_Y(2) = \binom{5}{2} 0.3^2 (1-0.3)^{5-2} = 0.3087$$

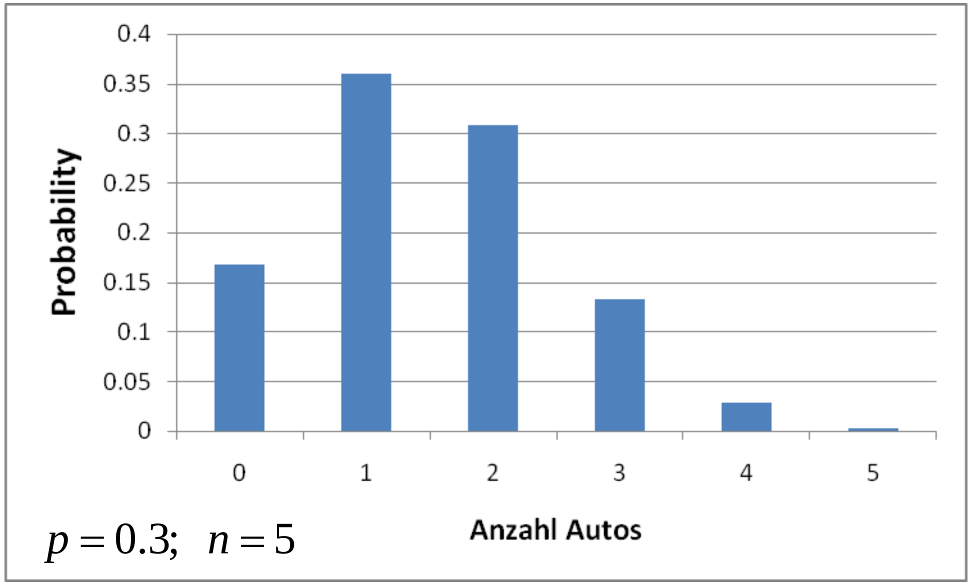


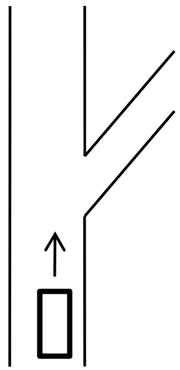
Bernoulli Versuch und Binomialverteilung

Zum Beispiel:

Autos auf einer Strasse; Wahrscheinlichkeit Abbiegen $p = 0.3$

Binomialverteilung: $$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

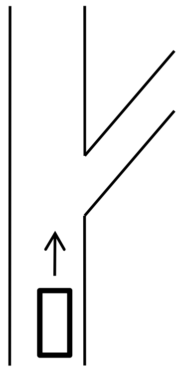




Bernoulli Versuch und Binomialverteilung

Zum Beispiel:

Autos auf einer Strasse; Wahrscheinlichkeit Abbiegen $p = 0.3$

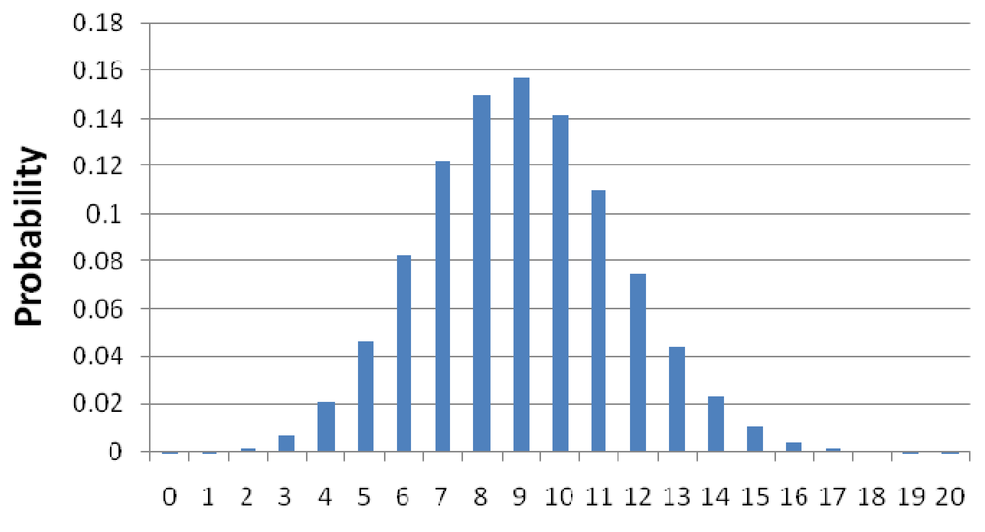


Binomialverteilung: $$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

Momente:

$$E[Y] = np$$

$$Var[Y] = np(1-p)$$



$p = 0.3; \quad n = 30$

Bernoulli Versuch geometrische Verteilung

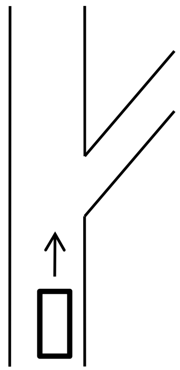
Zum Beispiel:

Autos auf einer Strasse; Wahrscheinlichkeit Abbiegen $p = 0.3$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das n-te Auto abbiegt:

(1) Bis zum n-ten Auto ist noch keines abgebogen: $(1-p)^{n-1}$

(2) Das n-te Auto biegt ab: p

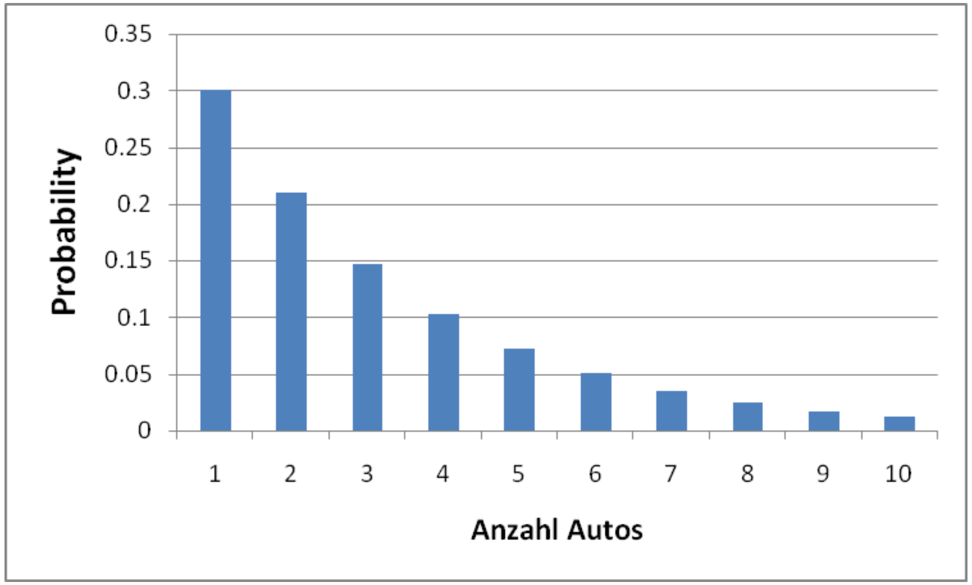


Geometrische Verteilung:

$$p_N(n) = p(1-p)^{n-1}$$

Momente:

$$E[N] = \frac{1}{p} \qquad Var[N] = \frac{1-p}{p^2}$$



Inhalt der heutigen Vorlesung

Zufallsprozesse

- Poissonprozess
- Exponentialverteilung, Gammaverteilung
- Normalprozess
- Stationarität und Ergodizität

Zusammenfassung der bisherigen Vorlesung

Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Wir haben Zufallsvariablen eingeführt um zufällige bzw. unsichere Ereignisse abzubilden, z.B. Eigenschaften von Objekten, Autos welche abbiegen usw.

Wenn wir Ereignisse über die Zeit betrachten sprechen wir von Zufallsprozessen.

Mit Hilfe von Modellen für Zufallsprozesse können wir die Wahrscheinlichkeit von zufälligen Ereignissen in der Zukunft abschätzen.

Beispiele:

- Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren
- 100 jähriges Hochwasser
- Maximale Lasten während der Lebensdauer eines Bauwerks

Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Für viele Ingenieurfragen müssen wir die zufälligen Schwankungen über die Zeit spezifischer erfassen können:

- Das zufällige Eintreten von Ereignissen zu diskreten Zeitpunkten (Unfälle, Steinschlag, Erdbeben, Stau, Versagen, usw.)
  → Poissonprozess, Exponentialverteilung, Gammaverteilung

- Die zufälligen Ausprägungen von Ereignissen, welche kontinuierlich über die Zeit eintreten (Winddruck, Wellendruck, Temperaturen, usw.)
  → Kontinuierliche zufällige Prozesse (Normalprozess)

Hochwasserereignis (diskret)

Belastungsschwankungen aufgrund Wellen (kontinuierlich)

Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Was wir heute näher betrachten wollen:

- Zufallssequenzen: Poissonprozess
- Wartezeit zwischen zwei Ereignissen: Exponentialverteilung, Gammaverteilung
- Kontinuierliche Zufallsprozesse: Normalprozess
- Kriterien für das Extrapolieren von Extremen: Stationarität und Ergodizität

Poissonverteilung - Poissonprozess

Ein Bernoulli Versuch lässt sich mit der Binomialverteilung beschreiben.

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

In praktischen Situationen ist es sehr oft der Fall, dass die Anzahl Versuche nicht bekannt ist. Es ist nur bekannt, dass die Anzahl sehr gross ist.

Betrachten Sie Fliegen welche bei einer spätsommerlichen Autofahrt auf ihrer Windschutzscheibe aufprallen als zufällige Sequenz und als abstrakten Bernoulli Versuch.

Es ist klar, dass wir hier weder die Anzahl Versuche, noch die Aufprall-wahrscheinlichkeit ausdrücken können.

Betrachten wir einen bestimmten Zeitraum, etwa eine Sekunde, und stellen uns vor, dass 1 Sekunde Autofahren einem Versuch entspricht (eine Stunde entspräche also 3600 Versuchen). Die Wahrscheinlichkeit p ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde eine Fliege an der Windschutzscheibe aufprallt. Wenn wir p wissen, können wir die Binomialverteilung anwenden.

Poissonverteilung - Poissonprozess

Was sind die Bedingungen:

Die Rahmenbedingungen können für die gesamte Betrachtungsperiode konstant angenommen werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Fliege pro Sekunde anprallen ist sehr, sehr klein.

Die zweite Bedingung kann entschärft werden, wenn wir die Anzahl „Versuche“ vergrössern, bzw. den Zeitraum verkleinern.

$$n \to \infty \qquad p \to 0 \qquad np = u \to const. \qquad p = u / n$$

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} (v/n)^y \left(1 - (v/n)\right)^{n-y} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{im Limit}} \frac{u^y e^{-u}}{y!}$$

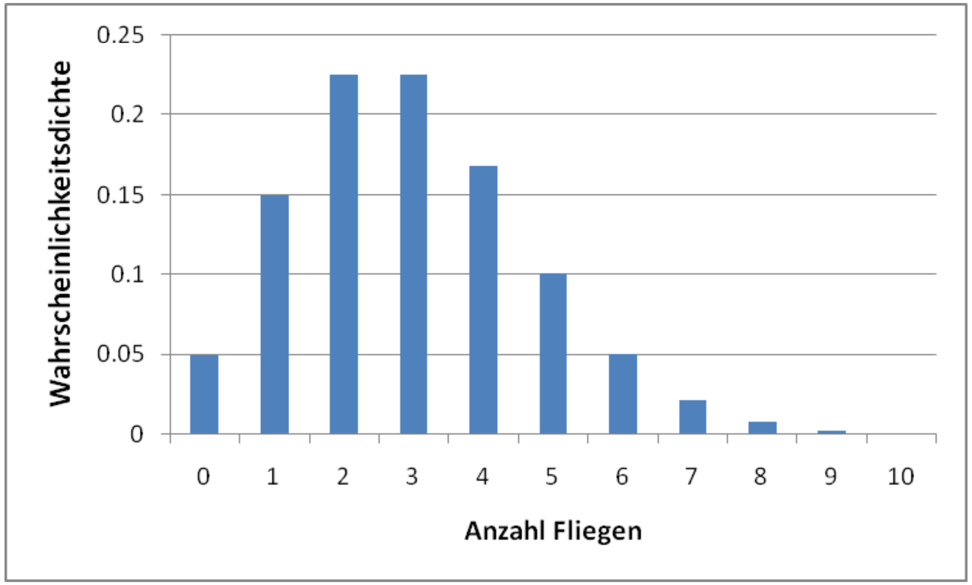
$$p_X(x) = \frac{u^x e^{-u}}{x!} \qquad \text{Poissonverteilung}$$

Poissonverteilung - Poissonprozess

Poissonverteilung: $p_X(x) = \frac{u^x e^{-u}}{x!}$

Momente: $E[X] = u$ $Var[X] = u$

Nehmen wir an Fliegen prallen mit u = 10 pro Minute auf.



Poissonverteilung - Poissonprozess

Wie sieht es für 10 Minuten aus:

3 pro Minute -> 30 pro 10 Minuten

u ist skalierbar über die Zeit: $u = vt$

Poissonverteilung: $p_X(x) = \frac{u^x e^{-u}}{x!} = \frac{(vt)^x e^{-vt}}{x!}$

$E[X] = u = vt$

$Var[X] = u = vt$

Die Abfolge von Ereignissen welche sich mit einer Poisson-verteilung beschreiben lassen nennt man Poissonprozess.

Poissonverteilung - Poissonprozess

Ein Poissonprozess unterliegt folgenden Annahmen:

- Stationärität: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem beliebigen kleinen Zeitintervall $[t, t+h[$ ist νh für alle t .
- Die Wahrscheinlichkeit von zwei oder mehr Ereignissen in einem kleinen Intervall sind vernachlässigbar klein.
- Die auftretenden Ereignisse sind voneinander unabhängig.

Poissonprozess - Exponentialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit von keinem Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall (0,t[ist sehr oft von Interesse in Ingenieurproblemen.

- Kein ernsthafter Sturm in 10 Jahren.
- Kein Strukturversagen in 100 Jahren.
- Kein Erdbeben nächstes Jahr.

Diese Wahrscheinlichkeit wird folgendermassen erhalten:

Die Wahrscheinlichkeit von keinem Ereignis in Abhängigkeit von t.

Poissonverteilung: $$p_X(0) = \frac{(\nu t)^0 e^{-\nu t}}{0!} = e^{-\nu t}$$

Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis in Abhängigkeit von t.

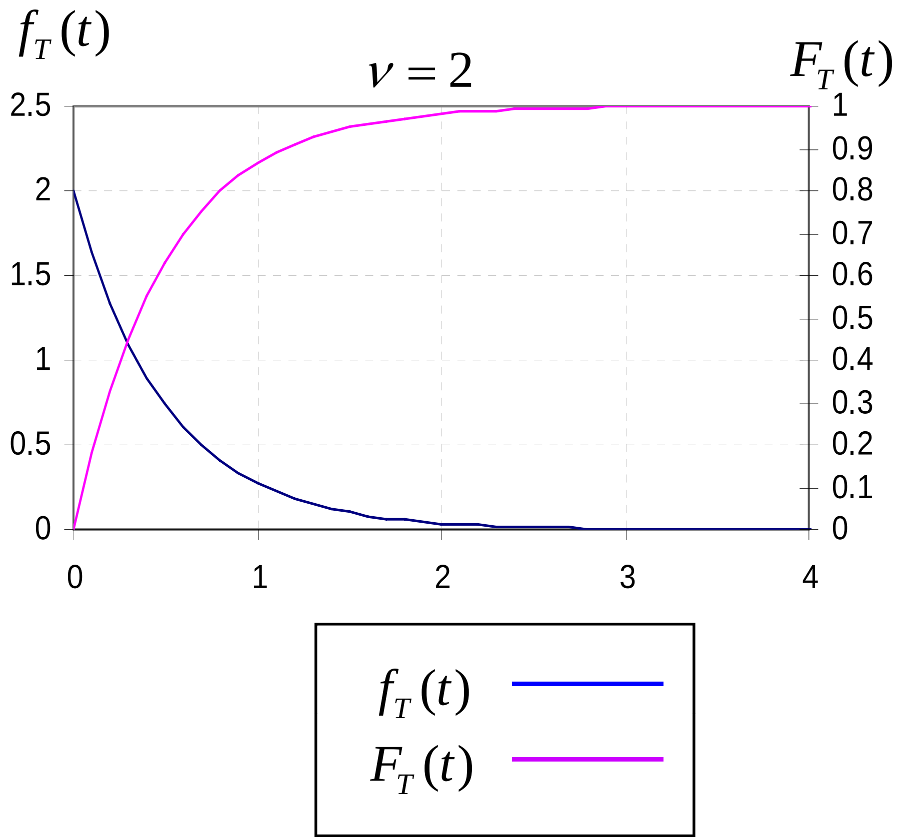
$$F_T(t) = 1 - p_X(0,t) = 1 - e^{-\nu t}$$ Exponentialverteilung

Poissonprozess - Exponentialverteilung

Exponentialverteilung:
Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis in Abhängigkeit von (der Wartezeit) t.

$$F_T(t) = 1 - e^{-\nu t}$$

$$f_T(t) = \nu \exp(-\nu t)$$



Zufallssequenzen: Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung wird oft benutzt, um Wartezeiten zu modellieren:

- Zeit bis zu einem Versagen
- Zeit bis zum nächsten Erdbeben
- Zeit bis zum nächsten Unfall

$$\boxed{f_T(t) = \nu \exp(-\nu t)}$$

Der Erwartungswert und die Varianz einer exponentiell verteilten Zufallsvariable T sind gegeben als:

$$E[T] = \sqrt{Var[T]} = 1/\nu$$

Zufallssequenzen: Gammaverteilung

Oft ist auch die Zeit *T* bis zum *n* -ten Ereignis von Interesse im Ingenieurwesen:

- Überschwemmungsereignisse
- Eintreffen von Fahrzeugen an einer Strassenkreuzung
- Zeit bis zu notwendigen Unterhaltsarbeiten

Wenn T_i, i=1,2,..n unabhängige, exponential verteilte Wartezeiten sind, dann folgt ihre Summe *T*

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n$$

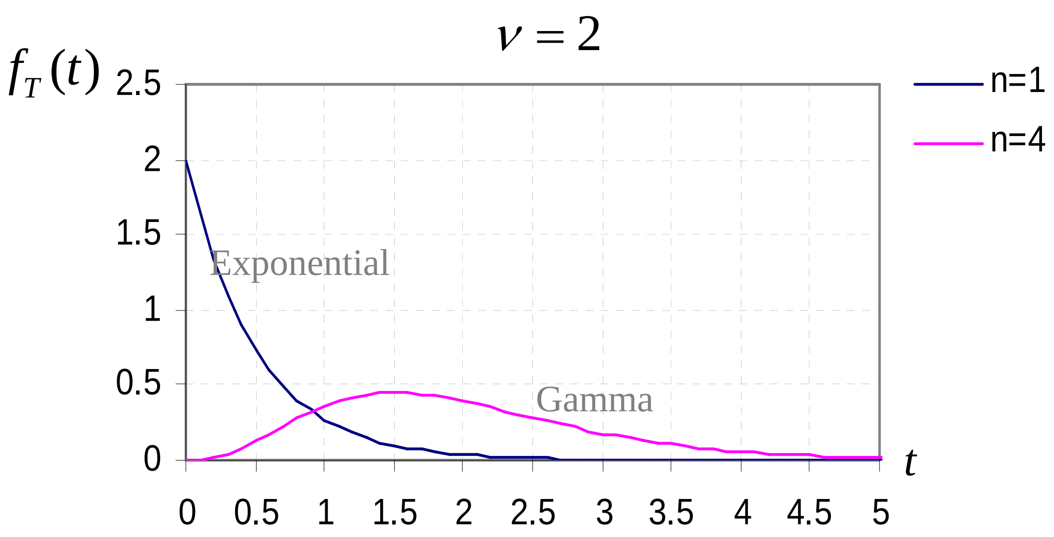
einer Gammaverteilung

$$f_T(t) = \frac{\nu(\nu t)^{(n-1)} \exp(-\nu t)}{(n-1)!}$$

Diese folgt aus der wiederholten Anwendung des Resultats der Verteilung der Summe aus zwei Zufallsvariablen.

Zufallssequenzen: Gammaverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gammaverteilung



Kleine Denkaufgabe 7.1

Sie dürfen als Gewinner einer TV Quizsendung zwischen 3 verschlossenen Türen wählen. Hinter einer der Türen befindet sich der Hauptgewinn, hinter den anderen beiden Türen sind Nieten versteckt. Sie haben nun eine der Türen gewählt, diese bleibt aber verschlossen. Um die Sache für die Zuschauer spannend zu machen öffnet der Quizmaster eine der anderen beiden Türen – hinter ihr befindet sich eine Niete. Sie bekommen nun nochmals die Möglichkeit sich um zu entscheiden.

Was ist die beste Strategie?

- wechseln
- erste Wahl
- egal

Kleine Denkaufgabe 7.1 - Lösung

Was ist die beste Strategie? Wechseln

Wechseln Sie das Tor, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, das Tor mit dem Gewinn gewählt zu haben, von 1/3 auf 2/3!

Erklärung 1: Nachdem Sie ein Tor gewählt haben, besteht eine Wahrscheinlichkeit von 1/3, dass dort der Preis ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Preis hinter einem der anderen beiden Tore befindet beträgt 2/3.

Kleine Denkaufgabe 7.1 - Lösung

Was ist die beste Strategie? Wechseln

Wechseln Sie das Tor, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, das Tor mit dem Gewinn gewählt zu haben, von 1/3 auf 2/3!

Erklärung 2: Gedankenexperiment mit 100 Türen.

Kleine Denkaufgabe 7.1 - Lösung

Was ist die beste Strategie? Wechseln

Wechseln Sie das Tor, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, das Tor mit dem Gewinn gewählt zu haben, von 1/3 auf 2/3!

Erklärung 3: Satz von Bayes

- Es sind die Ereignisse definiert:
- M_A: Der Moderator hat das Tor A geöffnet
  G_A: Der Gewinn ist im Tor A - analog für die Indizes B und C

Tor A gewählt, Moderator öffnet Tor B.

$$P(G_C|M_B) = \frac{P(M_B|G_C)P(G_C)}{P(M_B|G_A)P(G_A)+P(M_B|G_B)P(G_B)+P(M_B|G_C)P(G_C)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Kleine Denkaufgabe 7.1 - Lösung

Was ist die beste Strategie? Wechseln

Wechseln Sie das Tor, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, das Tor mit dem Gewinn gewählt zu haben, von 1/3 auf 2/3!

Erklärung 4: Ereignisbaum

Zusammenfassung des Vorlesungsinhaltes

Warum Statistik und Wahrscheinlichkeits-rechnung im Ingenieurwesen?

- Entscheidungsprobleme betreffen Zustände der realen Umwelt:
  - Mögliche Einflussgrössen bezüglich

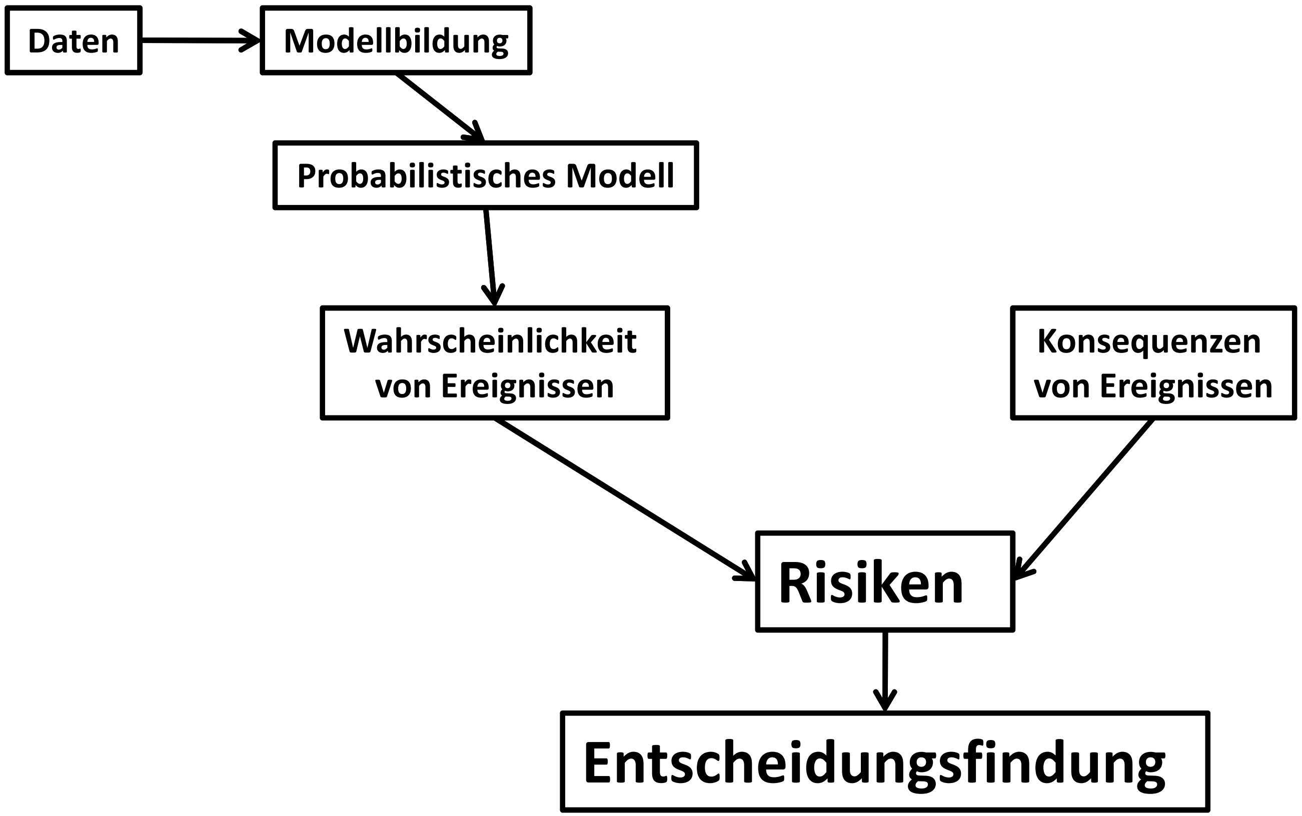
Boden, Steine, Gewicht, Wasser, Verkehr, Beton, Stahl, Wind, Schnee, Temperatur

  - Beschreibung der Phänomene durch Modelle

Physik | Chemie | Mathematik

Modellierung von Risiken

- Ziel:



Beschreiben von Datenmengen

Körpergrösse

170	191	184	184	182	176	183	164	178	183
190	176	175	170	171	180	176	177	187	170
190	171	183	182	178	180	185	175	180	184
175	169	183	176	179	172	176	180	183	182
173	165	175	190	160	189	174	184	191	165
170	165	178	180	176	185	187	174	187	184
183	166	177	189	197	174	166	186	184	174
178	183	180	176	185	178	185	185	184	183
190	186	183	183	178	188	185	181	175	171
175	170	168	178	185	184	187	162	170	183
175	174	187	176	184	183	184	195	180	178
183	187	160	200	170	179	160	179	180	
164	172	175	181	170	179	189	182	183	
176	164	175	176	188	185	190	179	175	
169	176	162	175	187	175	173	180	174	
178	180	175	185	182	182	168	183	170	
188	178	158	177	186	176	184	182	170	
187	191	158	173	158	183	178	165	174	
164	174	187	175	172	177	187	186	181	
183	178	172	183	176	173	187	175	175	

Beschreiben von Datenmengen

Mittelwerte:

Arithmetisches Mittel:	Schwerpunkt der Stichprobe
Median:	mittlerer Wert einer Stichprobe
Modalwert:	am häufigsten vorkommender Wert

Streuungsmasse:

Varianz / Standardabweichung:	Verteilung um den Mittelwert
Variationskoeffizient :	Variabilität relativ zum Mittelwert

Andere Masse:

Schiefekoeffizient:	Schiefe relativ zum Mittelwert
Kurtosis:	Wölbung um den Mittelwert

Masse für Korrelation:

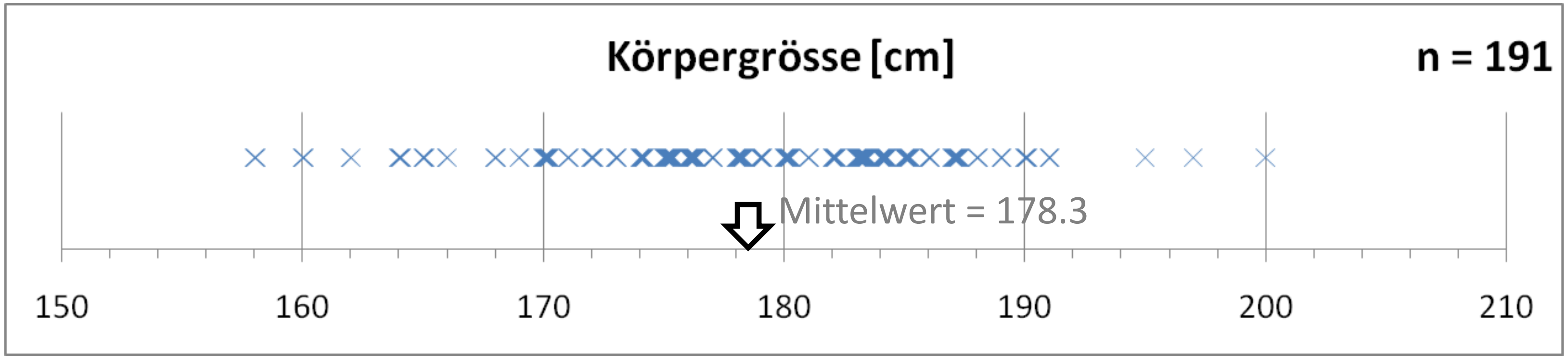
Kovarianz:	Tendenz für paarweise beobachtete Eigenschaften
Korrelations- koeffizient :	Normalisierter Koeffizient zwischen -1 und +1

Beschreiben von Datenmengen

Ein-dimensionales Streudiagramm	Veranschaulicht den Bereich und die Verteilung von Datenreihen entlang einer Achse, und zeigt Symmetrie.
Zwei-dimensionales Streudiagramm	Veranschaulicht den paarweisen Zusammenhang von Daten.
Histogramm	Stellt die Verteilung von Daten über einem Bereich von Datenreihen dar, zeigt Modalwert und Symmetrie.
Quantil Plot	Stellt Median, Verteilung und Symmetrie dar.
Tukey – Boxplot	Stellt Median, obere/untere Quartile, Symmetrie und Verteilung dar.
Q-Q Plot	Vergleicht zwei Datenreihen, relatives Bild.
Mittel-über-Differenz Plot	Vergleicht zwei Datenreihen, relatives Bild.

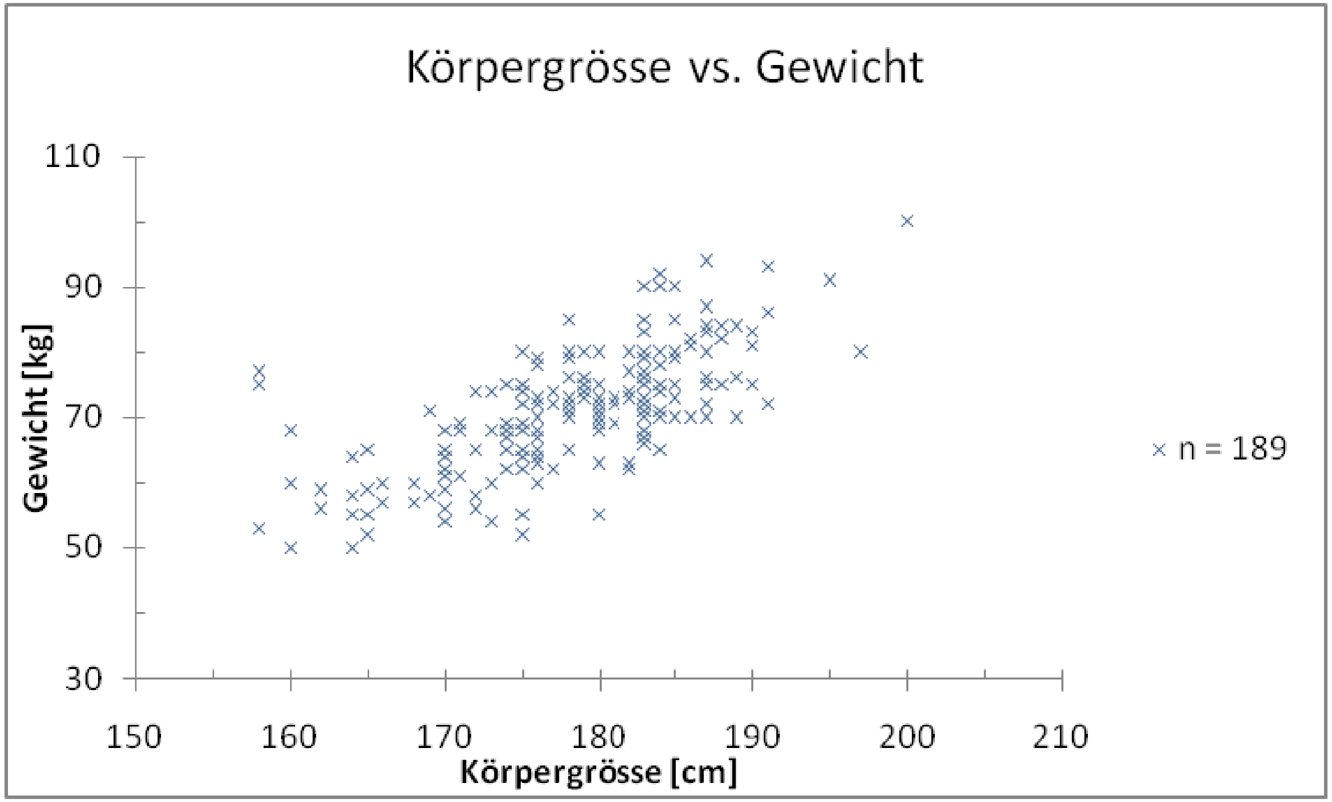
Beschreiben von Datenmengen

Ein-dimensionales Streudiagramm	Veranschaulicht den Bereich und die Verteilung von Datenreihen entlang einer Achse, und zeigt Symmetrie.



Beschreiben von Datenmengen

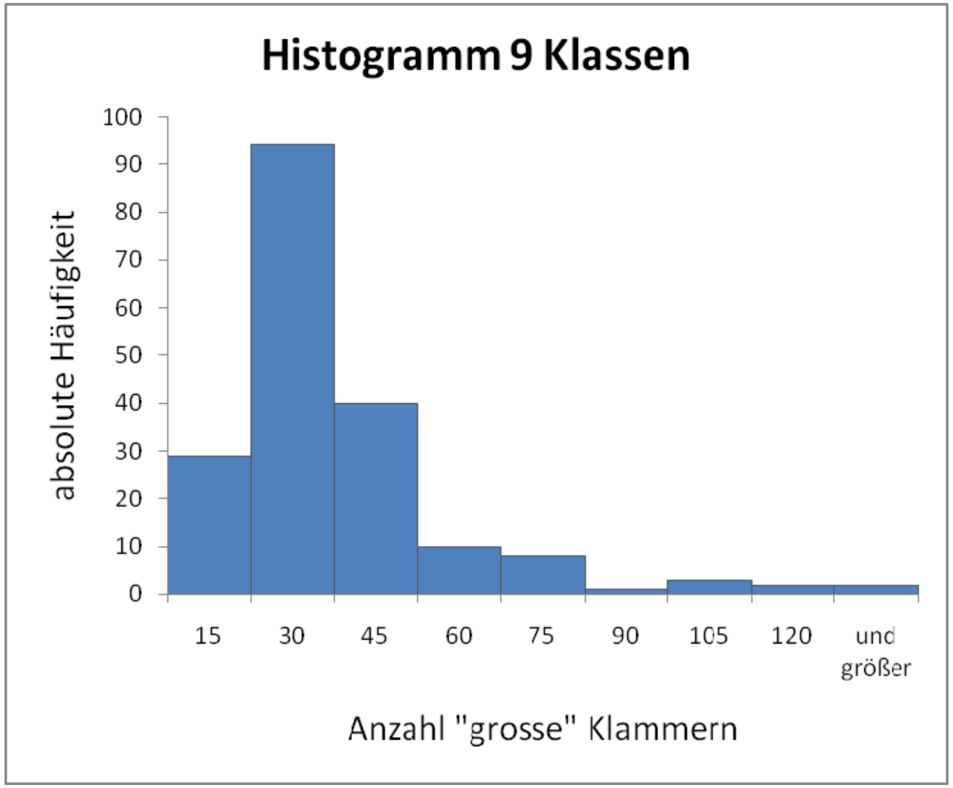
Zwei-dimensionales Streudiagramm	Veranschaulicht den paarweisen Zusammenhang von Daten.



Beschreiben von Datenmengen

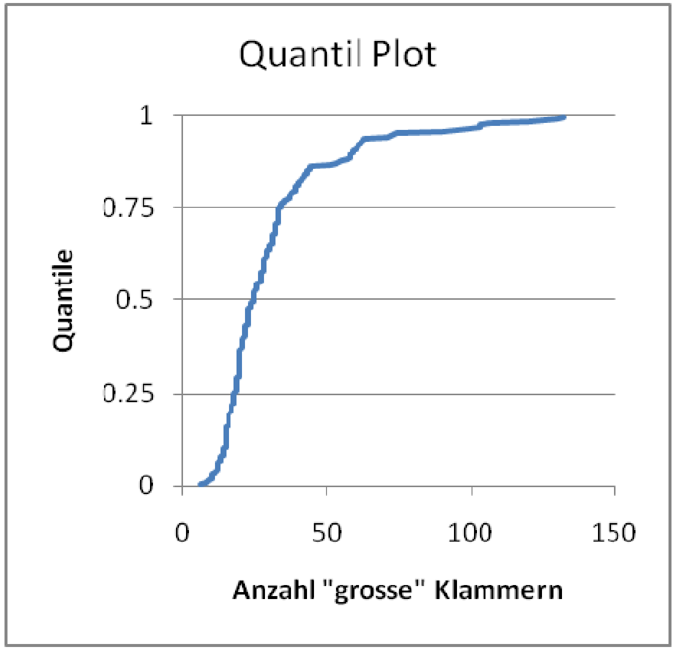
Histogramm

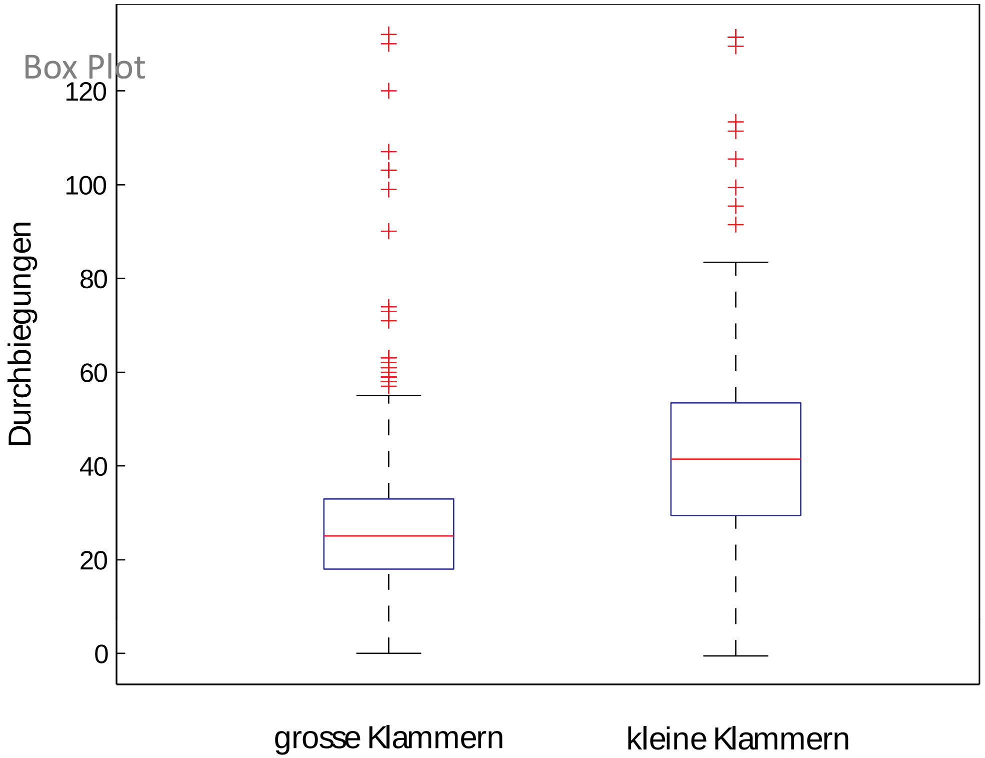
Stellt die Verteilung von Daten über einem Bereich von Datenreihen dar, zeigt Modalwert und Symmetrie.



Beschreiben von Datenmengen

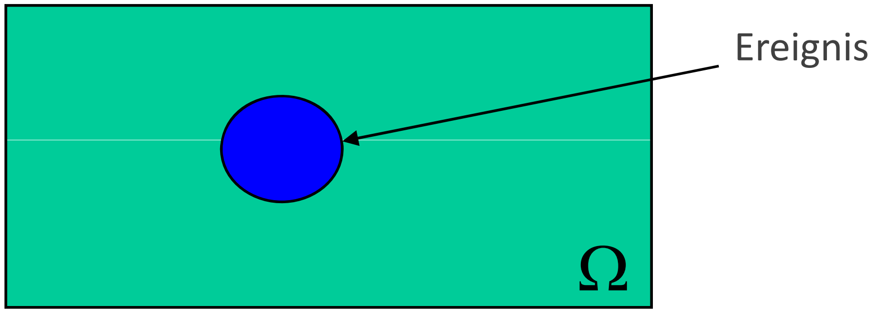
Quantile Plot	Stellt Median, Verteilung und Symmetrie dar.
Tukey – Boxplot	Stellt Median, obere/untere Quartile, Symmetrie und Verteilung dar.





Mengenlehre

Der Ereignisraum und die Ereignisse können mit Venn Diagrammen dargestellt werden:



Ein Ereignis ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

- Wenn die Untermenge leer ist, ist das Ereignis unmöglich.
- Wenn die Untermenge alle möglichen Beobachtungen enthält, ist das Ereignis sicher.

Mengenlehre

Aus den Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz können die De Morgan's Gesetze abgeleitet werden:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

$$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$$

$$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$

$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$$

Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Prinzipiell gibt es drei Interpretationen von Wahrscheinlichkeit:

- Frequentistisch $P(A) = \lim \frac{N_A}{n_{\exp}}$ für $n_{\exp} \to \infty$

- Klassisch $P(A) = \frac{n_A}{n_{tot}}$

- Bayes $P(A) =$ Grad der persönlichen Überzeugung, dass das Ereignis A eintreten wird

Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie baut auf den drei Axiomen von Kolmogorov auf:

Axiom 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

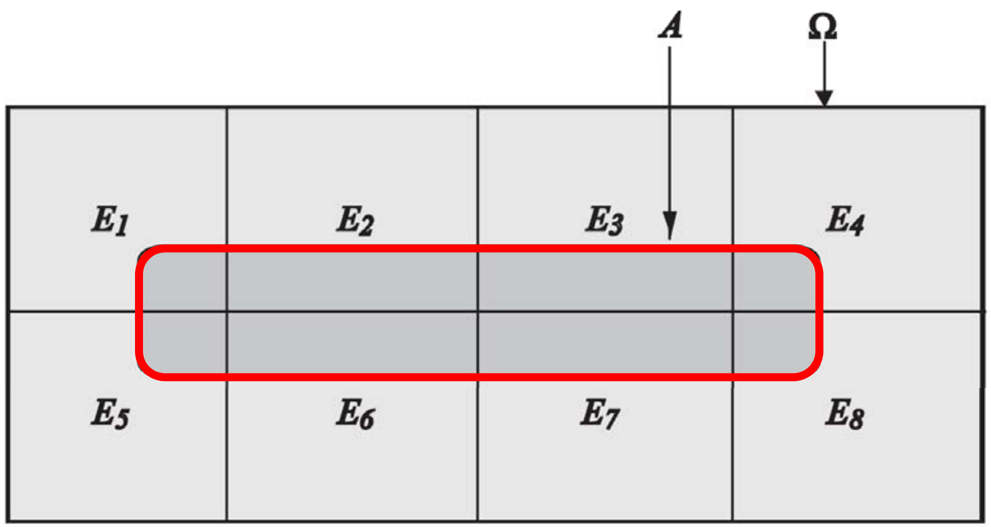
Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

wenn $E_1, E_2, \ldots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei der Ereignisraum Ω aufgeteilt in n sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$



$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n) =$$

$$P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n) =$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

“Likelihood” Prior

folgt

$$\underbrace{P(E_i|A)}_{\text{Posterior}} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Posterior

Bayes Rule

Reverend
Thomas Bayes
(1702-1764)

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

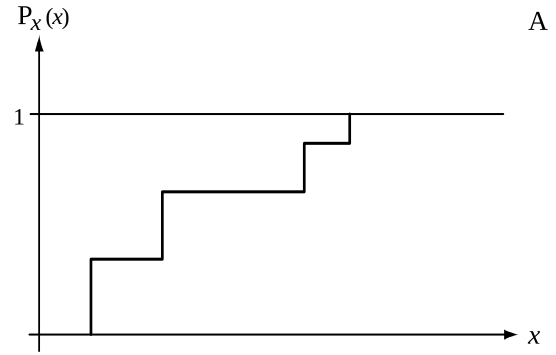
- Unsicherheiten infolge natürlicher Variabilität (Zufall)
  - Aleatorische Unsicherheit
- Unsicherheiten infolge von unvollständigem Wissen
  - Epistemische Unsicherheit

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

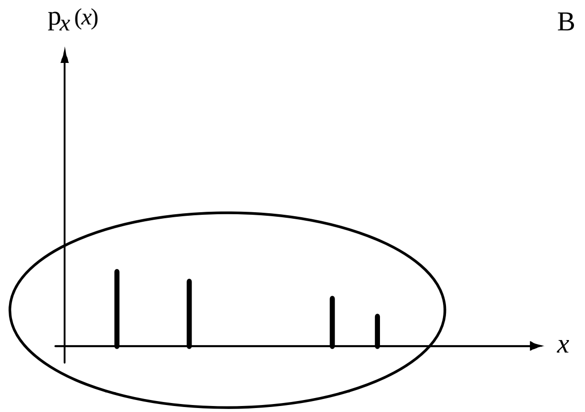
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer diskreten Zufallsvariablen X kleiner als x ist wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben

$$P_X(x) = \sum_{x_i < x} p_X(x_i)$$



Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine diskrete Zufallsvariable ist definiert durch:

$$p_X(x_i) = P(X = x_i)$$



Summe muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

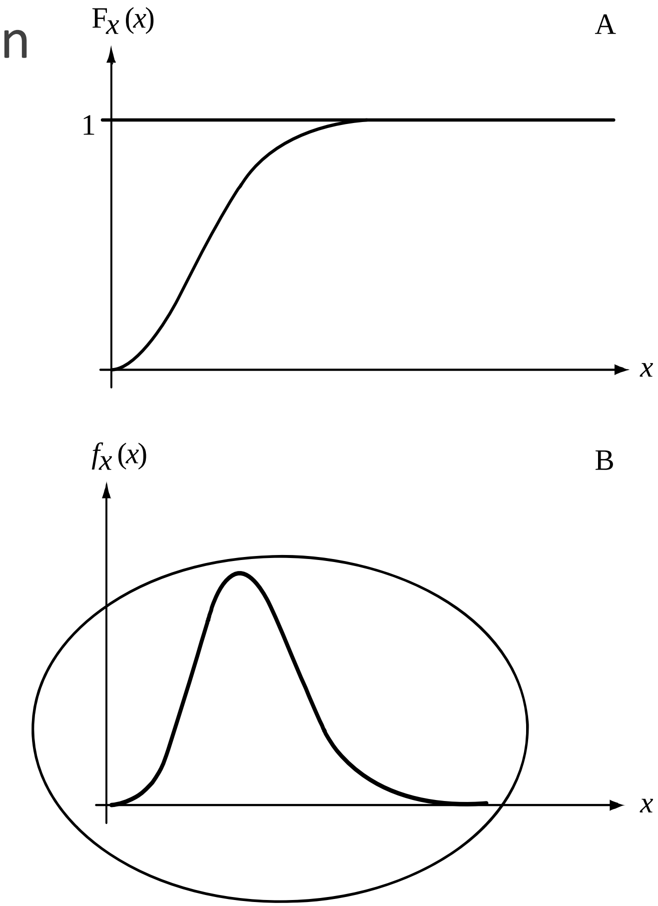
Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X kleiner als x ist wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben

$$F_X(x) = P(X < x)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine kontinuierliche Zufallsvariable ist definiert durch:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$



Integral muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen) können durch ihre Parameter oder ihre Momente beschrieben werden.

$$F_X(x,\mathbf{p}) \qquad f_X(x,\mathbf{p})$$

Parameter

Die Parameter können zu den Momenten in Beziehung gesetzt werden und umgekehrt.

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Das i'te Moment m_i einer diskreten Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^i p_X(x_j)$$

Der Erwartungswert $E[X]$ einer diskreten Zufallsvariable X entspricht dem ersten Moment und ist definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j p_X(x_j)$$

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Das i'te Moment m_i einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_X(x)dx$$

Der Erwartungswert $E[X]$ einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist entsprechend dem ersten Moment definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx$$

Werkzeuge zur Modellierung von Unsicherheiten

- Erwartungswert

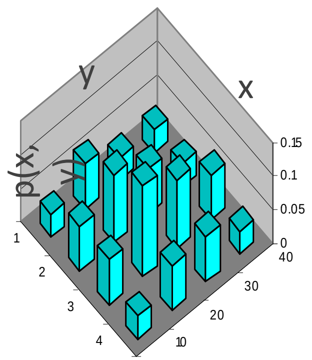
$$E[c] = c$$
$$E[cX] = cE[X]$$
$$E[a + bX] = a + bE[X]$$
$$E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

- Varianz

$$\begin{aligned} Var[X] &= E\left[(X-\mu_X)^2\right] \\ &= E\left[X^2 + \mu_X^2 - 2\mu_X X\right] \\ &= \mu_X^2 + E\left[X^2\right] - 2\mu_X E[X] \\ &= \mu_X^2 + E\left[X^2\right] - 2\mu_X^2 = E\left[X^2\right] - \mu_X^2 \end{aligned}$$

- Multivariate Verteilungen

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P\left(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap \ldots \cap X_n \leq x_n\right)$$



Werkzeuge zur Modellierung von Unsicherheiten

- Eigenschaften des Erwartungswertoperators

Anhand des Ergebnisses

$$Var[X] = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2 + \mu_X^2 - 2\mu_X X\right] = E\left[X^2\right] - \mu_X^2$$

ist erkennbar, dass grundsätzlich gilt:

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

für konvexe / konkave Funktionen – JENSEN'S Ungleichheit!!

Gleichheit gilt ausschließlich für lineare Funktionen!

Werkzeuge zur Modellierung von Unsicherheiten

- Die kumulative Verteilungsfunktion für die Summe zweier Zufallsvariablen

Vorausgesetzt, die Summe ist $Y = X_1 + X_2$ und $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$

Somit können wir zuerst die Dichtefunktion für $Y = x_1 + X_2$ bestimmen, unter der Annahme, dass X_1 gegeben ist, z.B. durch

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \qquad f_{Y|X_1}(y|x_1) = f_{X_2|X_1}(y - x_1|x_1)$$

Wir erhalten: $f_{Y,X_1}(y,x_1) = f_{X_2|X_1}(y - x_1|x_1)\, f_{X_1}(x_1) = f_{X_2,X_1}(y - x_1, x_1)$

Werkzeuge zur Modellierung von Unsicherheiten

- Die kumulative Verteilungsfunktion für Funktionen von Zufallsvariablen

Falls $g(x)$ monoton fallend ist, kann die Realisation von Y nur dann kleiner als y_0 sein, wenn die Realisation von X größer als x_0 ist. In diesem Fall muss das Vorzeichen vertauscht werden:

$$F_Y(y) = -F_X(g^{-1}(y))$$

man erhält:

$$f_Y(y) = -\frac{\partial x}{\partial y} f_X(x)$$

Grundsätzlich folgt daraus für monoton ansteigende oder fallende Funktionen:

$$f_Y(y) = \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| f_X(x)$$

Werkzeuge zur Modellierung von Unsicherheiten

- Die kumulative Verteilungsfunktion für Funktionen von Zufallsvariablen

Falls die Elemente eines Zufallsvektors $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, .. Y_n)^T$ als eineindeutige Darstellung der monoton steigenden oder fallenden Funktionen $g_i, i = 1, 2, .. n$ der Elemente des Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2, .. X_n)^T$ angenommen werden können,

$$Y_i = g_i(\mathbf{X})$$

ergibt sich: $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}|\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

Mit $|\mathbf{J}|$ als Betrag der Determinante von $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_n}{\partial_n} \end{bmatrix}$