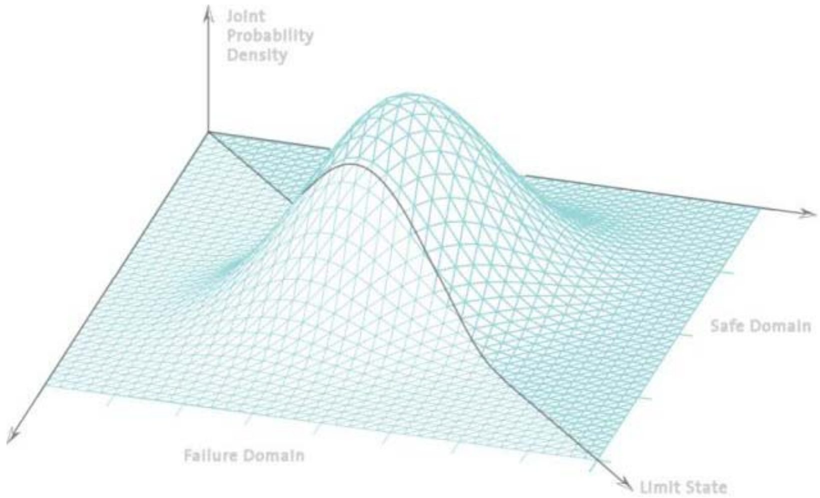
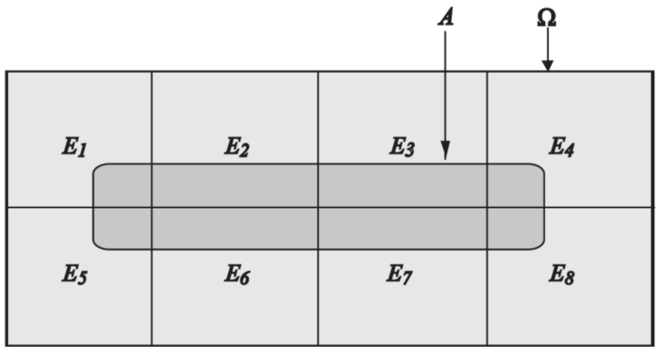


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

Satz von Bayes



Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

und $P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n) =$

$$P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)$$

folgt

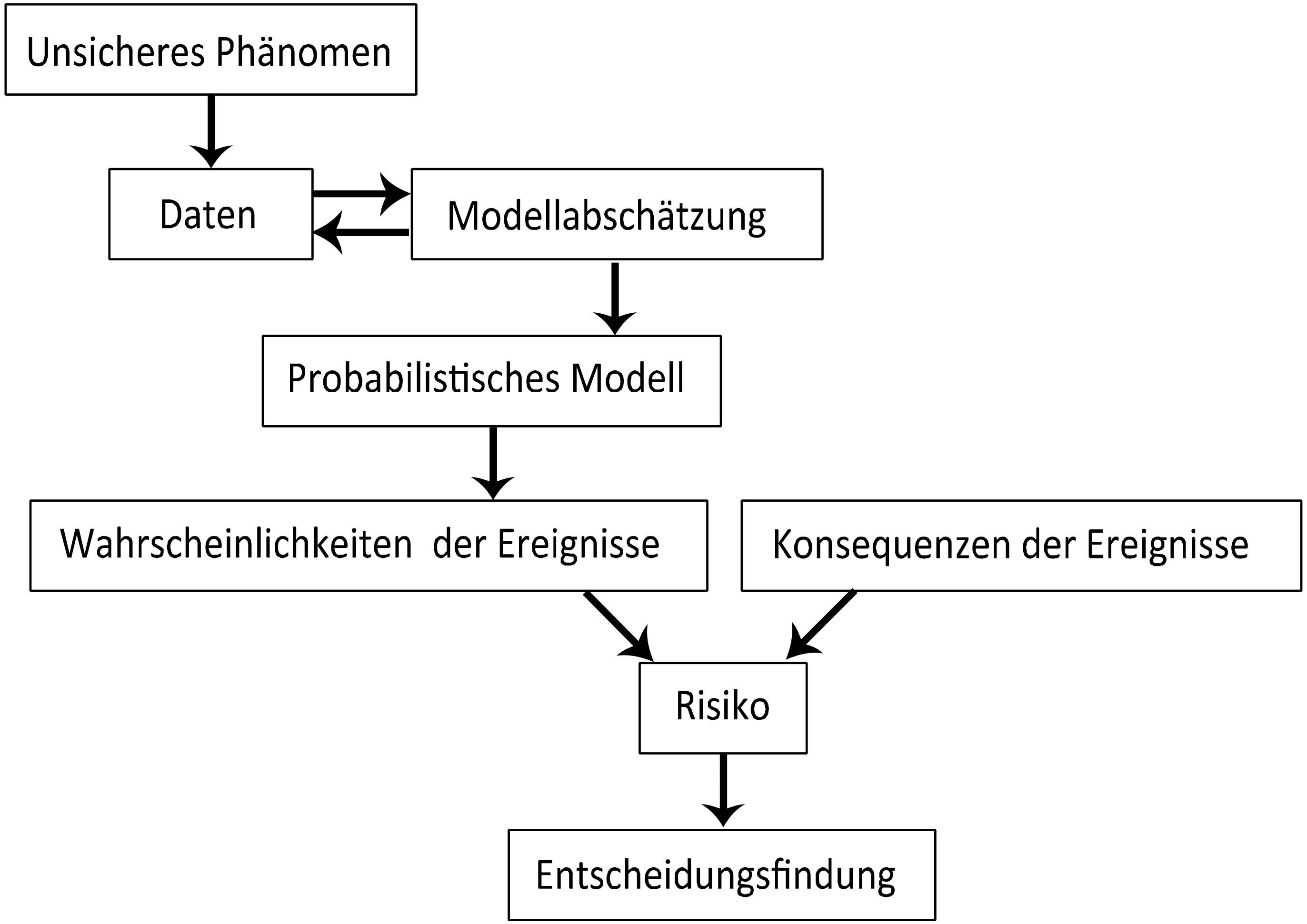
$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Inhalte der heutigen Vorlesung

- Modellierung von Unsicherheit - Übersicht
- Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen
- Zufallsvariablen
  - diskrete kumulative Verteilungen und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
  - kontinuierliche kumulative Verteilungen und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
  - Charakterisierung von Zufallsvariablen
  - Momente der Zufallsvariablen
  - Der Erwartungswert- und der Varianz-Operator

Modellierung von Unsicherheiten - Übersicht

- Weshalb Unsicherheitsmodellierung?



Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- Unsicherheiten infolge natürlicher Variabilität (Zufall)
  - Aleatorische Unsicherheit
- Unsicherheiten infolge von unvollständigem Wissen
  - Epistemische Unsicherheit

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- Natürliche Schwankungen – aleatorische Unsicherheit
  - Resultate beim Würfeln
  - Variation der Eigenschaften von Materialien
  - Variation von Windstärken
  - Variation des Niederschlags

- Modell Unsicherheit – epistemische Unsicherheit
  - fehlendes Wissen
  - unangebrachte/ungenaue Modelle (Physikalische Modelle)

- Statistische Unsicherheit– epistemische Unsicherheit
  - wenig Information / kleine Anzahl Messungen

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Beispiel: Struktur eines Dammes.

- Die Bemessung (Höhe) des Dammes bestimmt die Häufigkeit von Überflutungen.
- Falls exakte Modelle zur Verfügung stehen, um zukünftige Wasserstände vorherzusagen, und unser Wissen über die Eingabeparameter perfekt ist, können wir die Häufigkeit von Überflutungen (pro Jahr) berechnen. → eine deterministische Welt
- Selbst, wenn die Welt deterministisch wäre, hätten wir keine perfekten Informationen über sie. Somit können wir die Welt ebenso als zufallsbedingt betrachten.

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

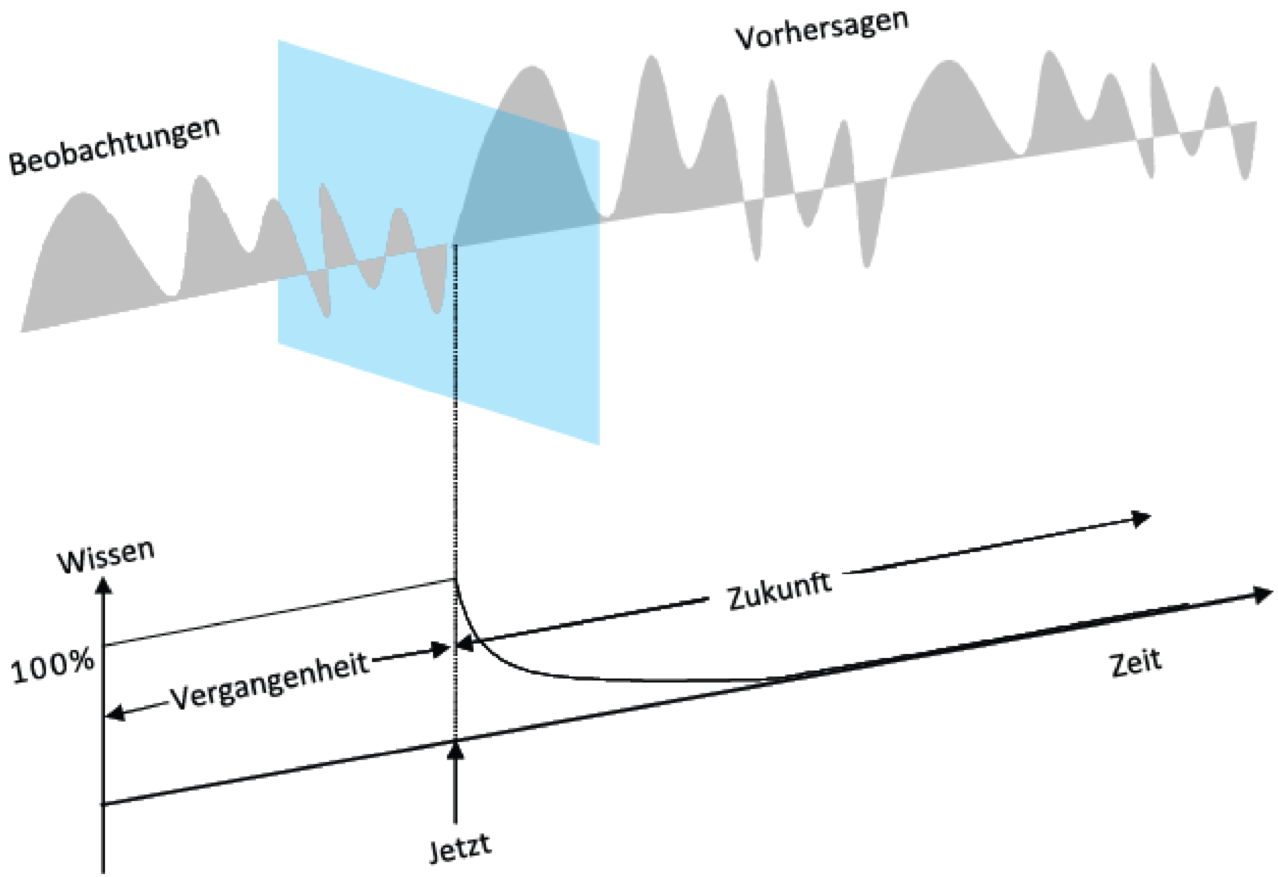
Die sogenannte

inhärente physikalische Unsicherheit (aleatorisch = Typ I)
ist die Unsicherheit, resultierend aus der ‚Tatsache', dass es in unserer Umwelt zufällige Prozesse gibt.

Ein anderer pragmatischer Standpunkt ist, diesen Unsicherheitstyp als jede Unsicherheit, welche nicht durch Sammeln von zusätzlichen Information reduziert werden kann, zu definieren.

Die Unsicherheiten welche reduziert werden können, sind
Modell- und statistische Unsicherheiten (epistemisch = Typ II).

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen



Die Struktur der Unsicherheit verändert sich auch als Funktion der Zeit und ist somit abhängig von der Zeit.

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

Eine Zufallsvariable wird mit einem
grossen Buchstaben bezeichnet: X

Eine Realisation einer Zufallsvariablen wird mit einem
kleinen Buchstaben bezeichnet: x

Wir unterscheiden zwischen

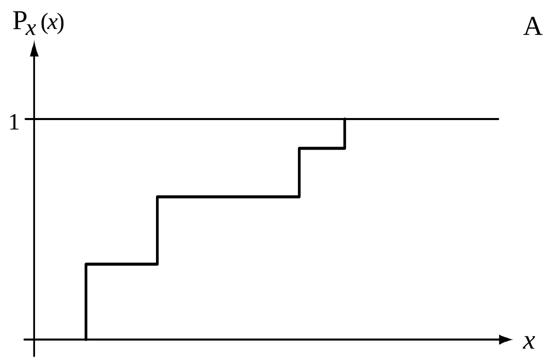
- kontinuierlichen Zufallsvariablen: Kann jeden Wert in einem gegebenen Bereich annehmen.
- diskreten Zufallsvariablen: Kann nur diskrete Werte annehmen.

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

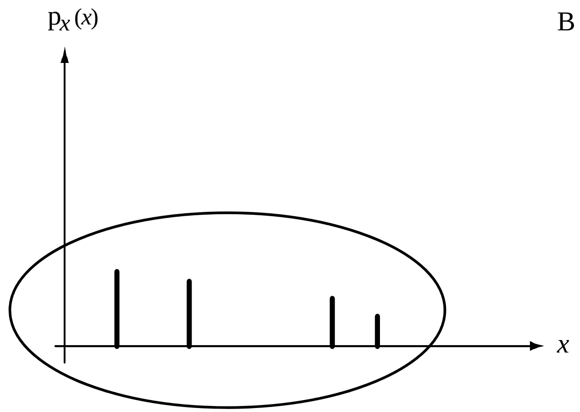
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer diskreten Zufallsvariablen X kleiner als x ist wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben

$$P_X(x) = \sum_{x_i < x} p_X(x_i)$$



Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine diskrete Zufallsvariable ist definiert durch:

$$p_X(x_i) = P(X = x_i)$$



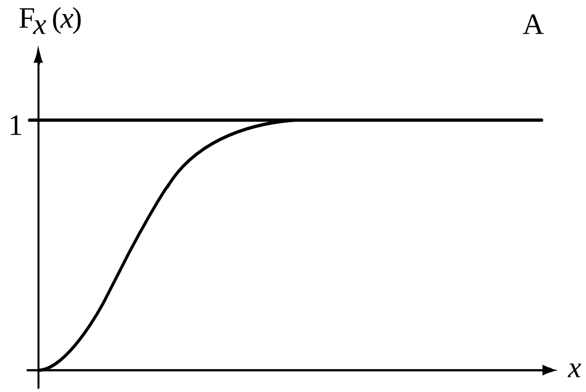
Summe muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

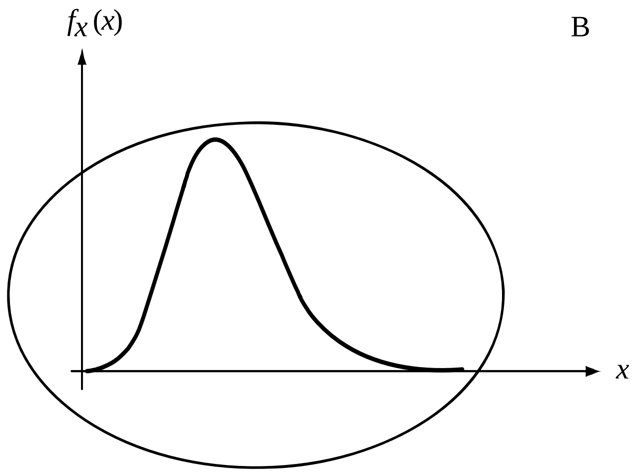
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X kleiner als x ist wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben

$$F_X(x) = P(X < x)$$



Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine kontinuierliche Zufallsvariable ist definiert durch:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$



Integral muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen) können durch ihre Parameter oder ihre Momente beschrieben werden.

$$F_X(x, \mathbf{p}) \qquad f_X(x, \mathbf{p})$$

Parameter

Die Parameter können zu den Momenten in Beziehung gesetzt werden und umgekehrt.

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Das i‘te Moment m_i einer diskreten Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^i p_X(x_j)$$

Der Erwartungswert $E[X]$ einer diskreten Zufallsvariable X entspricht dem ersten Moment und ist definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j p_X(x_j)$$

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Das i'te Moment m_i einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_X(x) dx$$

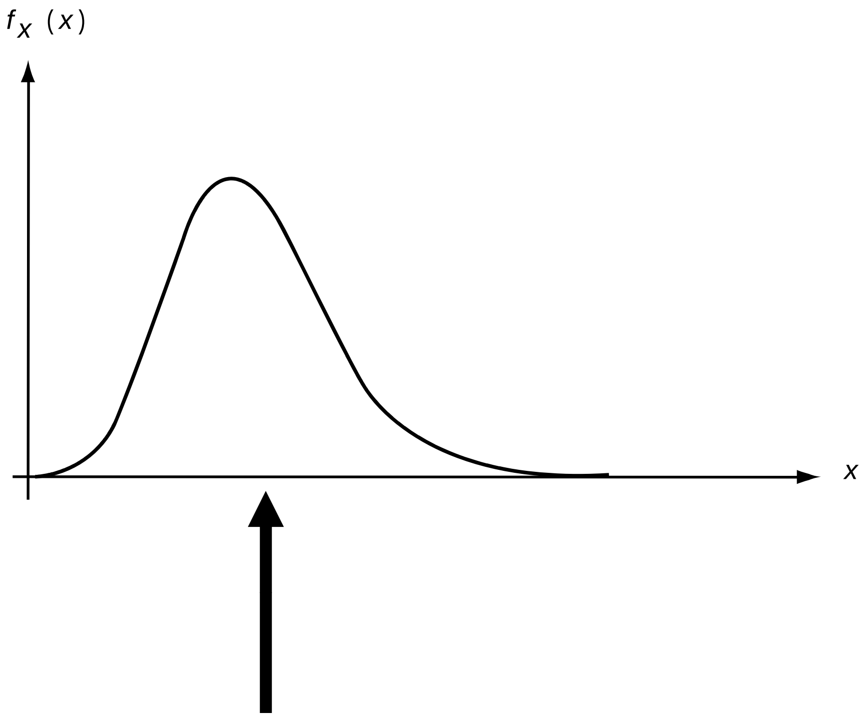
Der Erwartungswert $E[X]$ einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist entsprechend dem ersten Moment definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx$$

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Der Erwartungswert (oder Mittelwert) einer Zufallsvariablen kann als Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen verstanden werden.



Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Die Standardabweichung einer kontinuierlichen Zufallsvariablen ist als das zweite zentrale Moment definiert.

$$\sigma_X{}^2 = \underbrace{Var}_{\text{Varianz}}[X] = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\underbrace{\mu_X}_{\text{Mittelwert}})^2 f_X(x)dx$$

Für eine diskrete Zufallsvariable dementsprechend:

$$\sigma_X^2 = Var[X] = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu_X)^2 p_X(x_j)$$

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

Das Verhältnis zwischen der Standardabweichung und dem Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird als Variationskoeffizient (Coefficient of Variation CoV) bezeichnet und ist definiert als:

$$CoV[X] = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

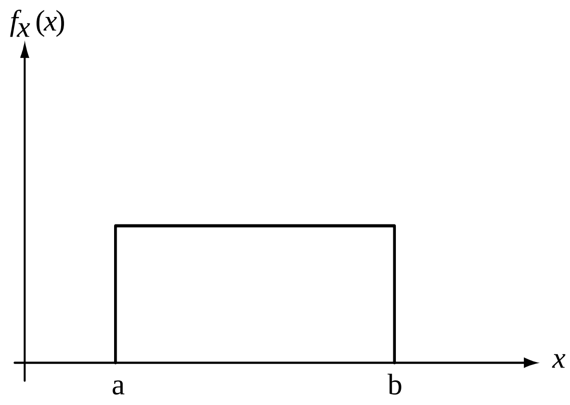
dimensionslos

Der CoV ist eine nützliche Charakteristik, um die Variabilität der Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert zu beschreiben.

Zufallsvariablen

Beispiel – Gleichverteilte Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte- und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

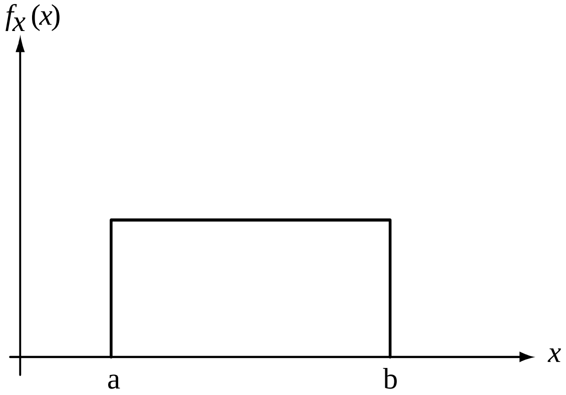


$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & b < x \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int\limits_a^x f_X(y)dy = \int\limits_a^x \dfrac{1}{b-a}dy = \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a \le x \le b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

Zufallsvariablen

Beispiel – Gleichverteilte Zufallsvariable
Erwartungswert und Varianz



$$\mu_X = E[X] = \int_a^b x\ f_X(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b$$

$$= \frac{(b+a)}{2}$$

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_a^b (x-\mu)^2 f_X(x)dx = \int_a^b \frac{(x-\mu)^2}{(b-a)}dx = \left.\frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2\mu + x\mu^2}{(b-a)}\right|_a^b$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^2$$