

Gruppenaufgabe 5.3

3. April 2008

Aufgabe a) Zu berechnen:

$$\int_0^z f_T(t) f_S(z-t) dt =$$

Einsetzen der beiden funktionen,
mit $s = z-t$

$$\int_0^z \frac{1}{M_T} e^{-\frac{b}{M_T} t} \cdot \frac{1}{M_S} e^{\frac{t-z}{M_S}} dt$$

Alle Konstanten vor das Integral nehmen, und Exponent gleichnenniger machen

$$\frac{1}{M_T M_S} e^{-\frac{z}{M_S}} \int_0^z e^{-\frac{t}{M_T} + \frac{t}{M_S}} dt = \frac{e^{-\frac{z}{M_S}}}{M_T M_S} \int_0^z e^{t \frac{(M_S - M_T)}{M_T M_S}} dt$$

Integrieren, kürzen...

$$\frac{e^{-\frac{z}{M_5}}}{M_T M_5} \cdot \frac{M_T M_5}{M_T - M_5} \left[e^{-\frac{t}{M_T} + \frac{t}{M_5}} \right]_0^z$$

Grenzen z und 0 berechnen

$$= \frac{e^{-\frac{z}{M_T}}}{M_T - M_S} \left(e^{-\frac{z}{M_T} + \frac{z}{M_S}} - 1 \right) = \frac{e^{-\frac{z}{M_T}}}{M_T - M_S} - \frac{e^{-\frac{z}{M_S}}}{M_T - M_S} = f_z(z)$$

Werte einsetzen

$$M_T = 10$$
$$M_S = \frac{1}{12}$$

$$M_T - M_S = \frac{11}{12}$$
$$\Rightarrow f(z) = \frac{12}{119} \left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z} \right)$$

Aufgabe b) Funktion auswerten

$$F_2(z) = \int f(z) dz = \frac{12}{119} \left(-10 e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12} e^{-12z} \right)$$

Aufgabe c)

Funktion aufstellen

$$\int_5^{\infty} f_{T_n}(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_5^k \frac{1}{M_T} e^{-\frac{t}{M_T}} dt$$

Uneigentliches Integral berechnen

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{k}{MT_1}} + e^{-\frac{5}{MT_1}} \right] - e^{-\frac{5}{MT_1}} = F_{T_1}$$

analog: $F_{T_2} = e^{-\frac{5}{MT_2}}$

Wir haben nun 2 unabhängige Wahrscheinlichkeiten.

Multipliziere beide Wahrscheinlichkeiten

$$F_{\text{neu}} = F_{T_1}(t) \cdot F_{T_2}(t) = e^{-\frac{5}{M_{T_1}} - \frac{5}{M_{T_2}}}$$

$$\text{BSP: } M_{T_1} = M_{T_2} = 10 \\ F_{\text{neu}} = e^{-\frac{5}{10} - \frac{5}{10}} = e^{-1} = 0,367$$

Gruppenaufgabe 5.3a)

Gruppenaufgabe 5.3.

$$\begin{aligned}
 a) \quad f_z(z) &= \int_0^z f_T(t) f_S(z-t) dt \\
 &= \int_0^z \frac{1}{\mu_T} e^{-\frac{t}{\mu_T}} \cdot \frac{1}{\mu_S} e^{-\frac{(z-t)}{\mu_S}} dt \\
 &= \frac{1}{\mu_T \mu_S} \left[\frac{\mu_T \mu_S}{\mu_T - \mu_S} e^{-\frac{t \mu_S - z \mu_T + t \mu_T}{\mu_T \mu_S}} \right]_0^z \\
 &= \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}} \right) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_z(z) &= \int_0^z f_z(z) dz \\
 &= \int_0^z \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}} \right) dz \\
 &= \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(\int_0^z e^{-\frac{z}{\mu_T}} dz - \int_0^z e^{-\frac{z}{\mu_S}} dz \right) \\
 &= \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(\left[-\mu_T e^{-\frac{z}{\mu_T}} \right]_0^z - \left[-\mu_S e^{-\frac{z}{\mu_S}} \right]_0^z \right) \\
 &= \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(-\mu_T e^{-\frac{z}{\mu_T}} + \mu_S e^{-\frac{z}{\mu_S}} \right) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion}
 \end{aligned}$$

$$(\mu_T = 10; \mu_S = 1/2)$$

Gruppenaufgabe 5.3b)c)

$$b) P(Z \leq 5) = F_Z(5) = \underline{0.388}$$

$$c) E: \{T_1 > 5\} \cap \{T_2 > 5\}$$

$$P(\{T_1 > 5\} \cap \{T_2 > 5\}) = (1 - F_S(5))^2$$

$$F_T(t) = \int_0^t f_T(t) dt \quad ; \quad f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} e^{-\frac{t}{\mu_T}}$$

$$F_S(t) = \int_0^5 f_T(t) dt = \int_0^5 \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} dt$$

$$= \frac{1}{10} \left[-10 e^{-\frac{t}{10}} \right]_0^5 = 1 - e^{-1/2}$$

$$P = (1 - (1 - e^{-1/2}))^2 = \underline{0.368}$$