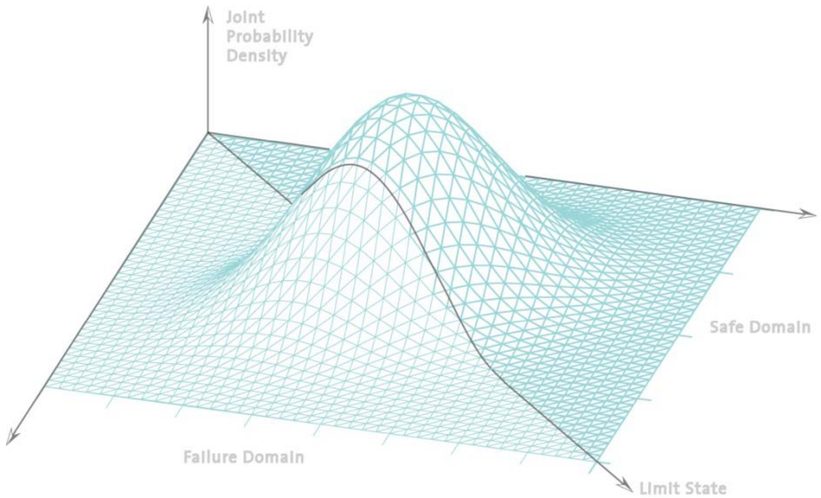


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

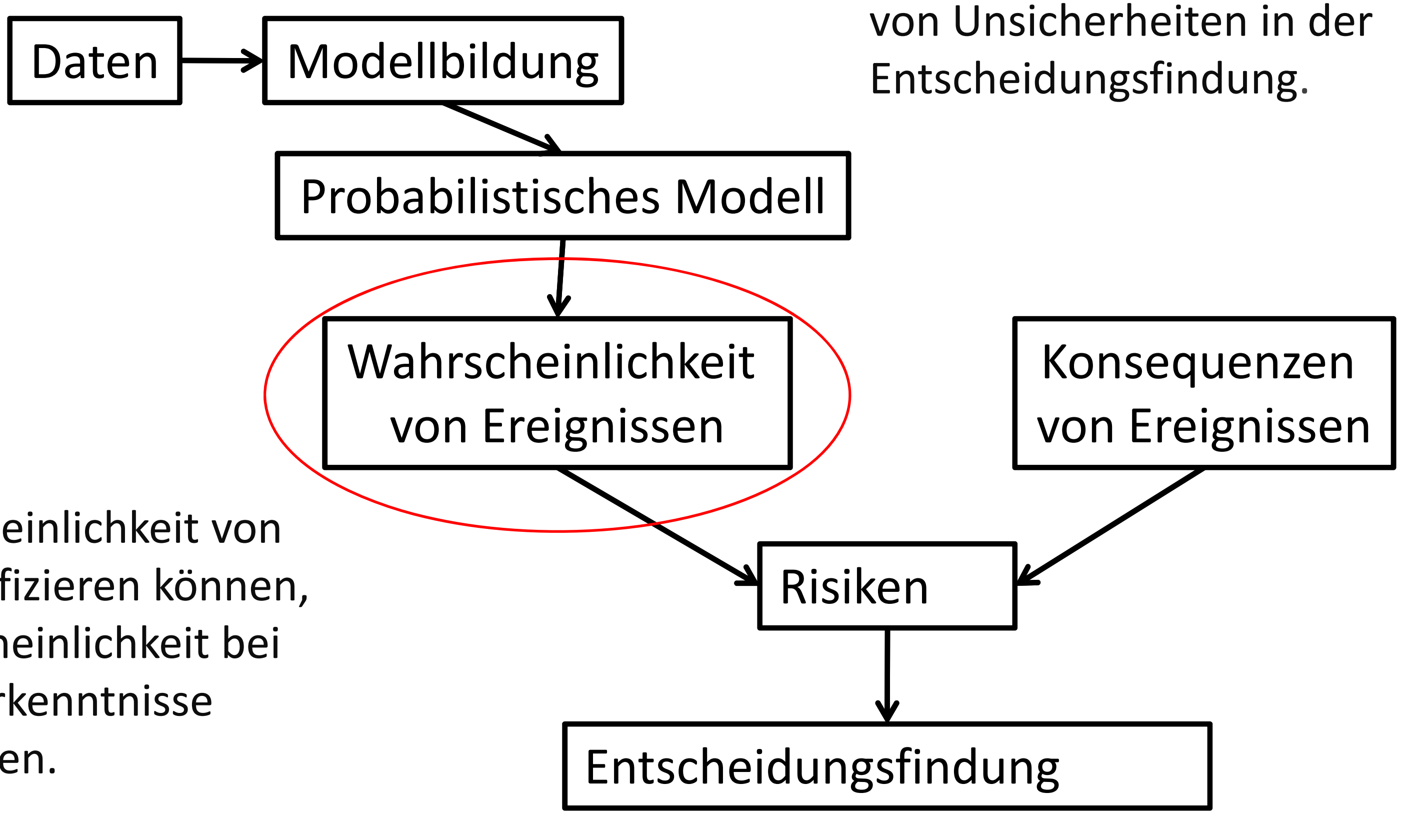
Inhalt der heutigen Vorlesung

- Ereignisraum und Ereignisse
- Interpretation von Wahrscheinlichkeit
- Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes

Übersicht: Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel und Motivation der heutigen Vorlesung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie liefert die Grundlagen für die konsistente Berücksichtigung von Unsicherheiten in der Entscheidungsfindung.



Wir sollten die Eintretenswahrscheinlichkeit von Ereignissen quantifizieren können, und diese Wahrscheinlichkeit bei Auftreten neuer Erkenntnisse aktualisieren können.

Ereignisraum und Ereignisse

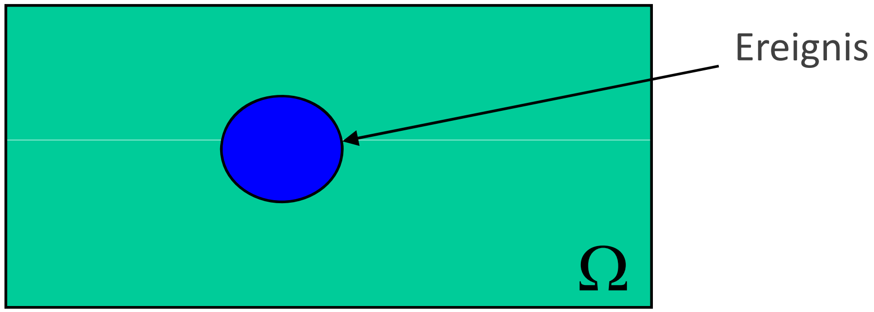
Die Menge aller möglichen Beobachtungen eines Zustandes unserer Umwelt nennen wir den Ereignisraum Ω .

Dieser Ereignisraum könnte beispielsweise alle Beobachtungen (Messungen, Werte) aus Druckfestigkeitsuntersuchungen an Beton beinhalten und würde folgendermassen geschrieben: $\Omega =]0;\infty[$

Ein Ereignis beinhaltet eine spezifische Sammlung von Beobachtungen und ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

Ereignisraum und Ereignisse

Der Ereignisraum und die Ereignisse können mit Venn Diagrammen dargestellt werden:



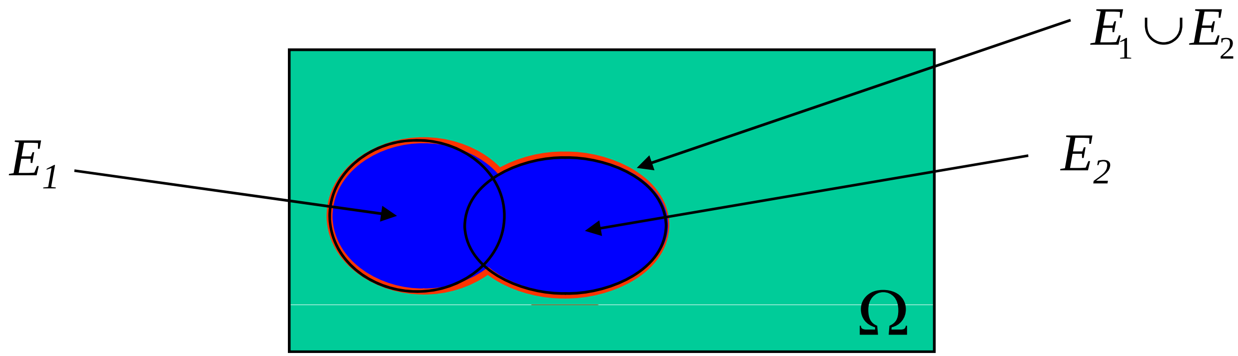
Ein Ereignis ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

- Wenn die Untermenge leer ist, ist das Ereignis unmöglich.
- Wenn die Untermenge alle möglichen Beobachtungen enthält, ist das Ereignis sicher.

Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse E_1 und E_2.

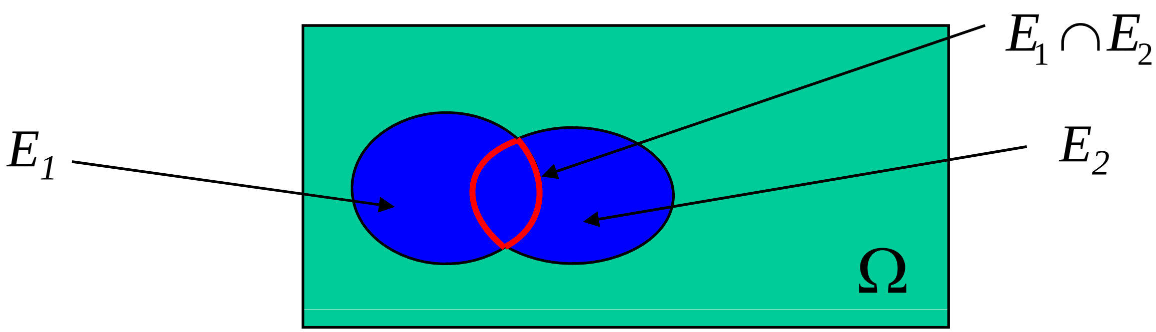
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis E_1 **und/oder** dem Ereignis E_2 gehören, heisst die **Vereinigung** von E_1 und E_2 und wird geschrieben als $E_1 \cup E_2$.



Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse E_1 und E_2.

Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis E_1 **und** dem Ereignis E_2 gehören, heisst die **Schnittmenge** von E_1 und E_2 und wird geschrieben als $E_1 \cap E_2$.

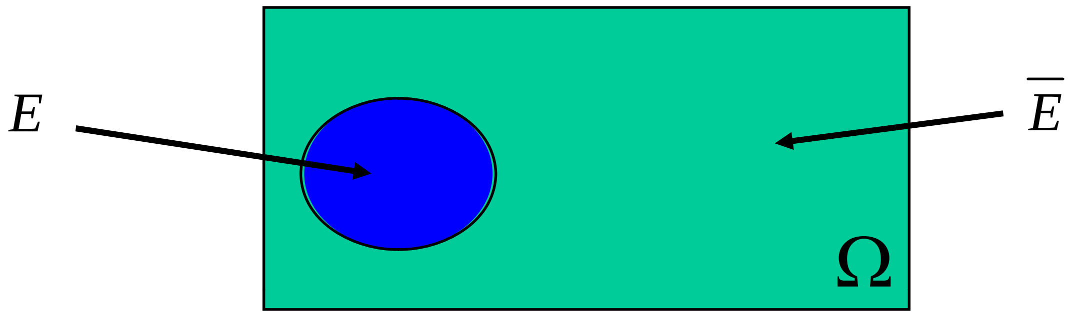


Ereignisraum und Ereignisse

Das Ereignis, welches alle Beobachtungen in Ω enthält, welche nicht im Ereignis E enthalten sind, heisst das Komplementärereignis $\overline{E}$.

Daraus folgt $\quad E \cup \overline{E} = \Omega$

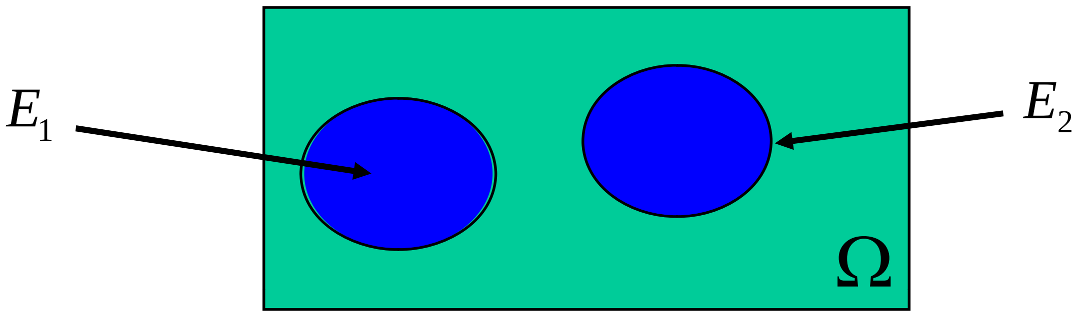
und $\quad E \cap \overline{E} = \varnothing$



Ereignisraum und Ereignisse

Ereignisse, welche keine gemeinsamen Beobachtungen haben, werden sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse genannt.

Somit ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$



Ereignisraum und Ereignisse

Es kann gezeigt werden, dass die Berechnungen von Vereinigungs- und Schnittmengen dem Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz folgen:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1 \qquad \text{Kommutativgesetz}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3 \\ E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 \end{array}\right\} \text{Assoziativgesetz}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \\ E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3) \end{array}\right\} \text{Distributivgesetz}$$

Ereignisraum und Ereignisse

Aus den Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz können die De Morgan’s Gesetze abgeleitet werden:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

$$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$$

$$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$$

$$E_1 \cap E_2 = \overline{\overline{E_1} \cup \overline{E_2}}$$

$$E_1 \cup E_2 = \overline{\overline{E_1} \cap \overline{E_2}}$$

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$

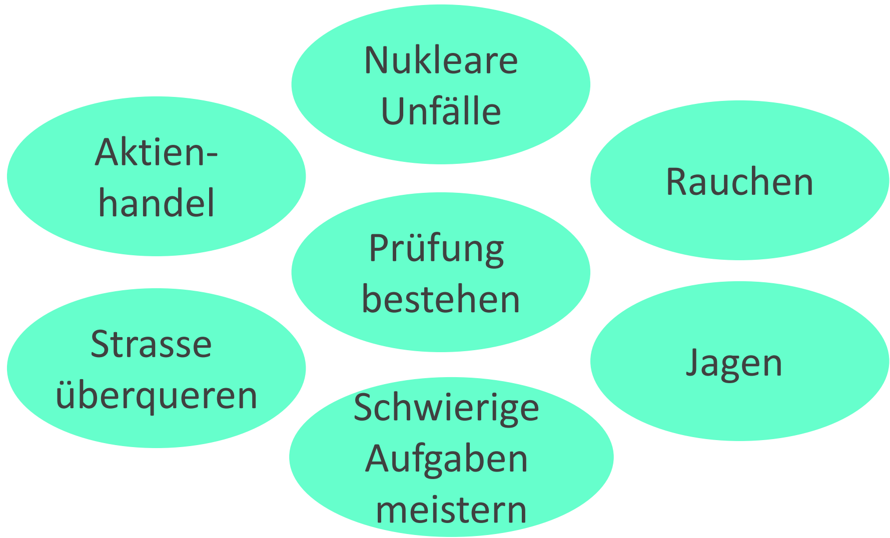
$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$$

Interpretationen von "Wahrscheinlichkeit"

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Wir haben alle eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit
Und brauchen oft Wörter wie

- Chance
- Möglichkeit
- Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit



Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Zustände unserer Umwelt für die wir uns interessieren sind beispielsweise

- Der Einsturz einer Brücke aufgrund ausserordentlicher Lasten
- Das Überfüllen eines Wasserrückhaltebeckens
- Das Ausfallen eines Elektrizitätsnetzes
- Der Rückstand in einem Projekt

Diese Zustände werden im folgenden „Ereignisse“ genannt.

Wir sind generell daran interessiert, die Eintretenswahrscheinlichkeit solcher Ereignisse innerhalb einer bestimmten Periode zu quantifizieren.

Interpretationen von "Wahrscheinlichkeit"

Prinzipiell gibt es drei Interpretationen von Wahrscheinlichkeit:

- Frequentistisch $P(A) = \lim \frac{N_A}{n_{\exp}}$ für $n_{\exp} \to \infty$

- Klassisch $P(A) = \frac{n_A}{n_{tot}}$

- Bayes $P(A) =$ Grad der persönlichen Überzeugung, dass das Ereignis A eintreten wird

Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, „Kopf“ zu erhalten, wenn Sie eine Münze werfen:

Frequentistisch $$P(A) = \frac{510}{1000} = 0.51$$

Klassisch $$P(A) = \frac{1}{2}$$

Bayes $$P(A) = 0.5$$

Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie baut auf den drei Axiomen von Kolmogorov auf:

Axiom 1: $0 \le P(E) \le 1$

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ wenn $E_1, E_2, \ldots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen.

Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Aus Axiom 3: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ wenn $E_1, E_2, \ldots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen.

folgt, dass die Schnittmenge zweier sich ausschliessender Ereignisse E_1 *und* E_2 einfach aus der Summe der zwei Wahrscheinlichkeiten besteht.

Wenn E_1 *und* E_2 sich nicht gegenseitig ausschliessen, dann ist

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind von besonderem Interesse, da sie die Basis für die Verwendung von neuer Information für die Entscheidungsfindung darstellen.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E_1 wenn Ereignis E_2 eingetreten ist, wird definiert als

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad \text{; nicht definiert wenn } P(E_2) = 0$$

Die Ereignisse werden als statistisch unabhängig bezeichnet wenn

$$P(E_1 | E_2) = P(E_1)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aus $$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

folgt $$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1|E_2)$$

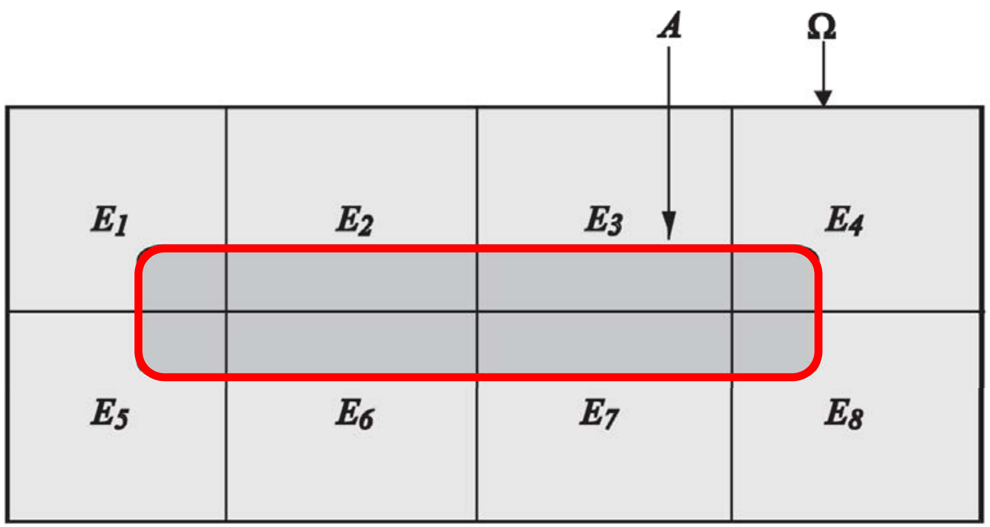
und wenn E_1 und E_2 statistisch unabhängig sind also $P(E_1|E_2) = P(E_1)$ dann ist

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

Wenn wir also annehmen dürfen, dass Ereignis E_1 und E_2 eintreten, und die zwei Ereignisse statistisch unabhängig sind, dann dürfen ihre Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden!

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei der Ereignisraum Ω aufgeteilt in n sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$



$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n) =$$

$$P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n) =$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

"Likelihood"

Prior

folgt $$\underbrace{P(E_i|A)}_{\text{Posterior}} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Posterior

Bayes Rule

Reverend
Thomas Bayes
(1702-1764)

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Hypothesen formulieren

Wissen und Erfahrung nutzen

Mit Daten kombinieren

Lernen und aktualisieren

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Mit einer neuen Sortieranlage können Holzbalken in maschineneigene Sortierklassen eingeteilt werden:

MS 10 Holz mittlerer Qualität
MS 13 Holz guter Qualität
MS 17 Holz sehr guter Qualität

Schmölzer, proHolz Austria/LIGNUM

Bevor die Sortieranlage auf den Markt kommt, soll ihre Genauigkeit geprüft werden. Dies mit Hilfe von Holzbalken, welche bereits mit einem anderen Referenzverfahren geprüft wurden.

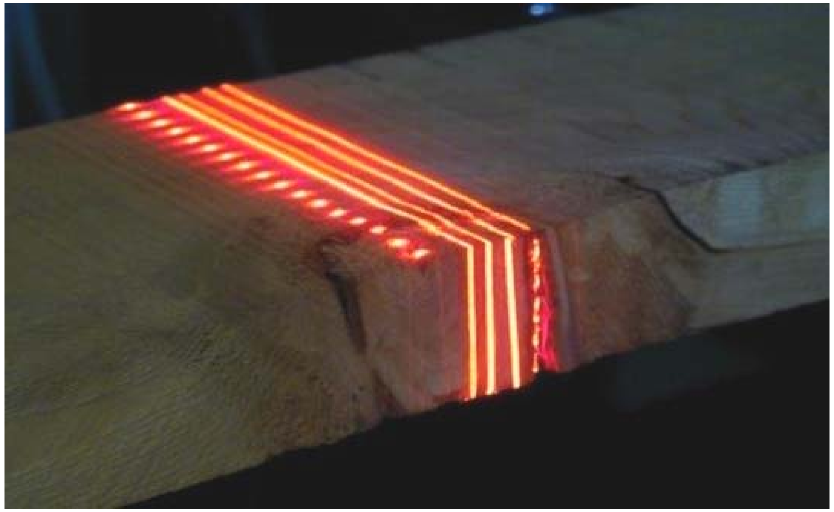
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

153 Holzbalken, welche gemäss dem bereits durchgeführten Referenzverfahren mittlere Qualität aufweisen, also zur Sortierklasse MS 10 gehören, wurden mit der neuen Sortieranlage folgendermassen klassiert:

Als MS 10: 120 mal klassiert

Als MS 13: 18 mal klassiert

Als MS 17: 15 mal klassiert



MiCROTEC GmbH, Brixen, Italy

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Und dies sind die gesamten Prüfergebnisse:

	Qualität MS 10	**Qualität MS 13**	**Qualität MS 17**
Klassiert als MS 10	120	15	19
Klassiert als MS 13	18	145	36
Klassiert als MS 17	15	25	118
Total Holzbalken	153	185	173

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die neue Sortieranlage die mittlere Qualität des Holzes richtig anzeigt?

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Bedingte Wahrscheinlichkeit! $P(I_{10} | \text{MS } 10) = 0.784$

	Qualität MS 10	Qualität MS 13	Qualität MS 17
Klassiert als MS 10	120/153 = 0.784	15	19
Klassiert als MS 13	18/153 = 0.118	145	36
Klassiert als MS 17	15/153 = 0.098	25	118
Total Holzbalken	153	185	173

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die neue Sortieranlage die mittlere Qualität des Holzes richtig anzeigt?

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Nun hat ein Sägewerk einen Bestand an Holzbalken im Lager. Von diesem Bestand ist bekannt, dass alle Holzbalken der gleichen Sortierklasse angehören.

Der Besitzer begutachtet den Bestand und kommt zum Schluss, dass er das Holz allen Sortierklassen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zuteilen würde.

Er bringt einen Holzbalken zum Produzenten der neuen Sortieranlage und lässt es prüfen. Die Prüfung zeigt MS 10 an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich MS 10 vorliegt, unter Berücksichtigung aller Informationen!

CFPF, Le Mont-sur-Lausanne

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Unserе Informationen:

- Alle Holzbalken gehören der gleichen Sortierklasse an.
- Der Besitzer würde das Holz allen Sortierklassen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zuteilen.
- Die Sortieranlage zeigt MS 10 an.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Der Besitzer würde das Holz allen Sortierklassen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zuteilen.

Prior Wahrscheinlichkeit = „ Grad persönlicher Überzeugung“:

$$P(MS\ 10) = P(MS\ 13) = P(MS\ 17)$$
$$P(MS\ 10) + P(MS\ 13) + P(MS\ 17) = 1$$

$$P(MS\ 10) = 0.333$$
$$P(MS\ 13) = 0.333$$
$$P(MS\ 17) = 0.333$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Die Sortieranlage zeigt MS 10 an.

Bereits vorher berechnet: $P(I_{10} | \text{MS } 10) = 0.784$

Genau gleich können auch $P(I_{10} | \text{MS } 13) = 0.081$ und $P(I_{10} | \text{MS } 17) = 0.11$ berechnet werden.

Nun kann der Besitzer seine Beobachtung aktualisieren:

$$P(\text{MS } 10 | I_{10}) = \frac{P(I_{10} | \text{MS } 10) P(\text{MS } 10)}{P(I_{10})}$$

$$= \frac{P(I_{10} | \text{MS } 10) P(\text{MS } 10)}{P(I_{10} | \text{MS } 10) P(\text{MS } 10) + P(I_{10} | \text{MS } 13) P(\text{MS } 13) + P(I_{10} | \text{MS } 17) P(\text{MS } 17)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

$$P(\text{MS } 10 | I_{10}) = \frac{P(I_{10} | \text{MS } 10) P(\text{MS } 10)}{P(I_{10})}$$

$$= \frac{P(I_{10} | \text{MS } 10) P(\text{MS } 10)}{P(I_{10} | \text{MS } 10) P(\text{MS } 10) + P(I_{10} | \text{MS } 13) P(\text{MS } 13) + P(I_{10} | \text{MS } 17) P(\text{MS } 17)}$$

$$P(\text{MS } 10 | I_{10}) = \frac{0.784 \cdot 0.333}{0.784 \cdot 0.333 + \cdot 0.081 \cdot 0.333 + 0.11 \cdot 0.333} = \frac{0.261}{0.325} = 0.804$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich die Sortierklasse MS 10 vorliegt, ist 80.4%.