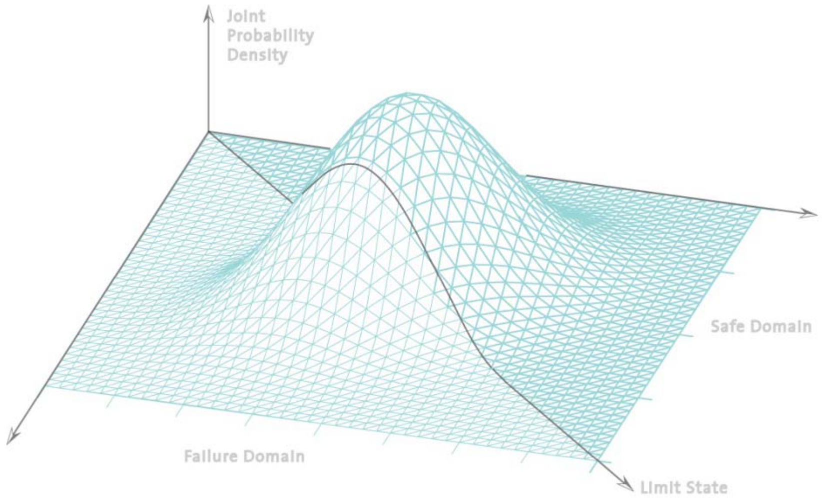


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

Inhalt

- Modellierung von Unsicherheiten – Übersicht
- Zufallsvariablen
  - Eigenschaften des Erwartungswertoperators
  - Zufallsvektoren und Produktmomente
  - bedingte Verteilungen und bedingte Momente
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe zweier Zufallsvariablen
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung für Funktionen von Zufallsvariablen

Modellierung von Unsicherheiten - Übersicht

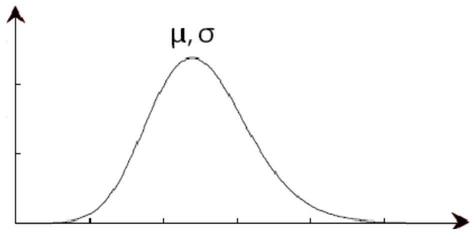
- Zufallsvariablen und deren Charakteristika

REALITÄT

UNSICHERHEIT

DATEN / BEOBACHTUNGEN

MODELL



Zufalls-
variablen

x,y	p(x,y)
1,10	0.033
1,20	0.067
1,30	0.033
1,40	0.033
2,10	0.067
2,20	0.100
2,30	0.067
2,40	0.033
3,10	0.067
3,20	0.133
3,30	0.100
3,40	0.067
4,10	0.033
4,20	0.067
4,30	0.067
4,40	0.033

Zufallsvariablen

- Eigenschaften des Erwartungswertoperators

Der Erwartungswertoperator ermöglicht die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz einer Zufallsvariablen.

Sobald wir verstehen, wie der Erwartungswertoperator funktioniert, können wir den Erwartungswert und die Varianz von Funktionen von Zufallsvariablen berechnen.

Dies dient im Besonderen der Analyse von Modellen im Ingenieurwesen, die eine oder mehr Zufallsvariablen beinhalten.

BEISPIEL: Berechnung der Gesamtdauer eines Bauvorhabens als Funktion der Dauer der einzelnen Bauabschnitte.

Zufallsvariablen

- Eigenschaften des Erwartungswertoperators

Der Erwartungswertoperator besitzt folgende Eigenschaften:

$a, b, c = \text{Konstante}$

$X = \text{Zufallsvariable}$

$g_i(.) = \text{Funktion}$

$$E[c] = c$$

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

$$E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

Zufallsvariablen

- Eigenschaften des Varianzoperators

Die Varianz kann wie folgt beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
Var\left[X\right] &= E\left[(X-\mu_X)^2\right] \\
&= E\left[X^2+\mu_X^2-2\mu_X X\right] \\
&= \mu_X^2+E\left[X^2\right]-2\mu_X E\left[X\right] \\
&= \mu_X^2+E\left[X^2\right]-2\mu_X^2 = E\left[X^2\right]-\mu_X^2
\end{aligned}
$$

Zufallsvariablen

- Eigenschaften des Varianzoperators

$$a,b,c = \text{Konstante}$$
$$X = \text{Zufallsvariable}$$
$$g_i(.) = \text{Funktion}$$

Darüber hinaus gilt:

$$Var[c] = 0$$
$$Var[cX] = c^2 Var[X]$$
$$Var[a+bX] = b^2 Var[X]$$

und

$$E[c] = c$$
$$E[cX] = cE[X]$$
$$E[a+bX] = a+bE[X]$$
$$E[g_1(X)+g_2(X)] =$$
$$E[g_1(X)]+E[g_2(X)]$$

Zufallsvariablen

- Eigenschaften des Erwartungswertoperators

Anhand des Ergebnisses

$$Var[X] = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2 + \mu_X^2 - 2\mu_X X\right] = E\left[X^2\right] - \mu_X^2$$

ist erkennbar, dass grundsätzlich gilt:

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

für konvexe / konkave Funktionen – JENSEN'S Ungleichheit!!

Gleichheit gilt ausschließlich für lineare Funktionen!

Kleine Denkaufgabe 5.1

Sie bekommen einen Beutel mit Stiften. Sie wissen über den Inhalt, dass es einige rote und einige grüne Stifte gibt, jedoch nicht deren genaue Anzahl.

Sie werden nun gefragt einen Stift aus dem Beutel zu ziehen.

Welche Art der Unsicherheit ist mit dem Ereignis, dass sie einen roten Stift ziehen, verbunden ??

- Aleatorische Unsicherheit
- Epistemische Unsicherheit
- Weiss nicht...

Kleine Denkaufgabe 5.2

Sie bekommen eine Fünf Franken Münze und werden gefragt diese in die Luft zu werfen und das Resultat zu notieren.

Welche Unsicherheit ist mit dem Ereignis verbunden, dass Sie als Ergebnis “Kopf“ bekommen?

- Aleatorische Unsicherheit
- Epistemische Unsicherheit
- Weiss nicht…

Zufallsvariablen

- ## Zufallsvektoren

Wir beschäftigen uns häufig mit Modellen, die nicht nur eine, sondern mehrere Zufallsvariablen beinhalten.

Diese Zufallsvariablen können in einem Vektor vereint werden.

Generell sind die Bestandteile eines Vektors voneinander abhängig.
BEISPIEL: Regenwetter und Wasserpegel.

Folglich ist es notwendig, dass wir probabilistische Modelle erstellen, welche die genannte Abhängigkeit berücksichtigen.
Dies kann anhand von multivariaten, kumulativen Verteilungsfunktionen bewerkstelligt werden.

Zufallsvariablen

- Zufallsvektoren

Wir betrachten nun nicht mehr nur eine diskrete Zufallsvariable, sondern einen Vektor von mehreren diskreten Zufallsvariablen; hier z.B. zwei:

$$\mathbf{Z} = (X, Y)^T$$

Die bi-variate, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist:

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = p_{X,Y}(x, y) = P\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$

Die bi-variate, kumulative Verteilungsfunktion ist:

$$P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = P_{X,Y}(x, y) = P\big((X \le x) \cap (Y \le y)\big) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} p_{X,Y}(x_i, y_i)$$

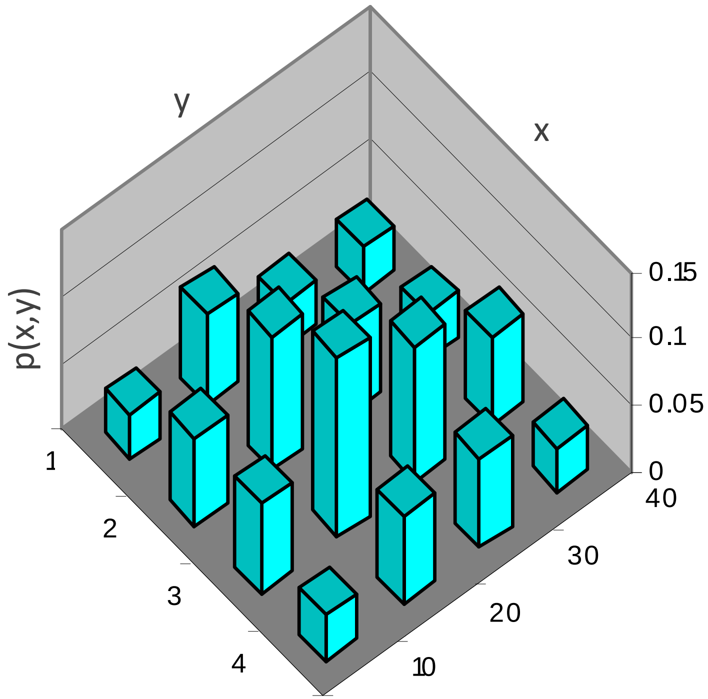
Zufallsvariablen

Zufallsvektoren

Gegeben sei eine zweidimensionale, diskrete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

x,y	p(x,y)
1,10	0.033
1,20	0.067
1,30	0.033
1,40	0.033
2,10	0.067
2,20	0.100
2,30	0.067
2,40	0.033
3,10	0.067
3,20	0.133
3,30	0.100
3,40	0.067
4,10	0.033
4,20	0.067
4,30	0.067
4,40	0.033

$\Sigma=1$



Zufallsvariablen

- Zufallsvektoren

Die marginale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer diskreten Zufallsvariablen (z.B.) X ist wie folgt definiert:

$$p_X(x) \equiv P(X = x) = \sum_{all\ y_i} p_{X,Y}(x, y_i)$$

$$P_X(x) \equiv P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

$$= \sum_{x_i \leq x} \sum_{all\ y_i} p_{X,Y}(x_i, y_i)$$

Zufallsvariablen

- Zufallsvektoren

Gegeben sei eine zweidimensionale, diskrete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

x,y	p(x,y)
1,10	0.033
1,20	0.067
1,30	0.033
1,40	0.033
2,10	0.067
2,20	0.100
2,30	0.067
2,40	0.033
3,10	0.067
3,20	0.133
3,30	0.100
3,40	0.067
4,10	0.033
4,20	0.067
4,30	0.067
4,40	0.033

Σ=0.17

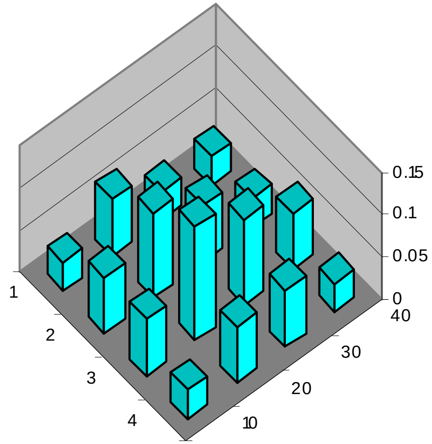
Σ=0.27

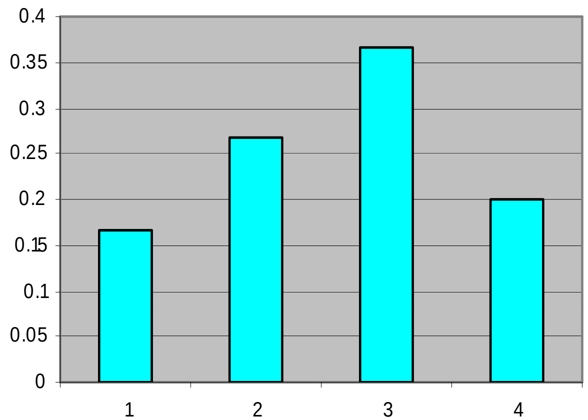
Σ=0.37

Σ=0.20

Σ=1

diskrete, multivariate Dichte





marginale Dichte für Zufallsvariable x

Zufallsvariablen

- ## Zufallsvektoren

Wir betrachten nun nicht mehr nur eine kontinuierliche Zufallsvariable, sondern einen Vektor von mehreren kontinuierlichen Zufallsvariablen; hier z.B. zwei:

$$\mathbf{Z} = (X, Y)^T$$

Die bi-variate, kumulative Verteilungsfunktion ist:

$$F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = F_{X,Y}(x, y) = P(X \le x \cap Y \le y)$$

Die bi-variate, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist:

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

Zufallsvariablen

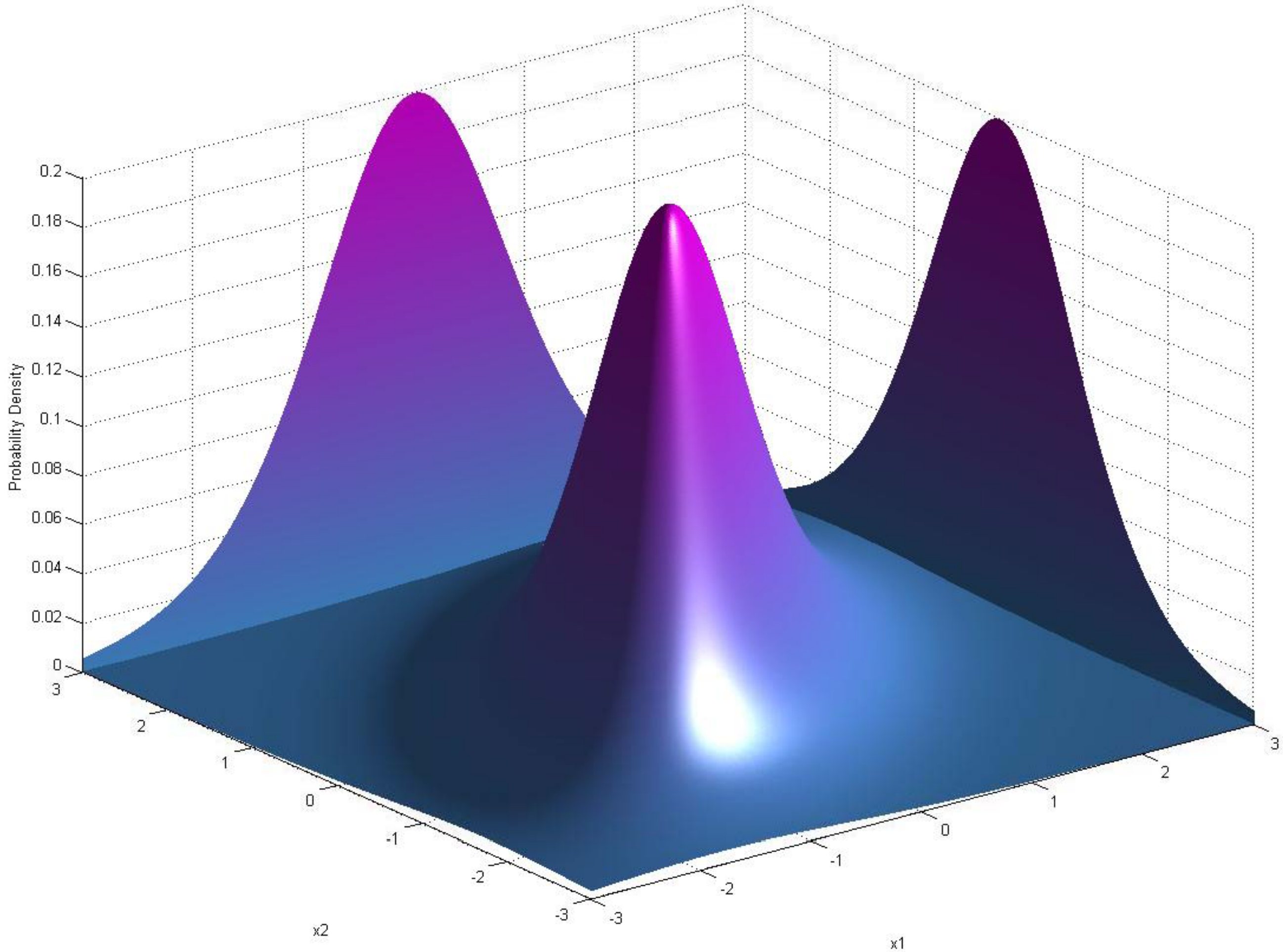
- Zufallsvektoren

Die marginale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen (z.B.) X ist wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Zufallsvariablen

Bi-variate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion



Kleine Denkaufgabe 5.3

Wie Sie bereits gesehen haben, wird für stetige Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ als Ausdruck der kumulativen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $F_X(x)$ als

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

definiert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert im abgeschlossenen Intervall $[x; x+dx]$ annimmt ist: $P\left(X \in [x; x+dx]\right) = f_X(x)dx$

Wenn $dx \to 0$ dann bekommen wir $P\left(X = x\right) = f_X(x).0 = 0$

Bedeutet dies, dass es unmöglich ist irgend einen Wert für x zu bekommen ??

Ja, unmöglich

Nein, nicht unmöglich

Weiss nicht…

Zufallsvariablen

Zufallsvektoren und Produktmomente

Die Kovarianz zwischen dem i-ten und j-ten Element des Zufallsvektors kontinuierlicher Zufallsvariablen ist als das zentrale Produktmoment definiert.

$$C_{X_i X_j} = E\left[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{X_i})(x_j - \mu_{X_j}) f_{X_i X_j}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j$$

Daraus ist unter der Bedingung, dass $i = j$ ist, die Varianz für X_i ersichtlich:

$$C_{X_i X_i} = Var\left[X_i\right]$$

Der Korrelationskoeffizient errechnet sich wie folgt:

$$\rho_{X_i X_j} = \frac{C_{X_i X_j}}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}} \qquad \rho_{X_i X_i} = 1$$

Zufallsvariablen

- Zufallsvektoren und Produktmomente

Der Erwartungswert und die Varianz einer linearen Funktion

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

werden bestimmt anhand von:

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j C_{X_i X_j}$$

Zufallsvariablen

- bedingte Verteilungen und bedingte Momente

Nehmen wir an, Informationen, welche ein Ereignis beeinflussen sind bekannt.

BEISPIEL: Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass sich ein bestimmtes Projekt verzögert, wird angenommen, dass ein Teilabschnitt die geplante Laufzeit um 50% überschreitet.

Zufallsvariablen

- bedingte Verteilungen und bedingte Momente

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Zufallsvariable X_1 bei gegebenem Resultat der Zufallsvariable X_2 ist:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Wenn X_1 und X_2 unabhängig voneinander sind, gilt:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1}(x_1)$$

Zufallsvariablen

- bedingte Verteilungen und bedingte Momente

Die bedingte kumulative Verteilungsfunktion kann mittels Integration errechnet werden:

$$F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,X_2}(z, x_2)dz}{f_{X_2}(x_2)}$$

Zufallsvariablen

- bedingte Verteilungen und bedingte Momente

Die nicht-bedingte kumulative Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable X_1 kann anhand des Theorems der totalen Wahrscheinlichkeit von der bedingten kumulativen Verteilungsfunktion abgeleitet werden.

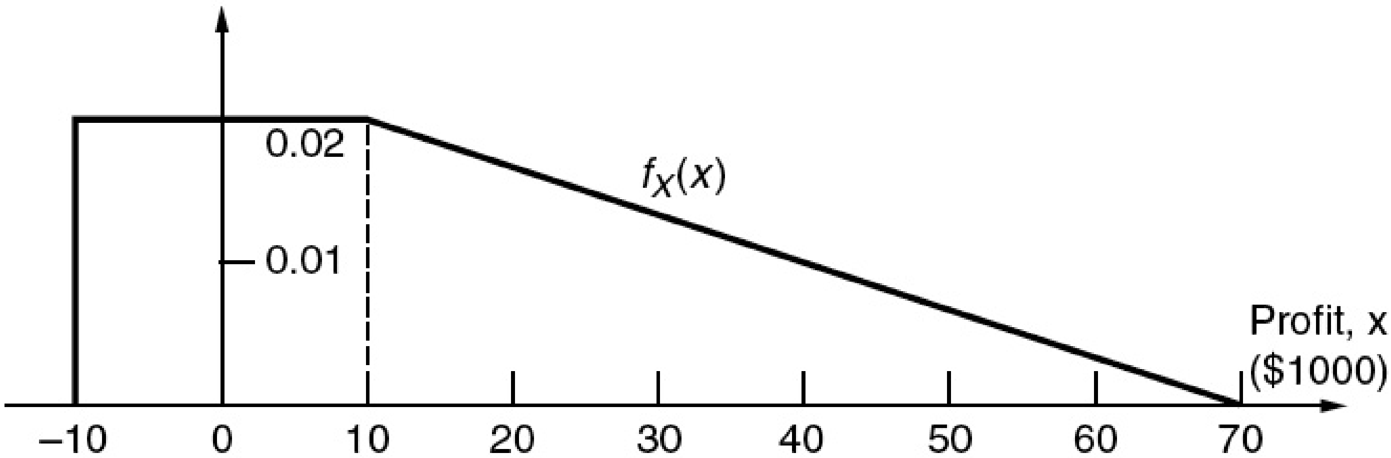
$$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2$$

Der bedingte Erwartungswert ist wie folgt definiert:

$$\mu_{X_1|X_2} = E\left[X_1 | X_2 = x_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \, f_{X_1|X_2}\left(x|x_2\right) dx_1$$

Kleine Denkaufgabe 5.4

Der Gewinn X den ein Bauunternehmen bei einem Bauprojekt erzielt, kann durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben werden:



Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauunternehmen an dem Bauprojekt Geld verlieren wird??

= 0.2

= 0.02

= 0

Zufallsvariablen

Häufig ist man an Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten von Funktionen der Zufallsvariablen interessiert.

Die Funktionen sind hilfreich, um Ereignisse, die von Interesse sind, zu beschreiben – sie dienen als Ingenieurmodelle.

Ein einfacher Fall ist die Summe zweier Zufallsvariablen – dafür ist es hilfreich, die kumulative Verteilungsfunktion zu bestimmen.

Ein üblicher Anwendungsbereich ist z.B. die Bestimmung von kumulativen Verteilungsfunktionen als Hilfsmittel zur Betrachtung monotoner Funktionen.

Zufallsvariablen

- Die kumulative Verteilungsfunktion für die Summe zweier Zufallsvariablen

Vorausgesetzt, die Summe ist $Y = X_1 + X_2$ und $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$

Somit können wir zuerst die Dichtefunktion für $Y = x_1 + X_2$ bestimmen, unter der Annahme, dass X_1 gegeben ist, z.B. durch

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \qquad f_{Y|X_1}(y|x_1) = f_{X_2|X_1}(y - x_1|x_1)$$

Wir erhalten: $f_{Y,X_1}(y,x_1) = f_{X_2|X_1}(y - x_1|x_1) f_{X_1}(x_1) = f_{X_2,X_1}(y - x_1, x_1)$

Zufallsvariablen

- Die kumulative Verteilungsfunktion für die Summe zweier Zufallsvariablen

Die marginale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Y kann nun durch Integration über X_1 ermittelt werden – beispielsweise anhand von:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2,X_1}(y - x_1, x_1)\,dx_1$$

Falls X_1 und X_2 unabhängig voneinander sind, erhält man das sogenannte Faltungsintegral:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1)\,dx_1$$

Zufallsvariablen

- Die kumulative Verteilungsfunktion für Funktionen von Zufallsvariablen

Es soll die kumulative Verteilungsfunktion für eine Funktion von Zufallsvariablen z.B. $Y = g(X)$ berechnet werden.

Dabei ist die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion von X gegeben als $F_X(x)$.

Falls $g(x)$ monoton ansteigt und der Zusammenhang eineindeutig ist, kann die Realisation von Y nur dann kleiner als y_0 sein, wenn auch die Realisation von X kleiner ist als x_0. Dabei gilt $x_0 = g^{-1}(y_0)$ und es folgt:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y))$$

Die kumulative Verteilungsfunktion für Y ist auf folgende Weise definiert:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

Zufallsvariablen

- Die kumulative Verteilungsfunktion für Funktionen von Zufallsvariablen

ausgehend von $$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

erhält man $$f_Y(y) = \frac{\partial F_X(g^{-1}(y))}{\partial y}$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\, f_X(g^{-1}(y)) \Longrightarrow f_Y(y) = \frac{\partial x}{\partial y} f_X(x)$$

Zufallsvariablen

- Die kumulative Verteilungsfunktion für Funktionen von Zufallsvariablen

Falls $g(x)$ monoton fallend ist, kann die Realisation von Y nur dann kleiner als y_0 sein, wenn die Realisation von X größer als x_0 ist. In diesem Fall muss das Vorzeichen vertauscht werden:

$$F_Y(y) = -F_X(g^{-1}(y))$$

man erhält:

$$f_Y(y) = -\frac{\partial x}{\partial y} f_X(x)$$

Grundsätzlich folgt daraus für monoton ansteigende oder fallende Funktionen:

$$f_Y(y) = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| f_X(x)$$

Zufallsvariablen

- Die kumulative Verteilungsfunktion für Funktionen von Zufallsvariablen

Falls die Elemente eines Zufallsvektors $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,..Y_n)^T$ als eineindeutige Darstellung der monoton steigenden oder fallenden Funktionen $g_i, i=1,2,..n$ der Elemente des Zufallsvektors $\mathbf{X}=(X_1,X_2,..X_n)^T$ angenommen werden können,

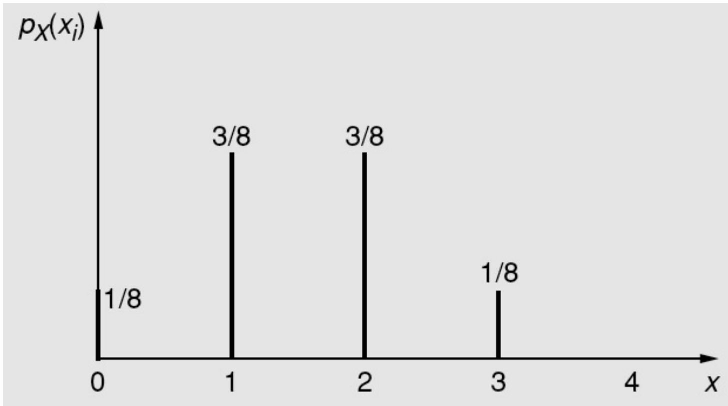
$$Y_i = g_i(\mathbf{X})$$

ergibt sich: $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})=|\mathbf{J}|\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

Mit $|\mathbf{J}|$ als Betrag der Determinante von $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_n}{\partial_n} \end{bmatrix}$

Kleine Denkaufgabe 5.5

Ein Erdbauunternehmer plant den Kauf von 3 Bulldozern für einen neuen Auftrag.
Aus seiner Erfahrung weiss er, dass es eine 50% Wahrscheinlichkeit gibt, dass ein Bulldozer bei der Hälfte der Bauzeit ausfällt.
Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Anzahl der Bulldozer X die bei der Hälfte der Bauzeit ausfällt ist beschrieben durch



= 3

= 2

= 1.5

Was ist der Erwartungswert der Anzahl von Bulldozern welche bei der Hälfte der Bauzeit ausfällt ?