Übung 7 – Lösungen

Aufgabe 7.1 - Lösung

a. Die durchschnittliche Intensität v eines Regenereignisses innerhalb der ersten 5 Monate wird folgendermassen berechnet:

Addition entsprechend der Bereiche je betroffenem Intervall (0≤ t < 3, 3 ≤ t <7) mit der Einschränkung auf 5 Perioden

$$v = \int_0^3 \frac{2 \cdot t}{3} dt + \int_3^5 2 \; dt = 7 .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass 3 oder mehr Regenereignisse in den ersten 5 Monaten stattfinden ergibt:

$$\sum_{i=3}^{\infty} P_T(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5) \right]$$

$$P_0(5) = \frac{\nu^k}{k!} \cdot e^{-\nu} = \frac{7^0}{0!} \cdot e^{-7} = e^{-7}$$

$$P_1(5) = \frac{\nu^k}{k!} \cdot e^{-\nu} = \frac{7^1}{1!} \cdot e^{-7} = 7 \cdot e^{-7}$$

$$P_2(5) = \frac{\nu^k}{k!} \cdot e^{-\nu} = \frac{7^2}{2!} \cdot e^{-7} = \frac{49}{2} e^{-7}$$

$$P_{T \geq 3}(5) = 1 - P_{T \leq 2}(5) = 1 - (\frac{7^0}{0!} e^{-7} + \frac{7^1}{1!} \cdot e^{-7} + \frac{7^2}{2!} \cdot e^{-7}) = 0.97 .$$

Wobei die Zufallsvariable T die Anzahl Regenereignisse in den ersten 5 Monaten repräsentiert.

b) Die Ereignisse in den Monaten 7 bis 10 (Ereignis Y) und 10 bis 13 (Ereignis Z) sind unabhängig. Als Mittelwert für die Monate 8, 9, 10 und für die letzten drei Monate ergibt sich:

$$\nu_Y = \frac{1}{3} \int_7^{10} (13 - t)\, dt = 4.5$$

$$\nu_Z = \frac{1}{3} \int_{10}^{13} (13 - t)\, dt = 1.5 .$$

Als Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses erhält man somit:

$$P[Y \cap Z] = (\frac{4.5^0}{0!} e^{-4.5} + \frac{4.5^1}{1!} \cdot e^{-4.5}) \cdot (\frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} + \frac{1.5^1}{1!} \cdot e^{-1.5}) = 0.034 .$$

Aufgabe 7.2 – Lösung

a) Die Zeit zwischen poissonverteilten Prozessen ist exponentialverteilt.

Jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{475}$

Durchschnittliche Zeit bis zu einem Auftreten: $E[N] = \frac{1}{p} = \lambda = \frac{1}{\frac{1}{475}} = 475$

Die Wahrscheinlichkeit $P_A(50)$, dass Ereignis *A* in 50 Jahren auftritt kann folgendermassen berechnet werden:

$$P[T \leq 50\, Jahren] = 1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475} \cdot 50} = 10\,\%$$

b) Die Wahrscheinlichkeit $P_A(475)$, dass Ereignis *A* in 475 Jahren auftritt kann folgendermassen berechnet werden:

$$P[T \leq 475\ Jahren] = 1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475} \cdot 475} = 1 - e^{-1} = 63.2\,\%$$

Aufgabe 7.3 – Lösung

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert

σ_X – Standartabweichung

u – Parameter der Verteilung

α – Parameter der Verteilung

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15000 m^3/s übersteigt.

$$P[\,jährliches\ \max \geq 15000] = 1 - F_X\left(x = 15000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15000-u)}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_x\sqrt{6}} = \frac{\pi}{3.000\ \sqrt{6}} = 4.2752\ 10^{-4}$$

$$u = \mu_x - \frac{0{,}57722}{\alpha} = 10.000 - \frac{0.57722}{4.2752\ 10^{-4}} = 8649.809$$

$$1 - F_X\left(x = 15.000\right) = 1 - e^{-e^{-4.2752\cdot 10^{-4}\,(15000-8649.81)}} = 1 - e^{-e^{-2.715}} = 1 - 0.9359 = 0.0641$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15.000 m^3/s überschreitet beträgt 0.0641.

b) Wie gross ist die Überschwemmung, welche der Wiederkehrperiode T von 100 Jahren entspricht?

$$1 - \frac{1}{100} = F_X\left(x\right) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}} = 0.99 \Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right) = -\alpha\left(x-u\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)}{-\alpha} + u = x$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)}{-4{,}2752\ 10^{-4}} + 8649.809 = x \Leftrightarrow 10760.08 + 8649.809 = x \Leftrightarrow 19409.889 = x$$

Die Überschwemmung, welche der Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht ist $19410\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

c) Finde einen Ausdruck, welcher die kumulative Verteilungsfunktion des Flusses maximalen Überschwemmungen über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

$$F_Y\left(y\right) = P\left[Y \leq y\right] = \left[F_X\left(x\right)\right]^{20} = F_Y\left(y\right) = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{20} = F_Y\left(y\right) = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 20-jährige maximale Überschwemmung 15000 m^3/s überschreitet?

$$1 - F_Y\left(15000\right) = 1 - e^{-20e^{-4.2756\cdot 10^{-4}(15000-8649.81)}} = 1 - e^{-1.324} = 1 - 0.266 = 0.734$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die 20-jährige maximale Überschwemmung 15000 m^3/s überschreitet beträgt 0.734.