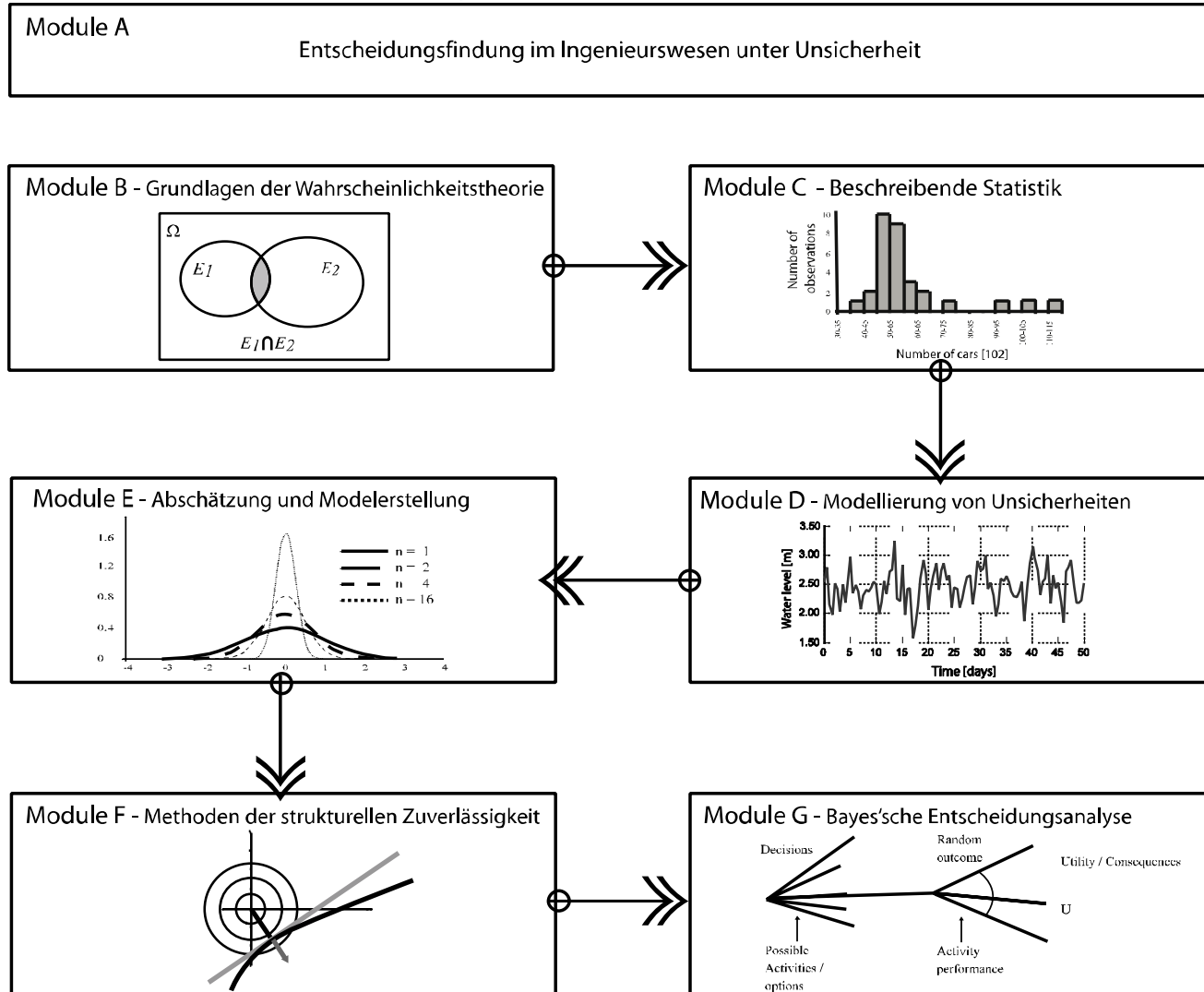


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

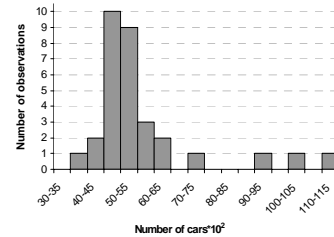
Dr. Jochen Köhler

Lehrveranstaltung im Überblick

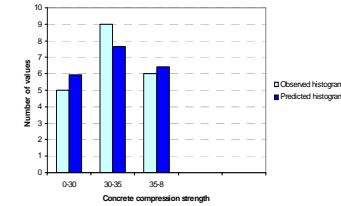


Überblick über die Kapitel

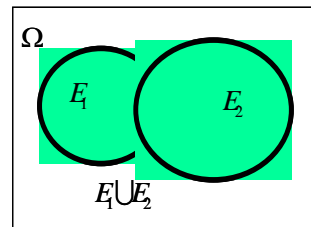
Graphische /numerische Interpretation von Beobachtungen



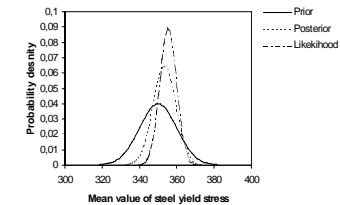
Modellevaluation



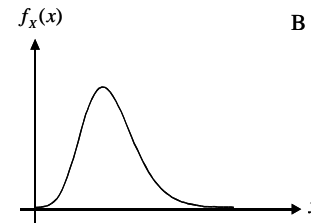
Wahrscheinlichkeitstheorie



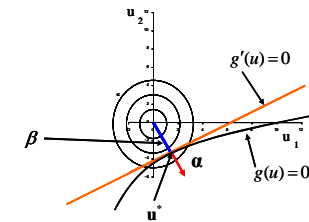
Bayessche Modellierung



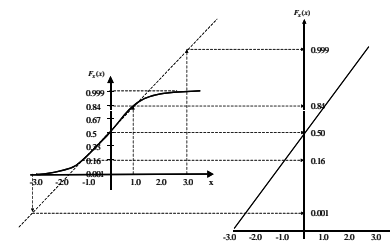
Verteilungsfunktionen, Momente, Extreme



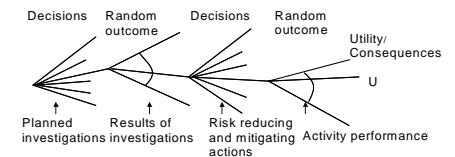
Zuverlässigkeitsanalyse



Modellierung und Datenbeschreibung



Entscheidungsfindung



Inhalt der heutigen Vorlesung

- Einführung in die Entscheidungstheorie
 - Das Problem
 - Der Entscheidungsbaum
 - A-Priori Analyse
 - Posterior Analyse
 - Pre-Posterior Analyse

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Das grundlegende Ingenieurproblem

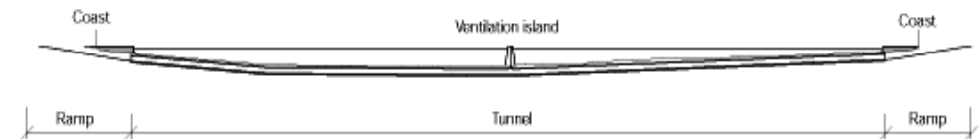
Mehrere
mögliche Lösungen
sind denkbar

Die vorhandene
Information ist
unsicher

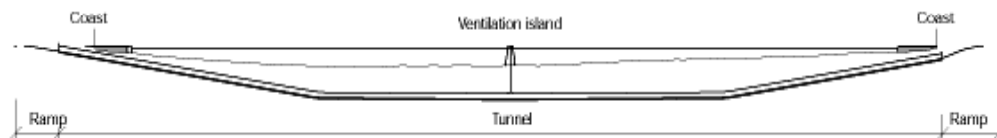
Eine Entscheidung
muss getroffen
werden!



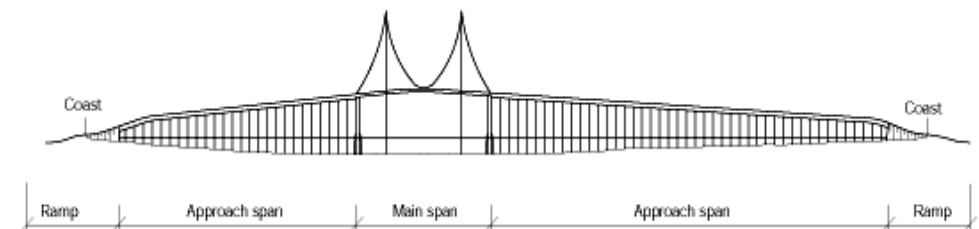
Solution B and F



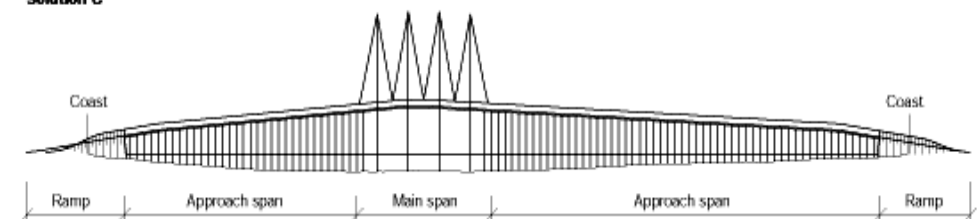
Solution A and E



Solution D



Solution C

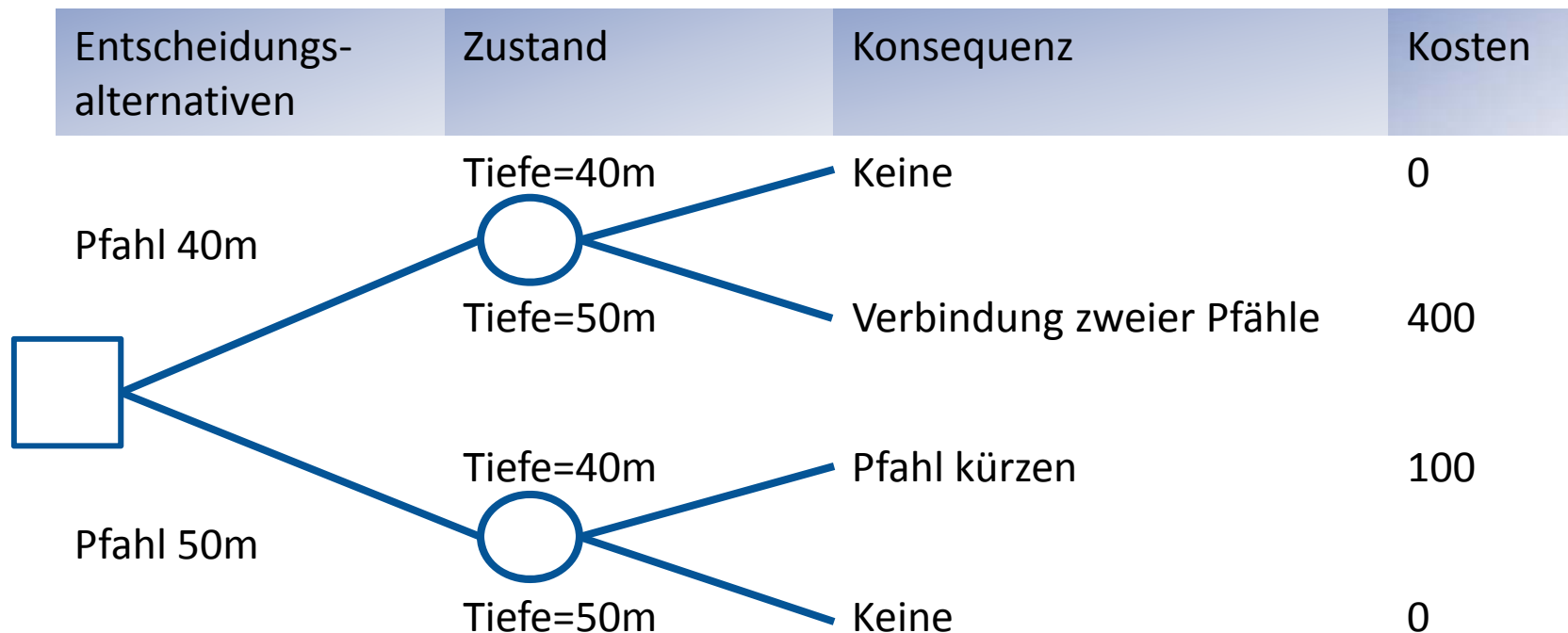
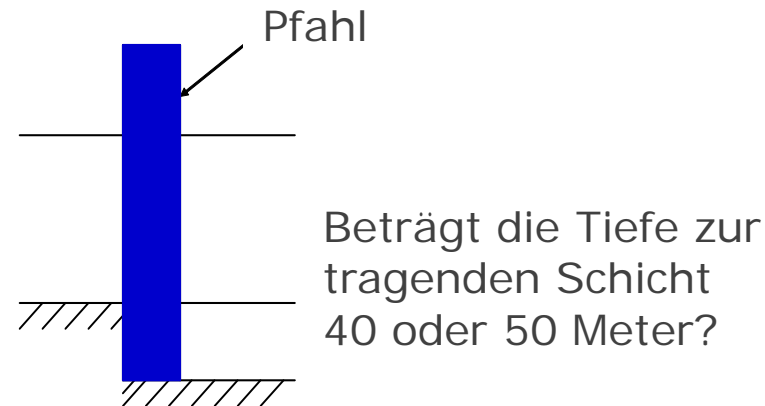


Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Vorgehen
 - Formulierung des Entscheidungsproblems
 - Identifizierung des Entscheidungsträgers und seiner Präferenzen
 - Darstellen des Entscheidungsprozesses
 - Identifizierung aller möglichen Entscheidungsalternativen
 - Identifizierung der Unsicherheiten
 - Identifizierung potentieller Konsequenzen und ihres Nutzens (Kosten und Ertrag)
 - Beurteilung der Eintretenswahrscheinlichkeiten der Konsequenzen
 - Vergleich der unterschiedlichen Entscheidungsalternativen basierend auf dem Erwartungswert ihres Nutzens
 - Entscheidung und Dokumentieren der Annahmen, auf welchen die gewählte Alternative beruht

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Der Entscheidungsbaum



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Zuordnung von Nutzen
 - Der Nutzen spiegelt die Präferenzen des Entscheidungsträgers wider.
 - Nutzenfunktionen können als lineare Funktionen definiert werden, ausgedrückt in monetären Einheiten.
 - Alle monetären Konsequenzen sind in der Nutzenfunktion zu integrieren.

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^n p_j u(K_j)$$

- $u(a_i)$ Nutzen (Kosten und Ertrag) der aus der Handlungsalternativen a_i entsteht
- $p_j u(K_j)$ Erwartungswert des Nutzens der Konsequenz K_j
- p_j Eintretenswahrscheinlichkeit der Konsequenz K_j
- $u(K_j)$ Nutzen der Konsequenz K_j
- K_j Potentielle Konsequenz aus der Handlungsalternativen a_i

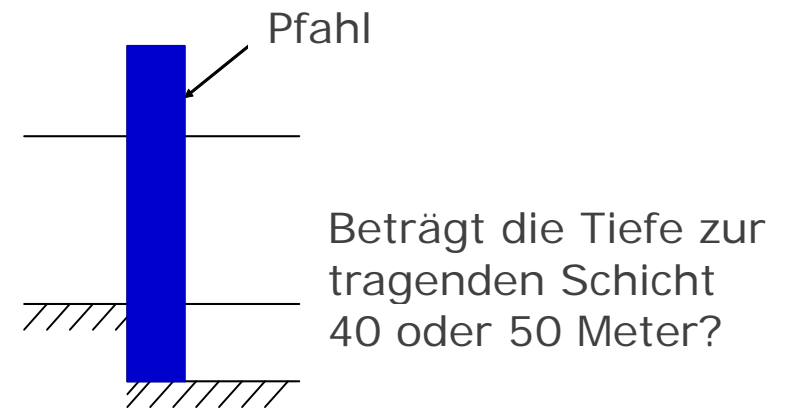
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Die unterschiedlichen Typen der Analyse in der Entscheidungstheorie:

- A-Priori Analyse
- Posterior Analyse
- Pre-Posterior Analyse

Beispiel

Welche Pfahlänge sollte eingesetzt werden?



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Beispiel

Welche Pfahlänge sollte eingesetzt werden?

Alternativen:

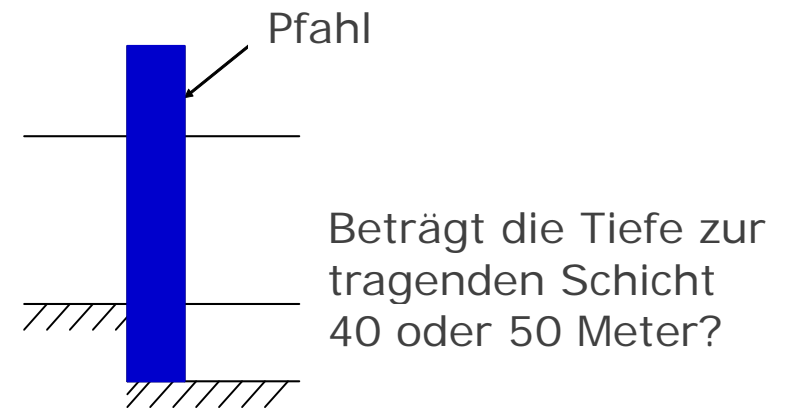
a_0 : Wahl eines Pfahls mit 40 Metern Länge

a_1 : Wahl eines Pfahls mit 50 Metern Länge

Zustände der Natur (Tiefe des Untergrundes):

θ_0 : Untergrund in 40 Metern Tiefe $P'(\theta_0) = 0.7$

θ_1 : Untergrund in 50 Metern Tiefe $P'(\theta_1) = 0.3$

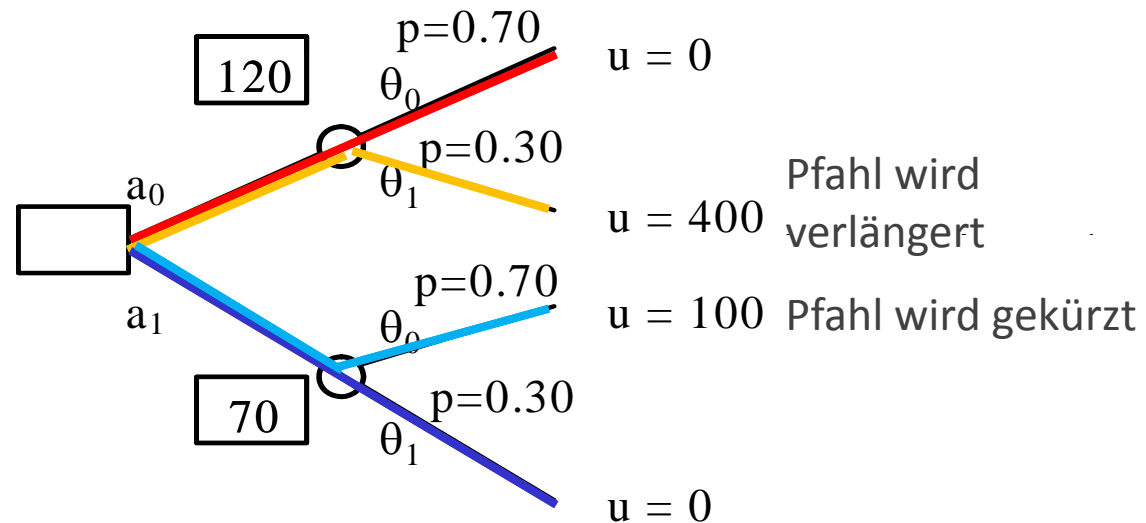


Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prior Analyse

$$P'(\theta_0) = 0.7$$

$$P'(\theta_1) = 0.3$$



$$E'[u] = \min\{u[a_0], u[a_1]\}$$

$$= \min\{P'[\theta_0] \cdot u[\theta_0|a_0] + P'[\theta_1] \cdot u[\theta_1|a_0],$$

$$P'[\theta_0] \cdot u[\theta_0|a_1] + P'[\theta_1] \cdot u[\theta_1|a_1]\}$$

$$= \min\{0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot 400, 0.7 \cdot 100 + 0.3 \cdot 0\}$$

$$= \min\{120, 70\} = 70 \quad \Rightarrow \quad \text{Entscheidung für } a_1: \text{ Pfahl 50 m}$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

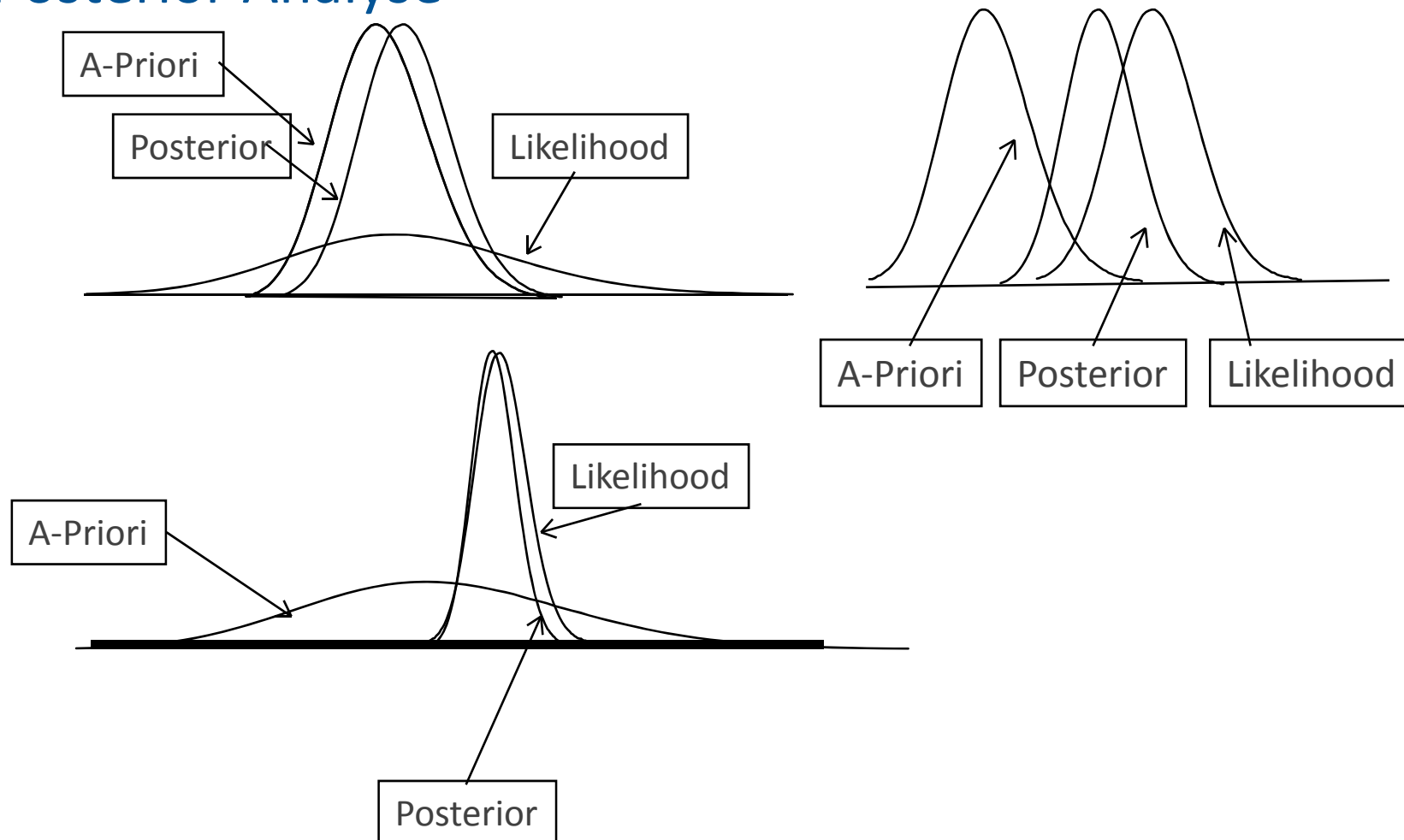
Posterior Analyse

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Posterior-} \\ \text{wahrscheinlichkeit von} \\ \theta_i \text{ f\"ur gegebene} \\ \text{Beobachtungen} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Normalisierende} \\ \text{Konstante} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Stichproben-} \\ \text{Likelihood} \\ \text{gegeben } \theta_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{A-Priori} \\ \text{Wahr-} \\ \text{scheinlichkeit} \\ \text{von } \theta_i \end{array} \right)$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Posterior Analyse



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Posterior Analyse - Beispiel

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

Ultraschalltests werden durchgeführt, um die Tiefe des Untergrundes festzustellen.

Testresultat \ Wahrer Zustand	θ_0	θ_1
	40 m Tiefe	50 m Tiefe
z_0 40 m Indikation	0.6	0.1
z_1 50 m Indikation	0.1	0.7
z_2 45 m Indikation	0.3	0.2

Likelihoods der verschiedenen Indikationen (Testresultate) je Zustand der Natur.

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Posterior Analyse

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

Nehmen wir an, der Test zeigt 45 Meter an:

$$P''[\theta_0] = P[\theta_0 | z_2] \propto P[z_2 | \theta_0] P[\theta_0] = 0.3 \times 0.7 = 0.21$$

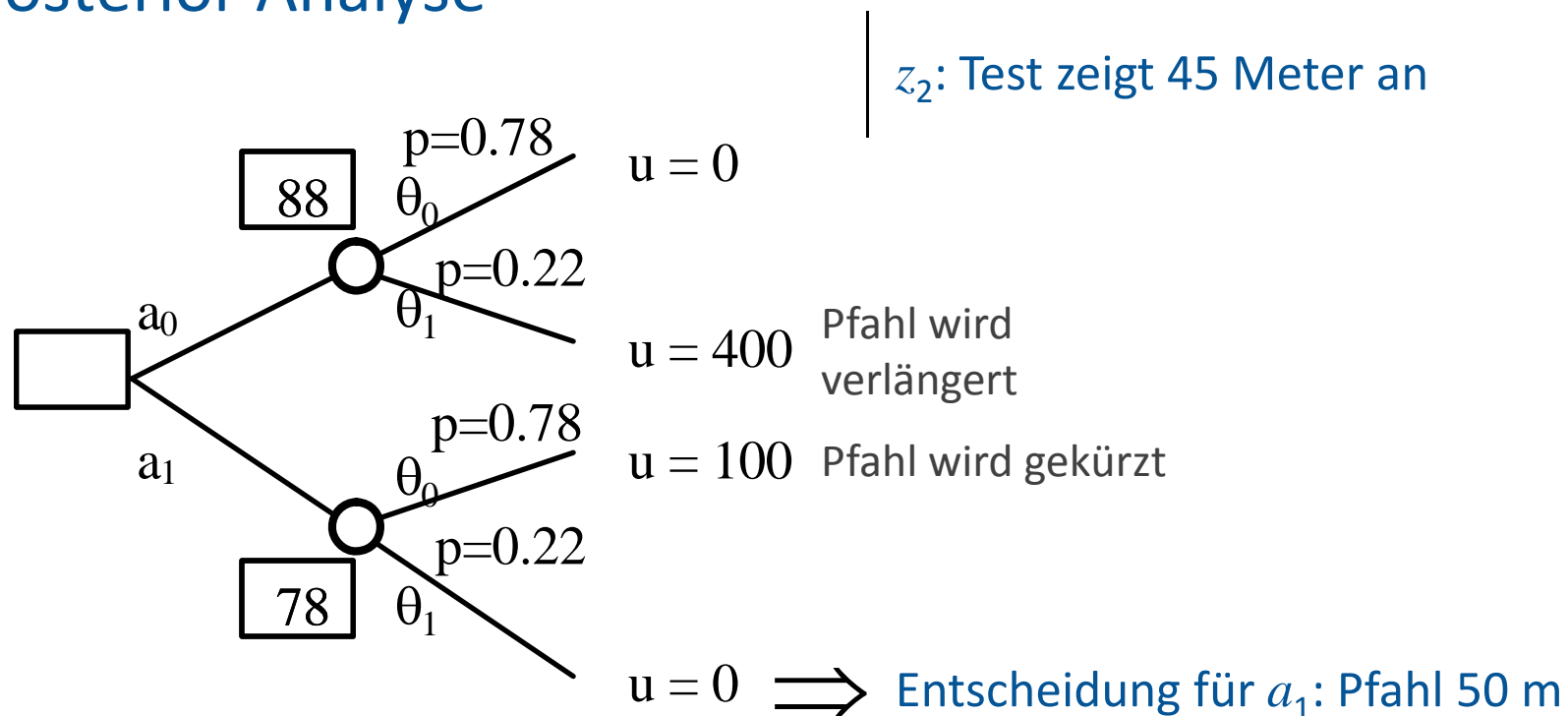
$$P''[\theta_1] = P[\theta_1 | z_2] \propto P[z_2 | \theta_1] P[\theta_1] = 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

$$P''[\theta_0 | z_2] = \frac{0.21}{0.21 + 0.06} = 0.78$$

$$P''[\theta_1 | z_2] = \frac{0.06}{0.21 + 0.06} = 0.22$$

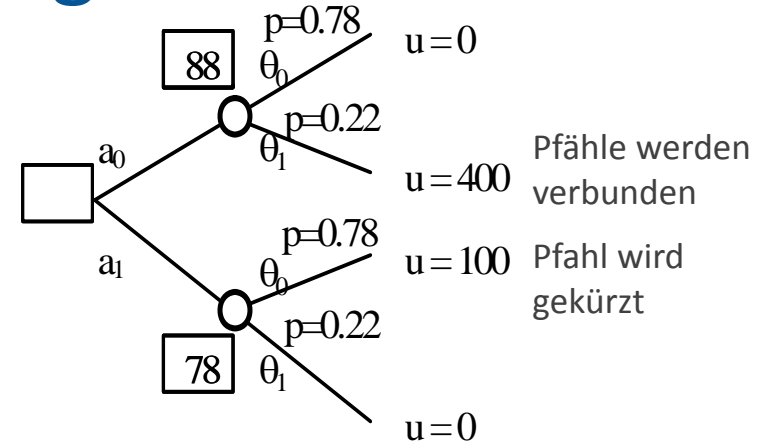
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Posterior Analyse



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Posterior Analyse



$$E[u|z_2] = \min_j \{ E[u(a_j)|z_2] \}$$

$$= \min \{ P[\theta_0] \cdot 0 + P[\theta_1] \cdot 400, P[\theta_0] \cdot 100 + P[\theta_1] \cdot 0 \}$$

$$= \min \{ 0.78 \cdot 0 + 0.22 \cdot 400, 0.78 \cdot 100 + 0.22 \cdot 0 \}$$

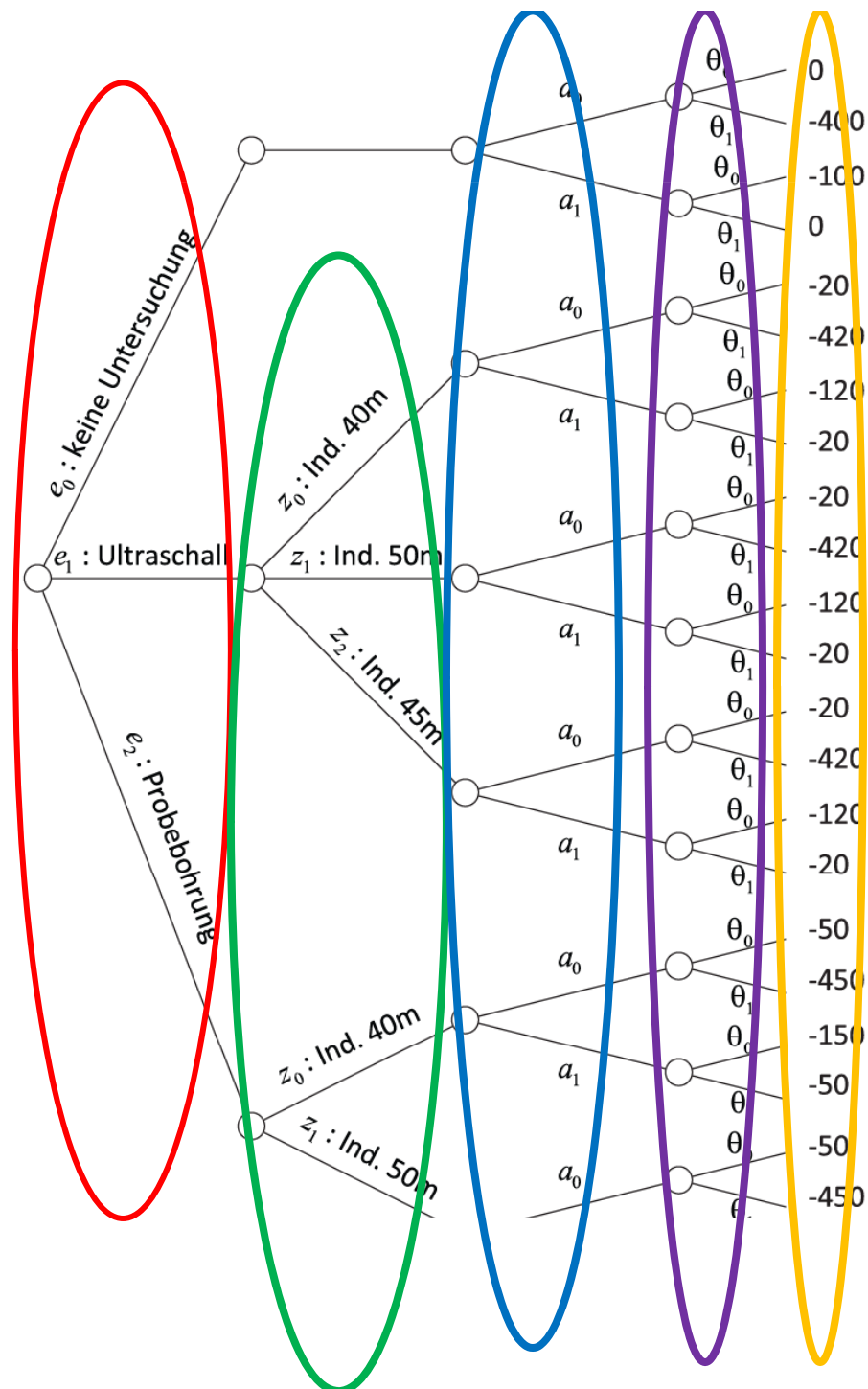
$$= \min \{ 88, 78 \} = 78$$

\Rightarrow Entscheidung für a_1 : Pfahl 50 m

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Pre-Posterior Analyse

- Betrachten wir das gleiche Beispiel – Pfähle
- Nun hat der Ingenieur die Möglichkeit in Vorfeld zwischen verschiedenen Untersuchungsoptionen zu wählen, z.B.:
 - e_0 keine Untersuchungen -> keine Kosten
 - e_1 Ultraschall -> 20 GE
 - e_2 Probebohrung -> 50 GE
- Die Möglichen Zusatzuntersuchungen beinhalten Kosten
- Wie kann nun entschieden werden welche Option die grösste Kosteneffizienz hat ??



Pre-Posterior Analyse

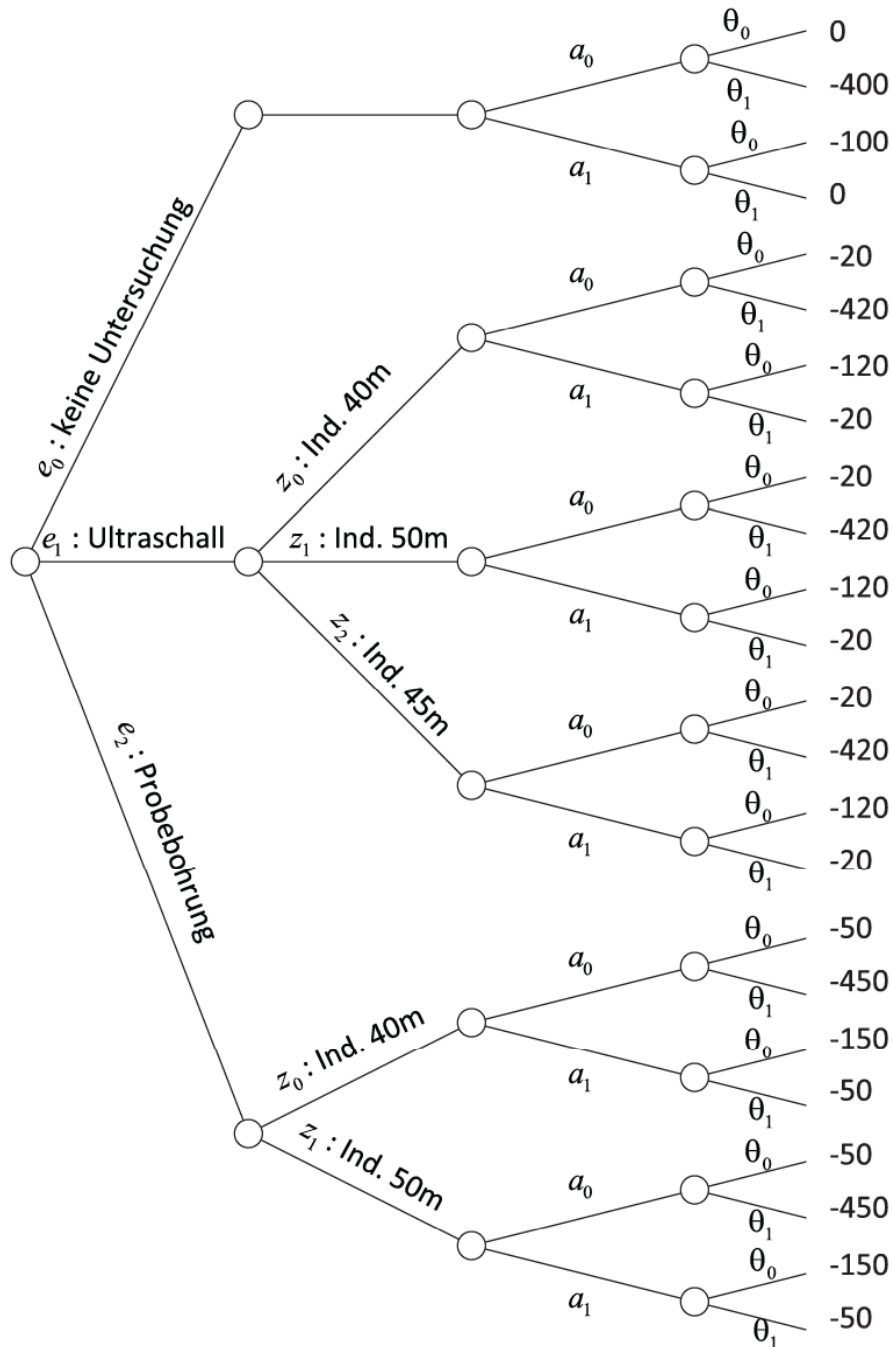
Entscheidungsmodell:

- Untersuchungsoptionen
- Untersuchungsergebnisse
- Entscheidungsalternativen
- Zustände
- Konsequenzen

Pre-Posterior Analyse

Entscheidungsmodell:

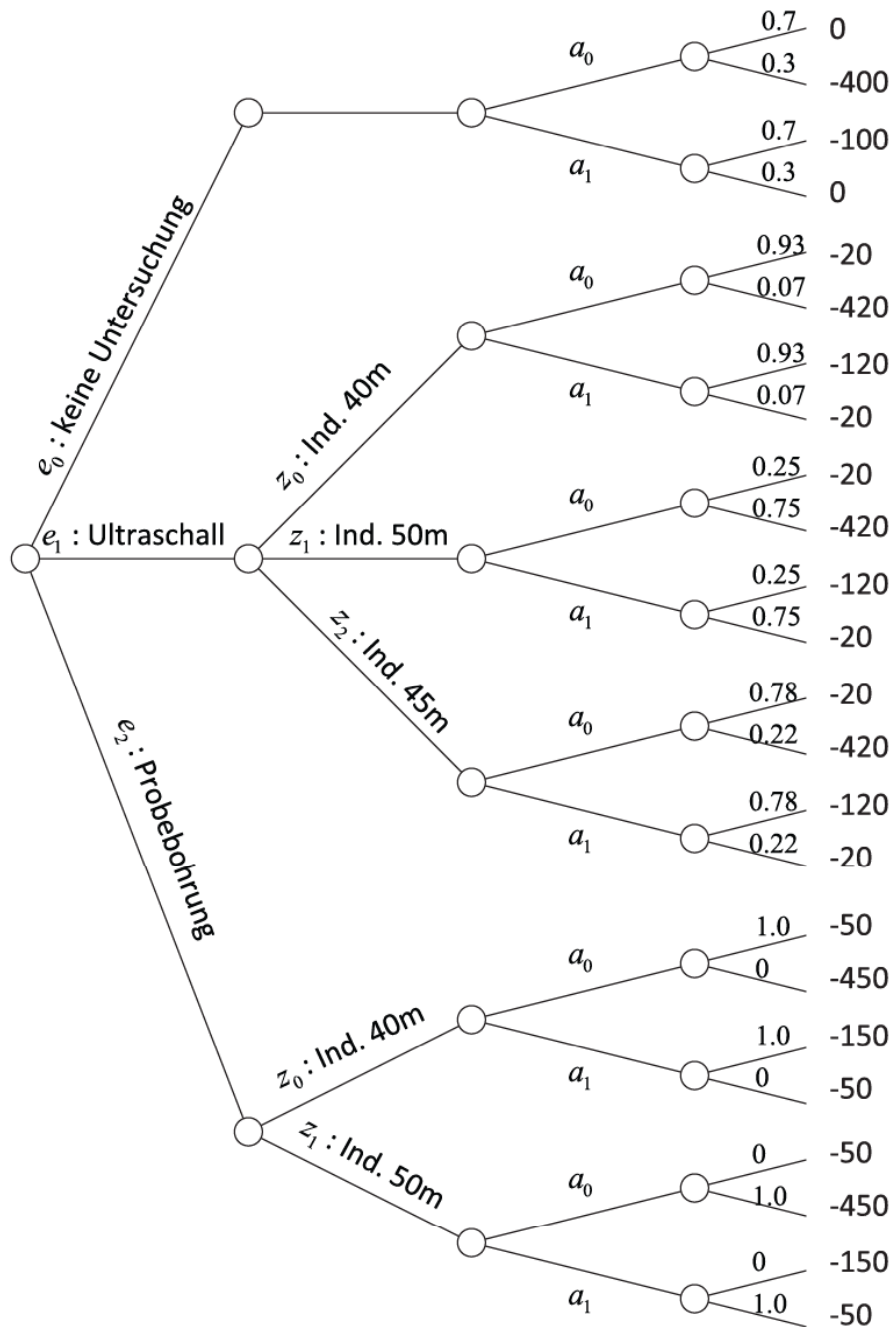
- Untersuchungsoptionen
- Untersuchungsergebnisse
- Entscheidungsalternativen
- Zustände
- Konsequenzen



Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten



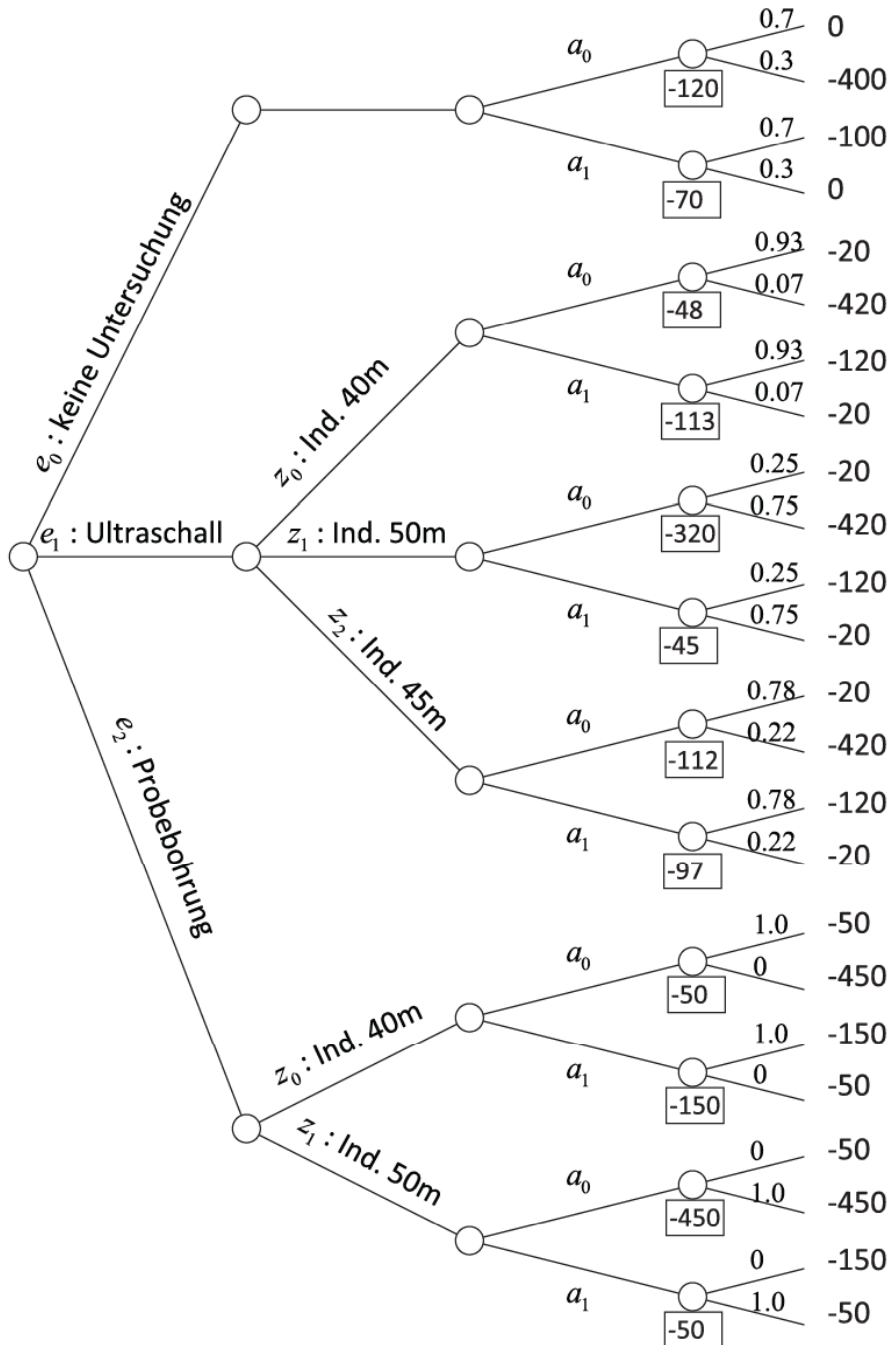
Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

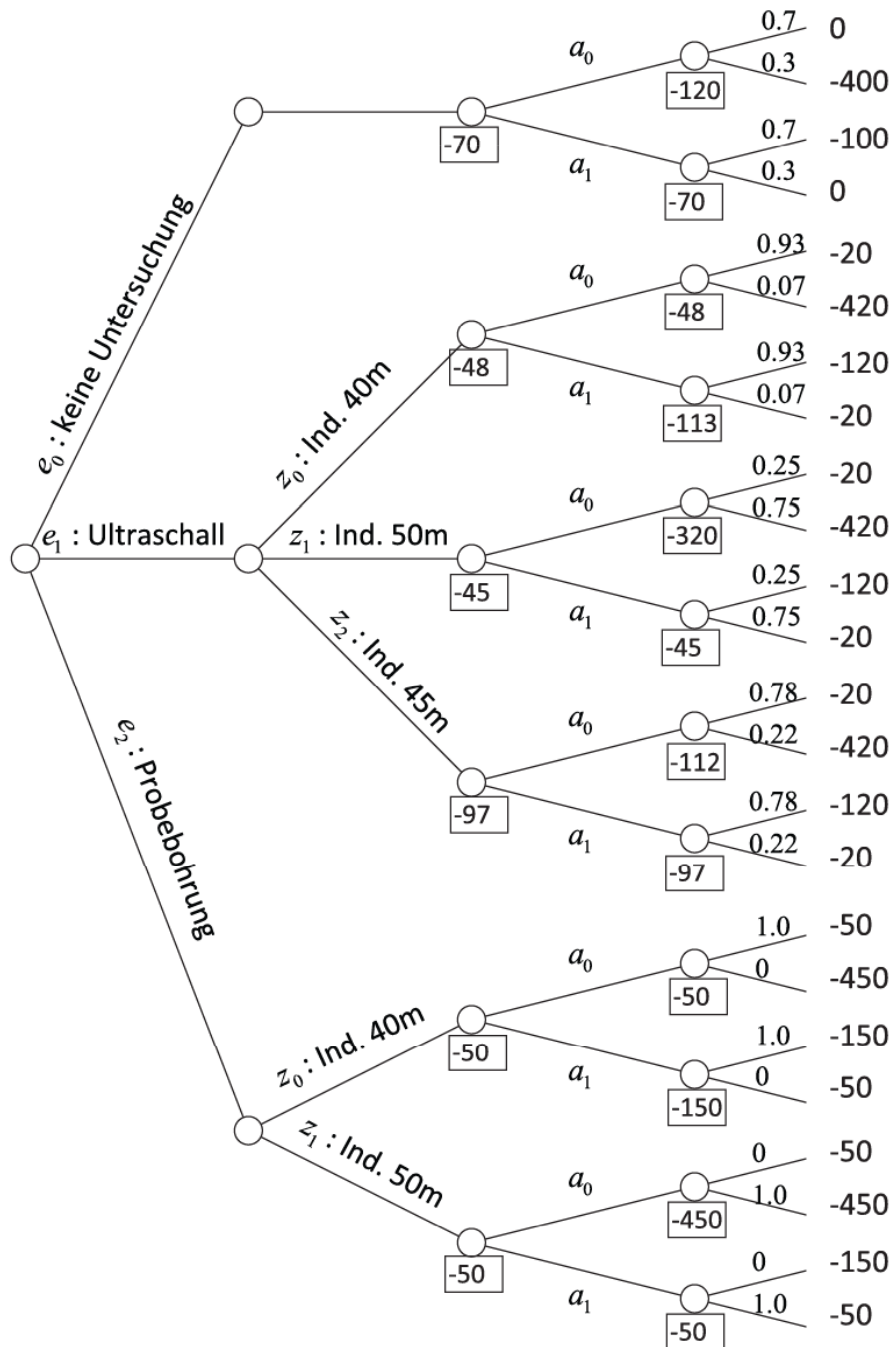
1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$



Pre-Posterior Analyse



Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \cdot u[\theta_i | a, z, e]$$

3. Welche Entscheidung würde man treffen ?

Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

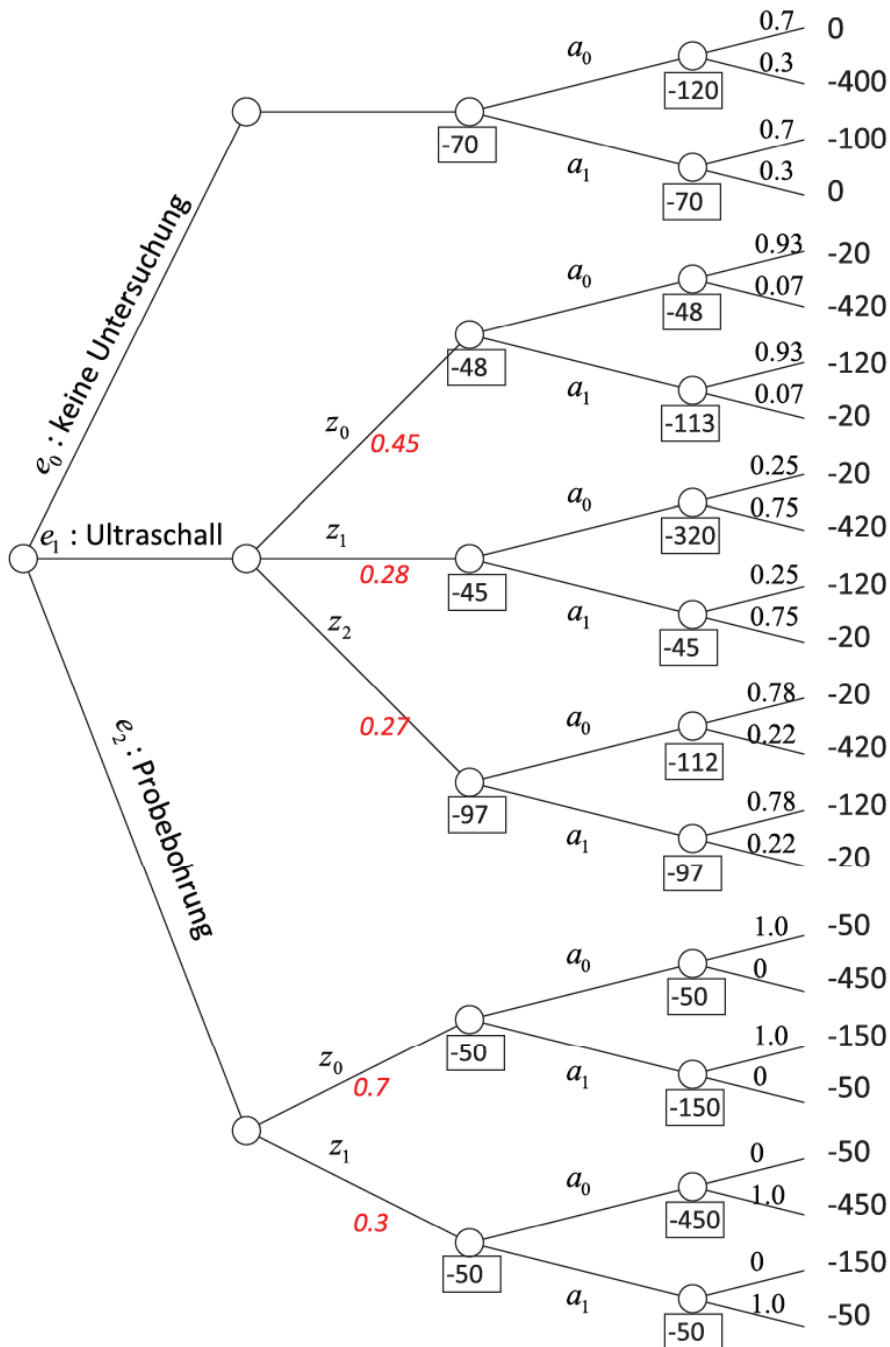
$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$

3. Welche Entscheidung würde man treffen ?

4. Wie Wahrscheinlich sind die Testergebnisse ?

z.B.

$$\begin{aligned} [z_0 | e_1] &= P[z_0 | e_1, \theta_0] P'[\theta_0] + P[z_0 | e_1, \theta_1] P'[\theta_1] \\ &= (0.6)(0.7) + (0.1)(0.3) = 0.45 \end{aligned}$$



Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

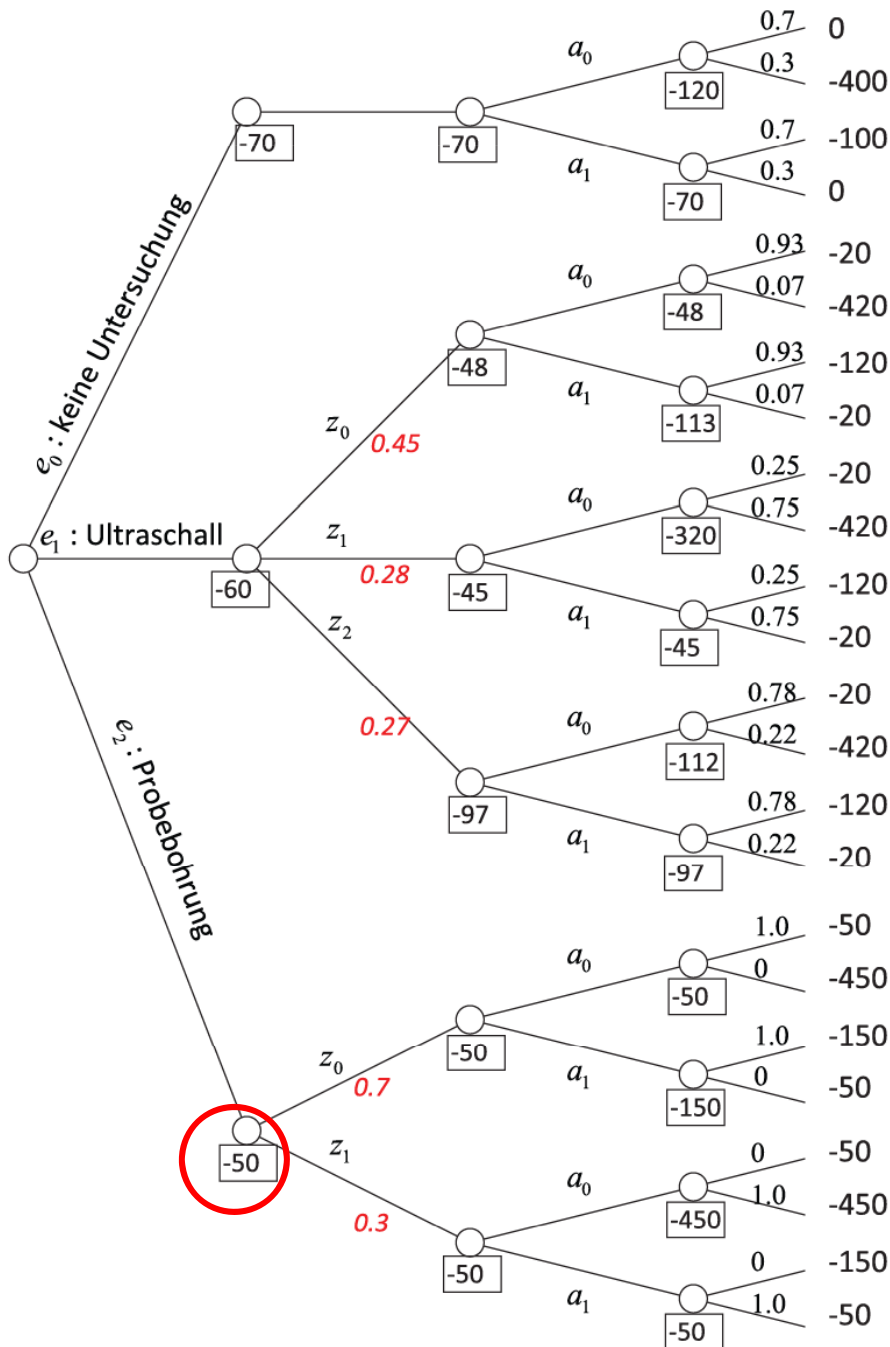
2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$

3. Welche Entscheidung würde man treffen ?

4. Wie Wahrscheinlich sind die Testergebnisse ?

5. Erwarteter Nutzen je Untersuchung



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Zusammenfassung

Je nach Problemstellung kommen verschiedene Entscheidungsanalysen zum Einsatz.

- A-Priori Analyse: Bei gegebener (Ist-)Information
- Posterior Analyse: Bei neuer Information
- Pre-Posterior Analyse: Bei mehreren möglichen Zusatzuntersuchungen.

Es wurden hier die einfachen Grundprinzipien dieser Entscheidungsmodelle vorgestellt.

Die Prinzipien lassen sich auf beliebig komplexe Problemstellung erweitern.

Zusammenfassung der Vorlesung

- Unsicherheiten im Ingenieurwesen
- Zusammenfassung von Daten – numerisch, graphisch
- Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten – bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes
- Zufallsvariablen und Prozesse
- Momente, Parameter und deren Schätzung
- Hypothesentests und Konfidenz, für Stichprobenstatistiken und Verteilungen
- Methoden der Zuverlässigkeit – Grenzzustände und Wahrscheinlichkeiten
- Entscheidungstheorie