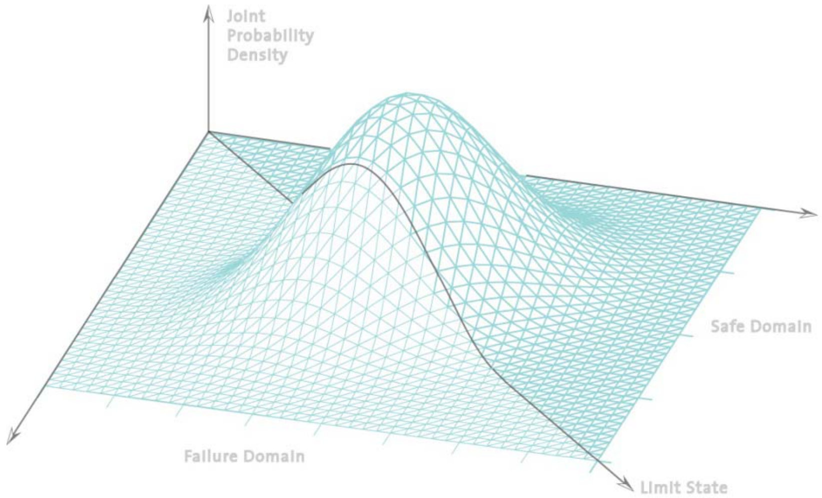


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 7

Poissonprozess

Poissonprozess $P_n(t)$

$\nu(t)$ = Mittlere Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit

n = Anzahl Ereignisse

t = Zeitintervall [0;t[

u = Mittlere Anzahl Ereignisse in einem (Zeit)Intervall t

Homogener Poissonprozess

$\nu(t)$ = konstant

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

$$u = \nu(t) \cdot t$$

$$E(X) = u = \nu(t) \cdot t$$

$$Var(X) = u = \nu(t) \cdot t$$

Inhomogener Poissonprozess.

$\nu(t)$= nicht konstant

$$P_n(t) = \frac{\left(\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right)$$

$$u = \int_{t_1}^{t_2} \nu(\tau) \, d\tau$$

Poissonprozess

Die Wahrscheinlichkeit von keinem Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall

Homogener Poissonprozess $$P_0(t) = \exp(-\nu \cdot t)$$

Inhomogener Poissonprozess. $$P_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)$$

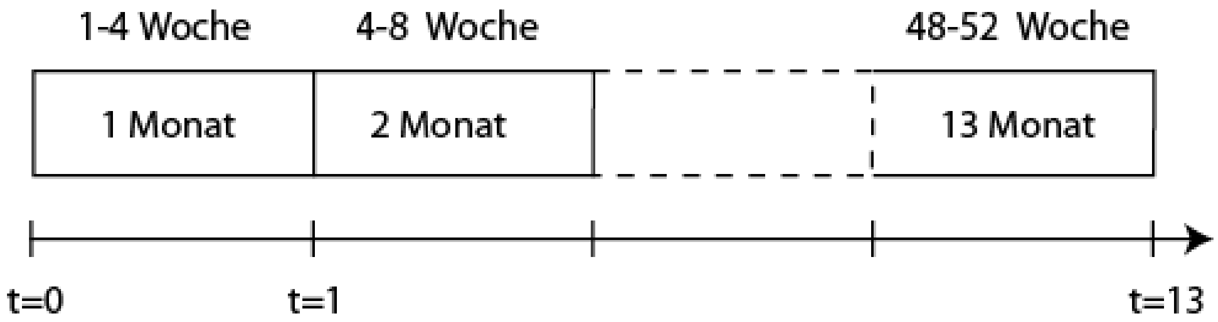
Die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der (Warte-)Zeit bis zum ersten Ereignis T_1

Homogener Poissonprozess $$F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\nu \cdot t)$$

Inhomogener Poissonprozess. $$F_{T_1}(t_1) = 1 - P_0(t_1) = 1 - \exp(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau)$$

Aufgabe 7.1

a) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird durch einen homogenen Poissonprozess mit der durchschnittlichen Anzahl von Regenereignissen $\nu(t)$ per Zeiteinheit t angegeben, wobei t in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,13] definiert ist.



$$\nu(t) = 2$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass 3. , 4. und 5. Monat

- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der durchschnittlichen Anzahl Regenereignissen $\nu(t) = 2$ folgen.

Aufgabe 7.1

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass 3. , 4. und 5. Monat
- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stadtfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der durchschnittlichen Anzahl Regenereignissen $\nu(t) = 2$ folgen.

$$\nu(t) = 2 \qquad u = \nu(t) \cdot t = 2 \cdot 3 = 6 \qquad P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

- kein Regenereignis

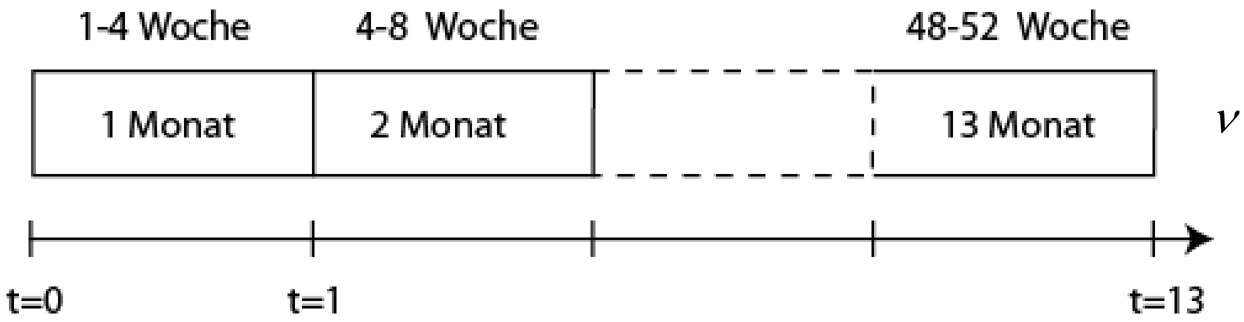
$$P_0\left(t\right) = \mathrm{e}^{-u} \qquad P_0\left(3\right) = \mathrm{e}^{-u} = e^{-6} = 0.0025$$

- genau ein Regenereignis

$$P_1(t) = \frac{u^1}{1!} e^{-u} \qquad P_1(3) = \frac{6^1}{1!} e^{-6} = 6 \cdot e^{-6} = 0.0149$$

Aufgabe 7.1

b) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird durch einen nicht homogenen Poissonprozess mit der durchschnittlichen Anzahl von Regenereignissen $\nu(t)$ per Zeiteinheit t angegeben, wobei t in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,13] definiert ist.



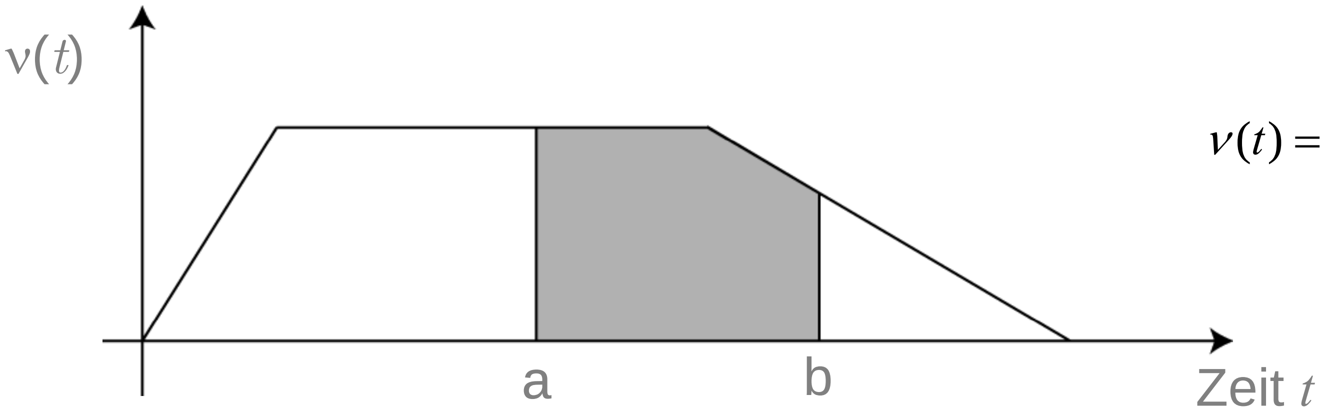
$$\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot t}{3} & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \\ 2 & \text{für } 3 < t \leq 7 \\ \dfrac{13-t}{3} & \text{für } 7 < t \leq 13 \end{cases}$$

Hinweis: Für Prozesse, die einem nicht homogenen Poissonprozess folgen, wird angenommen, dass ν variabel mit der Zeit ist. Der Poisson-Parameter kann für jedes Zeitintervall (t_1, t_2) auf folgende Weise berechnet werden:

$$u = \int_{t_1}^{t_2} \nu(\tau)\, d\tau$$

Aufgabe 7.1

Mittlere Auftretensrate $\nu(t)$ pro Zeiteinheit t



$$\nu(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot t}{3} & \text{für } 0 \le t \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < t \le 7 \\ \frac{13 - t}{3} & \text{für } 7 < t \le 13 \end{cases}$$

Mittlere Auftretensrate im Zeitintervall [a, b]: $u = \int_a^b \nu(\tau) d\tau$

$$P_n(t) = \frac{\left(\int_0^t \nu(\tau) d\tau \right)^n}{n!} \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau) d\tau \right) \longrightarrow P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

n = Anzahl Ereignisse

(t) = Zeitperiode, welche betrachtet wird

Aufgabe 7.1

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten drei oder mehr Regenereignisse eintreffen.

$$v(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot t}{3} & \text{für } 0 \le t \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < t \le 7 \\ \frac{13 - t}{3} & \text{für } 7 < t \le 13 \end{cases}$$

Vorgehen:
Zufallsvariable T = Anzahl Regenereignisse in den ersten fünf Monaten

Ermittle den Parameter u des Poissonprozesses $P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{i=3}^{\infty} P_T(5) = 1 - [P_0(5) + P_1(5) + P_2(5)]$$

Aufgabe 7.1

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten drei oder mehr Regenereignisse eintreffen.

$$v(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot t}{3} & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \\ 2 & \text{für } 3 < t \leq 7 \\ \frac{13 - t}{3} & \text{für } 7 < t \leq 13 \end{cases}$$

Bestimmung des Poisson Parameters $u = \int_a^b v(t)dt$

$$u = \int_{t_0}^{t_3} v(t)dt + \int_{t_3}^{t_5} v(t)dt =$$

$$\int_0^3 \frac{2 \cdot t}{3} dt + \int_3^5 2dt = \frac{2 \cdot t^2}{6}\bigg|_0^3 + 2 \cdot t\big|_3^5 =$$

$$3 + 4 = \underline{7 = u}$$

Aufgabe 7.1

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten drei oder mehr Regenereignisse eintreffen.

$$\nu(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot t}{3} & \text{für } 0 \le t \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < t \le 7 \\ \frac{13 - t}{3} & \text{für } 7 < t \le 13 \end{cases}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{i=3}^{\infty} P_T(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5) \right] = \underline{\underline{0.97}}$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

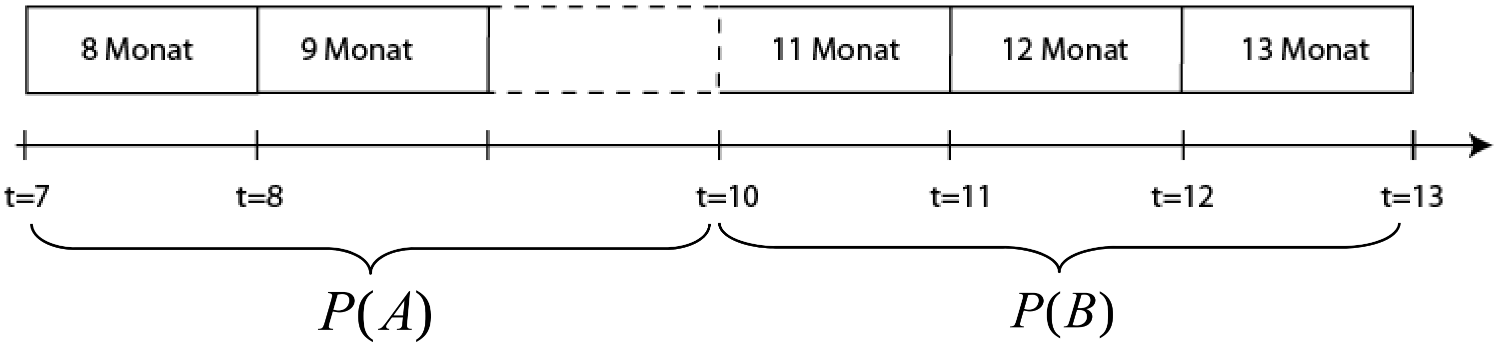
$$P_0(5) = \frac{u^n}{n!} \cdot e^{-u} = \frac{7^0}{0!} \cdot e^{-7} = e^{-7}$$

$$P_1(5) = \frac{u^n}{n!} \cdot e^{-u} = \frac{7^1}{1!} \cdot e^{-7} = 7 \cdot e^{-7}$$

$$P_2(5) = \frac{u^n}{n!} \cdot e^{-u} = \frac{7^2}{2!} \cdot e^{-7} = \frac{49}{2} e^{-7}$$

Aufgabe 7.1

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der Monate 8, 9, 10 und der letzen 3 Monate.

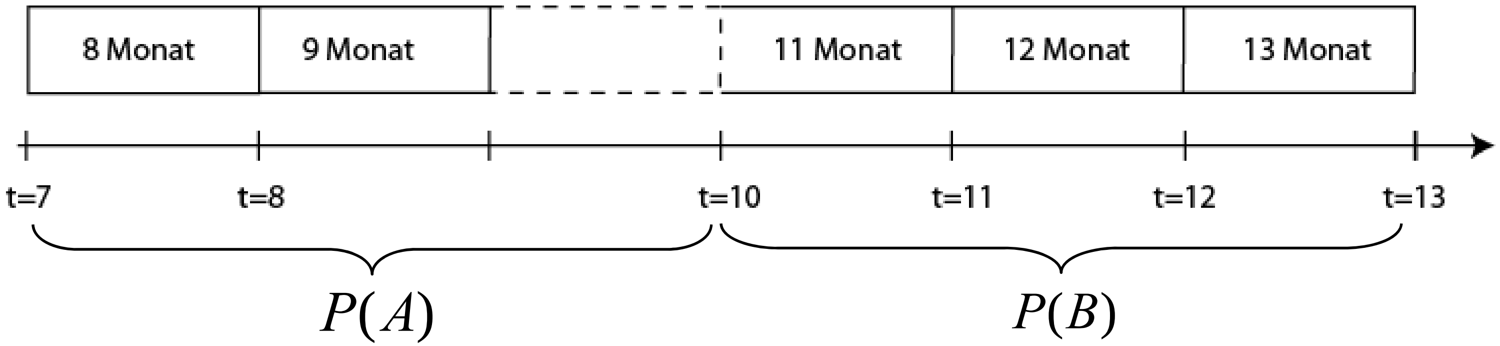


Ereignis A repräsentiert die Anzahl der Regenereignissen in den Monaten 8,9 und 10
Ereignis B repräsentiert die Anzahl der Regenereignissen in den Monaten 11,12 und 13

$$P[A \cap B] = P(A) \cdot P(B)$$ Unabhängig!

Aufgabe 7.1

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der Monate 8, 9, 10 und der letzen 3 Monate.



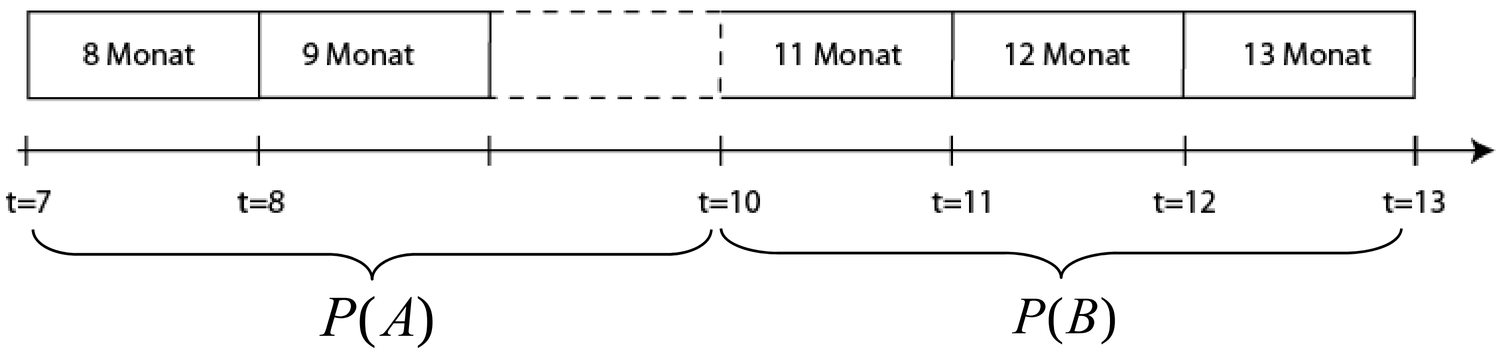
Als Mittelwert des Poissonprozesses ergeben sich für die beiden Intervalle in denen die Ereignisse unabhängig sind zu

$$v(t)=\begin{cases} \frac{2\cdot t}{3} & \text{für } 0\le t\le 3 \\ 2 & \text{für } 3<t\le 7 \\ \frac{13-t}{3} & \text{für } 7<t\le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{7-10}=\frac{1}{3}\int_7^{10}(13-t)\,dt=\frac{1}{3}\left(13\cdot t-\frac{t^2}{2}\right)_7^{10}=\underline{4.5} \\ u_{10-13}=\frac{1}{3}\int_{10}^{13}(13-t)\,dt=\frac{1}{3}\left(13\cdot t-\frac{t^2}{2}\right)_{10}^{13}=\underline{1.5} \end{cases}$$

Aufgabe 7.1

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der Monate 8, 9, 10 und der letzen 3 Monate.



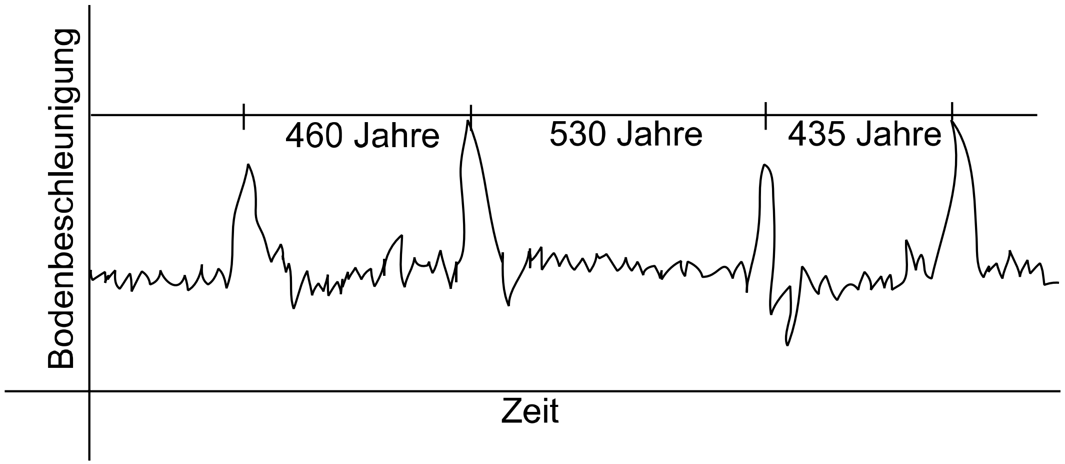
$$P(A) = P[X(10) - X(7) \leq 1] = \frac{4.5^0}{0!} \cdot e^{-4.5} + \frac{4.5^1}{1!} \cdot e^{-4.5} = \underline{6.11 \cdot 10^{-2}}$$

$$P(B) = P[X(13) - X(10) \leq 1] = \frac{1.5^0}{0!} \cdot e^{-1.5} + \frac{1.5^1}{1!} \cdot e^{-1.5} = \underline{0.558}$$

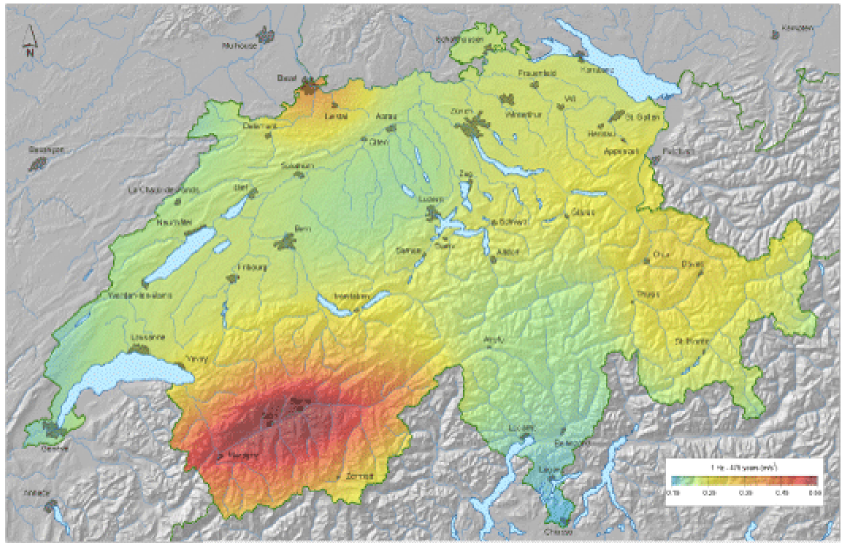
$$P(A \cap B) = 6.11 \cdot 10^{-2} \cdot 0.558 = \underline{\underline{3.41 \cdot 10^{-2}}}$$

Aufgabe 7.2

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.



mittlere Wiederkehrperiode = 475 Jahre



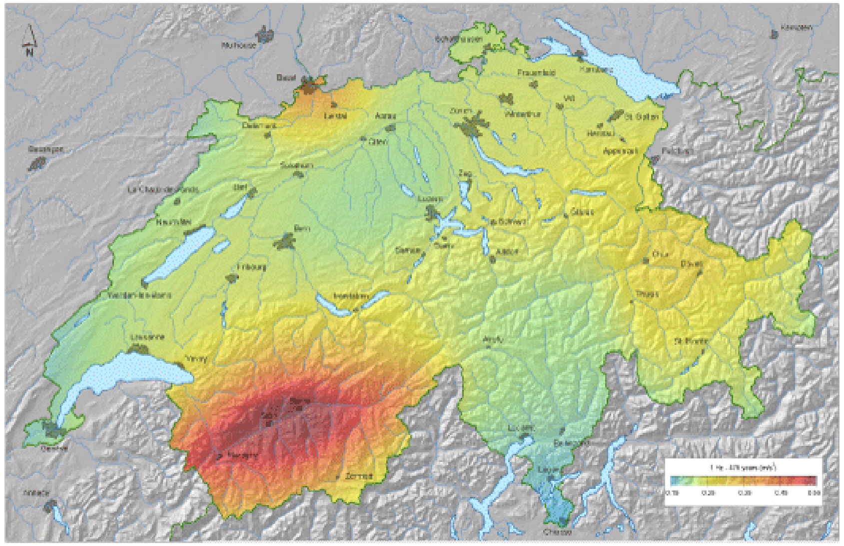
Seismic Shaking Hazards in Switzerland
Probabilistic Seismic Hazards Assessment
10% probability of being exceeded in 50 years
www.earthquake.ethz.ch

Aufgabe 7.2

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.

a) Zeigen Sie, dass die Wiederkehrperiode von 475 Jahren einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 10% in 50 Jahren entspricht.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren tatsächlich innerhalb der 475 Jahre auftritt?



Seismic Shaking Hazards in Switzerland
Probabilistic Seismic Hazards Assessment
10% probability of being exceeded in 50 years
www.earthquake.ethz.ch

Es wird angenommen, dass das Auftreten der Erdbeben einem Poissonprozess folgt.

Aufgabe 7.2

Was ist gegeben?

Erdbebengefahrenkarte für eine Wiederkehrperiode von 475 Jahren.
Auftreten der Erdbeben folgt einem Poissonprozess.
Auftretenswahrscheinlichkeit liegt bei 10% in 50 Jahren.

Das heisst: Die 10%ige Wahrscheinlichkeit eines Überschreitens (einer gewissen Bodenbeschleunigung) in 50 Jahren entspricht der jährlichen Wahrscheinlichkeit, dass 1 von 475 Erdbeben pro Jahr den Wert überschreitet (90% Wahrscheinlichkeit, dass die Bodenbeschleunigung nicht überschritten wird).

a) Bestätige diese Beziehung
   Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer 10%igen Wahrscheinlichkeit in 50 Jahren
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren in den nächsten 475 Jahren auftritt?

Aufgabe 7.2

a) Bestätige diese Beziehung
Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer 10%igen Wahrscheinlichkeit in 50 Jahren

Wiederkehrperiode = 475 Jahre

jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{475}$ (Siehe Skript Gleichung D.60)

Durchschnittliche Zeit bis zu einem Auftreten: $E[T] = \frac{1}{p} = u = \frac{1}{\frac{1}{475}} = 475$
(Siehe Skript Gleichung D.59)

Die Zeit zwischen poissonverteilten Prozessen ist exponentialverteilt.
(Siehe Skript Gleichung D.64)

Aufgabe 7.2

a) Bestätige diese Beziehung
Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer 10%igen Wahrscheinlichkeit in 50 Jahren

Der Erwartungswert einer exponentiell verteilten Zufallsvariable T ist gegeben als:

$$E[T] = \frac{1}{\nu} = 475 \qquad \nu = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{475}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_A(50)$, dass Ereignis A in 50 Jahren auftritt, kann folgendermassen berechnet werden:

$$P\left[T \leq 50\,Jahren\right] = 1 - e^{-\nu \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475}\cdot 50} = 10\,\%$$

(Skript Gleichung D.65)

Aufgabe 7.2

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren in den nächsten 475 Jahren auftritt?

Die Wahrscheinlichkeit $P_A(475)$, dass Ereignis A in 475 Jahren auftritt, kann folgendermassen berechnet werden:

$$P\left[T \leq 475\ Jahren\right] = 1 - e^{-\nu \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475} \cdot 475} = 1 - e^{-1} = 63.2\,\%$$

Aufgabe 7.3

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbelverteilung folgt, mit dem Mittelwert μ_X =10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

Aufgabe 7.3

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbelverteilung folgt, mit dem Mittelwert μ_X =10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s.

Hinweis: Die Gumbelverteilungsfunktion hat nachfolgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert

σ_X – Standardabweichung

u – Parameter der Verteilung

α – Parameter der Verteilung

(Skript Tabelle D.2)

Aufgabe 7.3

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$P[\,jährliches\ Max > 15'000] = 1 - F_X\left(x = 15'000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

Aufgabe 7.3

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$P[\,jährliches\,Max > 15'000] = 1 - F_X\left(x = 15'000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

Parameter u und α ermitteln:

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_x\sqrt{6}} = \frac{\pi}{3'000\,\sqrt{6}} = \underline{4.2752\cdot 10^{-4}}$$

$$u = \mu_x - \frac{0.57722}{\alpha} = 10'000 - \frac{0.57722}{4.2752\cdot 10^{-4}} = \underline{8'649.809}$$

Aufgabe 7.3

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

$$1-F_X\left(x=15'000\right)=1-e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

$$\alpha=4.2752\ 10^{-4}$$
$$u=8'649.809$$

$$1-F_X\left(x=15'000\right)=1-e^{-e^{-4.2752\cdot 10^{-4}\,(15'000-8'649.81)}}$$

$$=1-e^{-e^{-2.715}}=1-0.9359=\underline{\underline{0.0641}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15‘000 m^3/s überschreitet, beträgt 0.0641.

Aufgabe 7.3

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

Wiederkehrperiode = 100 Jahre

jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{100}$ (Siehe Skript Gleichung D.60)

$$1 - P[\, jährliches\ Max > x] = F_X\left(x\right)$$

$$1 - \frac{1}{100} = F_X\left(x\right)$$

Aufgabe 7.3

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher der Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

$$1-\frac{1}{100}=F_X\left(x\right)=e^{-e^{-\alpha(x-u)}}=0.99$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)=-\alpha\left(x-u\right)\Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)}{-\alpha}+u=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)}{-4.2752\ 10^{-4}}+8649.809=x \Leftrightarrow 10'760.08+8'649.809=x$$

$$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{19'409.889}}$$

Die Überschwemmung, welche der Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht, ist 19‘410 m^3/s

Aufgabe 7.3

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = [F_X(x)]^{20} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{20} = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

Aufgabe 7.3

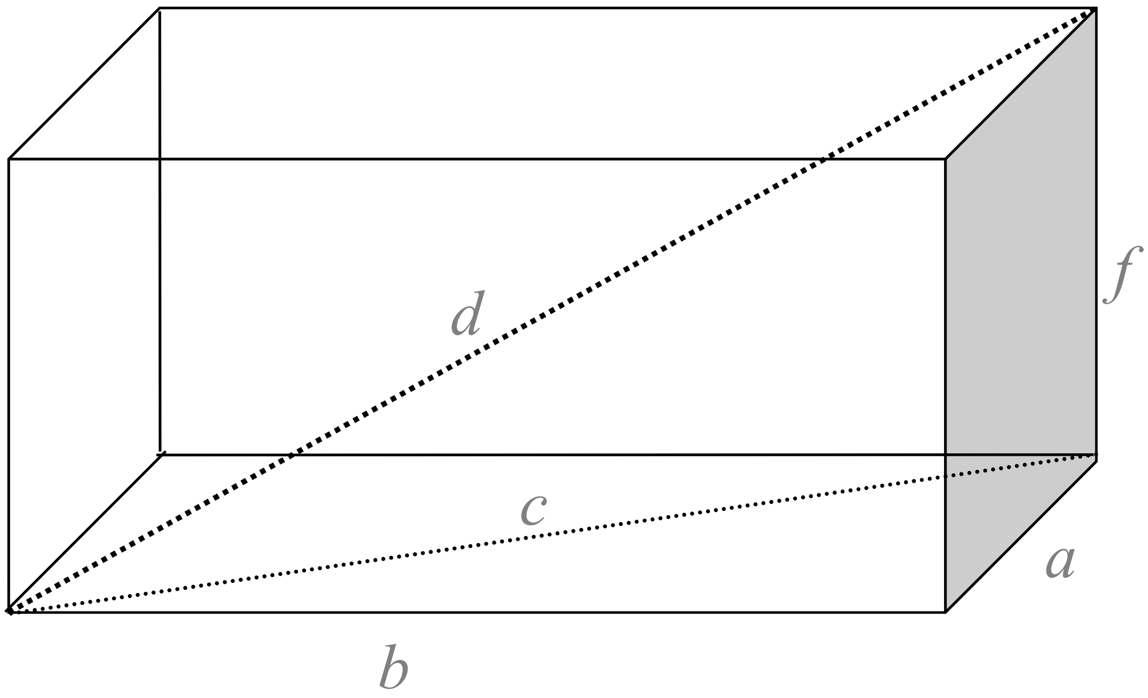
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

$$1-F_Y(15'000)=1-e^{-20e^{-4.2756\cdot 10^{-4}(15'000-8'649.81)}}=1-e^{-1.324}=1-0.266=\underline{\underline{0.734}}$$

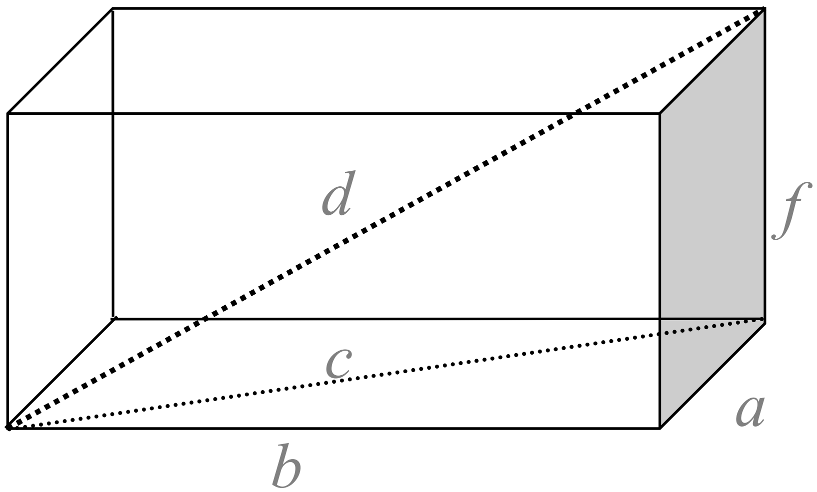
Die Wahrscheinlichkeit, dass die 20-jährige maximale Überschwemmung 15‘000 m^3/s überschreitet, beträgt 0.734.

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

Gegeben sei ein Quader, bei welchem die Kanten a, b und f gemessen wurden. Die Messungen beinhalten einen Messfehler, welcher als ε bezeichnet wird. Es wird angenommen, dass der Fehler normalverteilt ist. Die Standardabweichung des Fehlers ist σ_ε.



Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

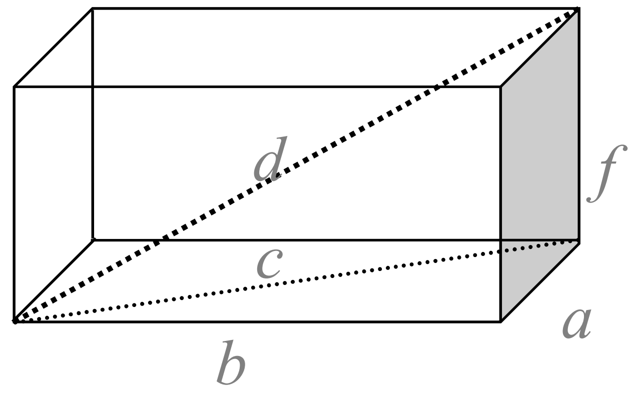


a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Fehlers für d auf, wenn d mit Hilfe der Messungen in a, b und f berechnet wird.

b) Wenn die Messungen von a und b zur Berechnung von c verwendet werden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in c grösser als $2.4 \cdot \sigma_\varepsilon$ ist?

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Fehlers für d auf, wenn d mit Hilfe der Messungen in a, b und f berechnet wird.



1. Schritt: Nehme an, dass sich der Fehler in d fortsetzt gemäss Pythagoras.

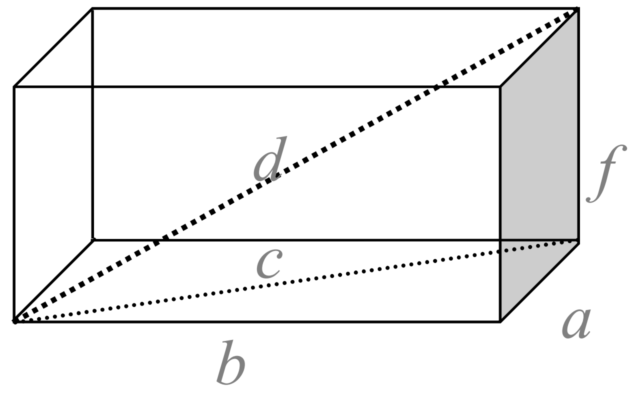
2. Schritt: Mit einer Standardisierung kommt man auf eine Chi-verteilte Zufallsvariable Z (überlege: Was ist der Mittelwert eines Fehlers?).

3. Schritt: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Z(z)$ der Zufallsvariable Z: (E.4) im Skript.
   Eigenschaften der Gammaverteilung: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ and $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

4. Schritt: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von ε_d: (D.42) im Skript.

Aufgabe 7.5 *Gruppenaufgabe*

b) Wenn die Messungen von a und b zur Berechnung von c verwendet werden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in c grösser als $2.4 \cdot \sigma_\varepsilon$ ist?



1. Schritt: Nehme an, dass sich der Fehler in c fortsetzt gemäss Pythagoras.

2. Schritt: Mit einer Standardisierung kommt man auf eine Chi-verteilte Zufallsvariable Z.

3. Schritt: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Z(z)$ der Zufallsvariable Z: (E.4) im Skript. Siehe dazu folgende Eigenschaft der Gammaverteilung: $\Gamma(1) = 1$

4. Schritt: Wahrscheinlichkeit berechnen, dass der Fehler in c grösser wird als $2.4 \cdot \sigma_\varepsilon$
   Hinweis: $P(\varepsilon_d > 2.4\sigma_\varepsilon) = P(\frac{\varepsilon_d}{\sigma_\varepsilon} > 2.4)$