ÜBUNG 5 - Lösungen

Aufgabe 5.1

a) Die Erwartungswerte von X und Y sind:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \frac{3}{4} \cdot \int_{0}^{2} y \cdot \left(2y - y^2\right) dy = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 1$$

Der Erwartungswert für $6X - 4Y + 2$ wird wie folgt berechnet:

$$E(6X - 4Y + 2) = 6E(X) - 4E(Y) + 2 = -2$$

b) Die Varianzen für X und Y betragen:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 \qquad Var(Y) = E\left[Y^2\right] - \left(E\left[Y\right]\right)^2$$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$E\left[Y^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\, dy = \frac{3}{4} \cdot \int_{0}^{2} y^2 \cdot \left(2y - y^2\right) dy = \frac{3}{4}\left[\frac{y^4}{2} - \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{6}{5}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} \qquad Var(Y) = \frac{1}{5}$$

Daraus ergibt sich die folgende Berechnung der Kovarianz $Cov(6X;4Y)$:

$$Cov(X;Y) = \rho_{X,Y} \cdot \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{45}}$$

$$Cov(6X;4Y) = 6 \cdot 4 \cdot Cov(X;Y) = 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{45}} = 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{45}}$$

c)

$$Var(6X-4Y+2)=Var(6X)+Var(4Y)-2\cdot Cov(6X;4Y)=$$

$$6^2\cdot Var(X)+4^2\cdot Var(Y)-2\cdot Cov(6X;4Y)=36\cdot\frac{1}{3}+16\cdot\frac{1}{5}-2\cdot 24\cdot\sqrt{\frac{1}{45}}\cong 8.04$$

d)

$$E(6X^2-4Y^2)=6E(X^2)-4E(Y^2)=6E(X^2)-4(Var(Y)+\left[E(Y)\right]^2)=$$

$$6\cdot\frac{1}{3}-4\cdot(\frac{1}{5}+1^2)=-\frac{14}{5}$$

Aufgabe 5.2

a) $P[N_U=N_G]=0.2910+0.3580+0.1135+0.0505=0.813$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird durch eine bedingte Wahrscheinlichkeit repräsentiert:

$$P[N_G\mid N_U=2]=\frac{P[N_G\cap(N_U=2)]}{P[N_U=2]}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt berechnet:

$$P[N_G=0\mid N_U=2]=\frac{P[(N_G=0)\cap(N_U=2)]}{P[N_U=2]}=\frac{0.01}{0.1785}=0.056$$

$$P[N_G=1\mid N_U=2]=\frac{P[(N_G=1)\cap(N_U=2)]}{P[N_U=2]}=\frac{0.025}{0.1785}=0.1401$$

$$P[N_G=2\mid N_U=2]=\frac{P[(N_G=2)\cap(N_U=2)]}{P[N_U=2]}=\frac{0.1135}{0.1785}=0.6359$$

$$P[N_G=3\mid N_U=2]=\frac{P[(N_G=3)\cap(N_U=2)]}{P[N_U=2]}=\frac{0.03}{0.1785}=0.1681$$