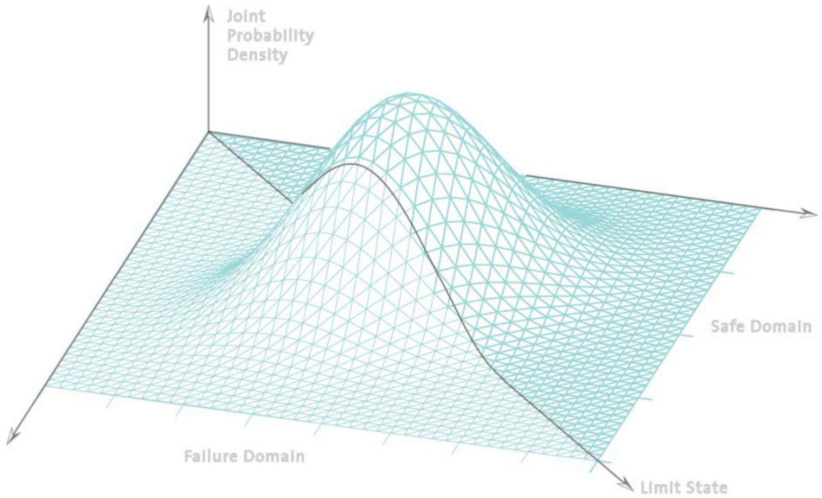


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 4

Aufgabe 4.1

Die monatliche Aufwendung X [CHF] für den Wasserverbrauch einschliesslich der Abwassergebühren eines 2-Personenhaushalts seien durch eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x \cdot (15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welcher Wert soll für c gewählt werden?

b) Beschreibe die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariablen X

c) Welche der folgenden Werte überschreiten nicht das 90%-Quantil der monatlichen Rechnung? 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF?

d) Wie hoch ist die mittlere monatliche Aufwendung für den Wasserverbrauch einschliesslich der Wassergebühren eines 2-Personenhaushalts?

Aufgabe 4.1

a) Welcher Wert soll für *c* gewählt werden?

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0$$ ← Nicht negativ

$$\int_\Omega f_X(x)dx = 1$$ ← Fläche = 1

Aufgabe 4.1

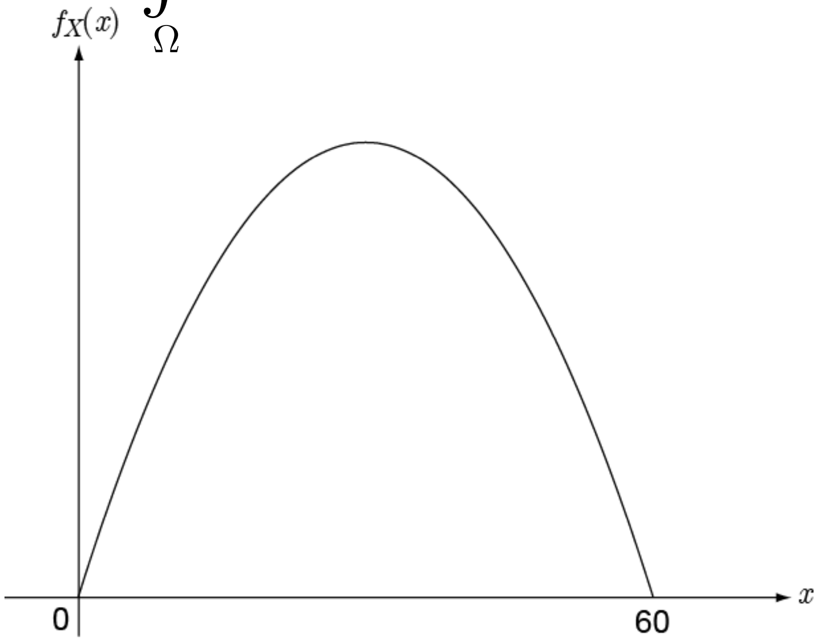
a) Welcher Wert soll für *c* gewählt werden?

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x \cdot (15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$f_X(x) \geq 0$ ← Nicht negativ

$\int_\Omega f_X(x)dx = 1$ ← Fläche = 1



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow c \cdot \int_0^{60} x \cdot (15 - \frac{x}{4})\,dx$$

$$= c \cdot \left[\frac{15}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot x^3\right]_0^{60} = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot (27000 - 18000) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9000}$$

Aufgabe 4.1

b) Beschreibe die kumulative Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariablen X

Kumulative Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \int_{\Omega} f_X(x) dx$$

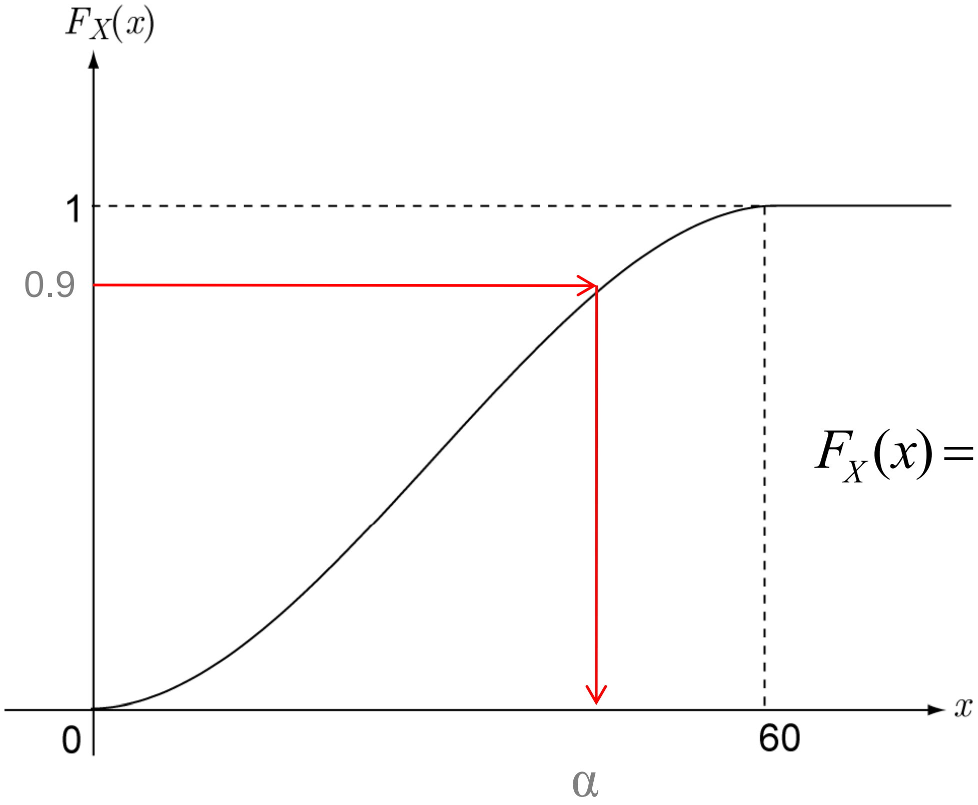
$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x \cdot (15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{15}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot x^3 \right) & 0 \leq x \leq 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$

Aufgabe 4.1

c) Welche der folgenden Werte überschreitet nicht das 90%-Quantil der monatlichen Rechnung? 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF

Als erstes muss der Wert für das 90%-Quantil berechnet werden.

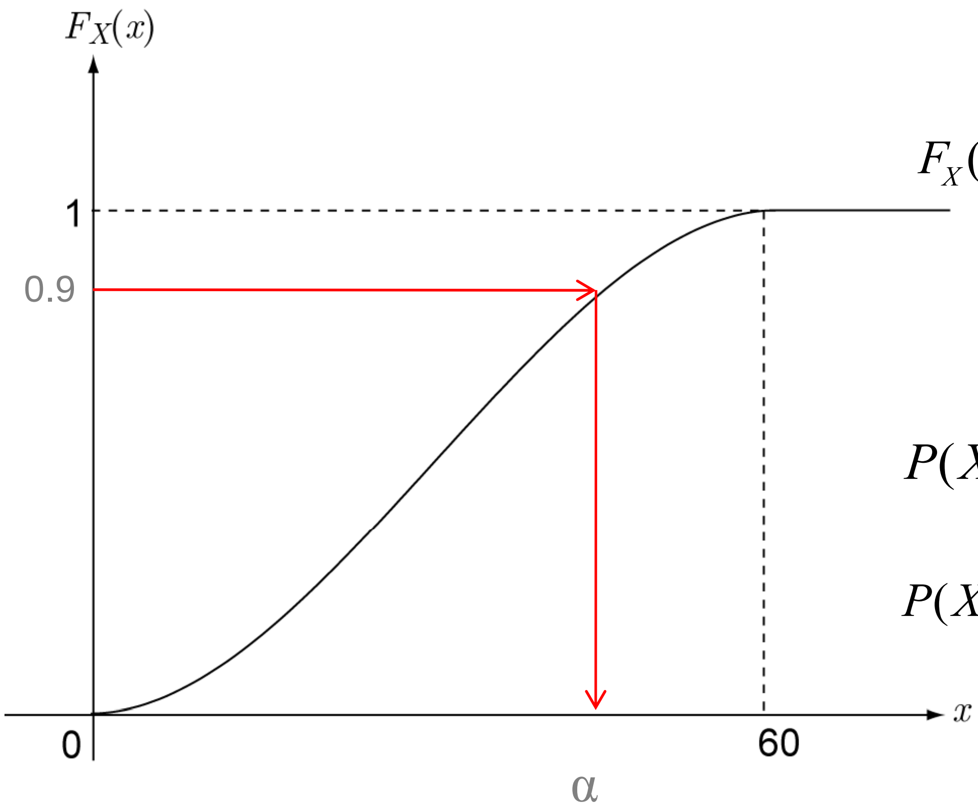


$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{15}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot x^3 \right) & 0 \le x \le 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$

Aufgabe 4.1

c) Welche der folgenden Werte überschreitet nicht das 90%-Quantil der monatlichen Rechnung? 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF

Als erstes muss der Wert für das 90%-Quantil berechnet werden.



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{15}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot x^3 \right) & 0 \leq x \leq 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$

$$P(X \leq \alpha) = F_X(x) = 0.9$$

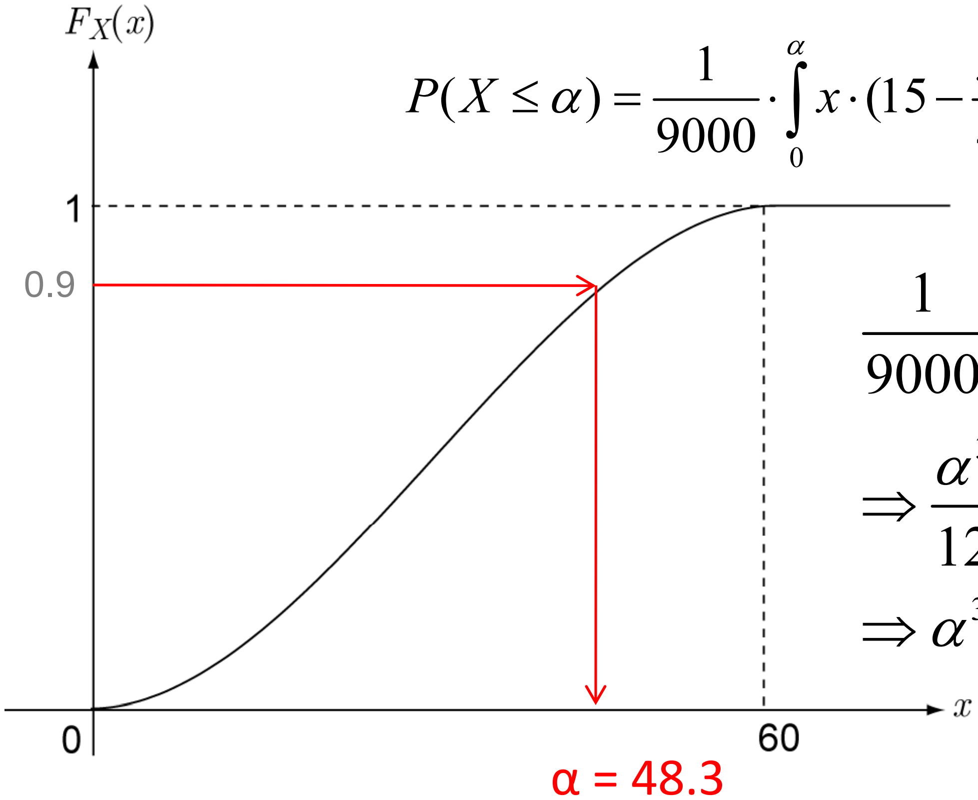
$$P(X \leq \alpha) = \frac{1}{9000} \cdot \int_0^\alpha x(15 - \frac{x}{4})\, dx \Rightarrow \alpha = ...$$

Aufgabe 4.1

c) Welche der folgenden Werte überschreitet nicht das 90%-Quantil der monatlichen Rechnung? 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF

Als erstes muss der Wert für das 90%-Quantil berechnet werden.

$$P(X \le \alpha) = \frac{1}{9000} \cdot \int_0^{\alpha} x \cdot (15 - \frac{x}{4})\, dx = \frac{1}{9000} \cdot \left[\frac{15}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot x^3 \right]_0^{\alpha} = 0.9$$



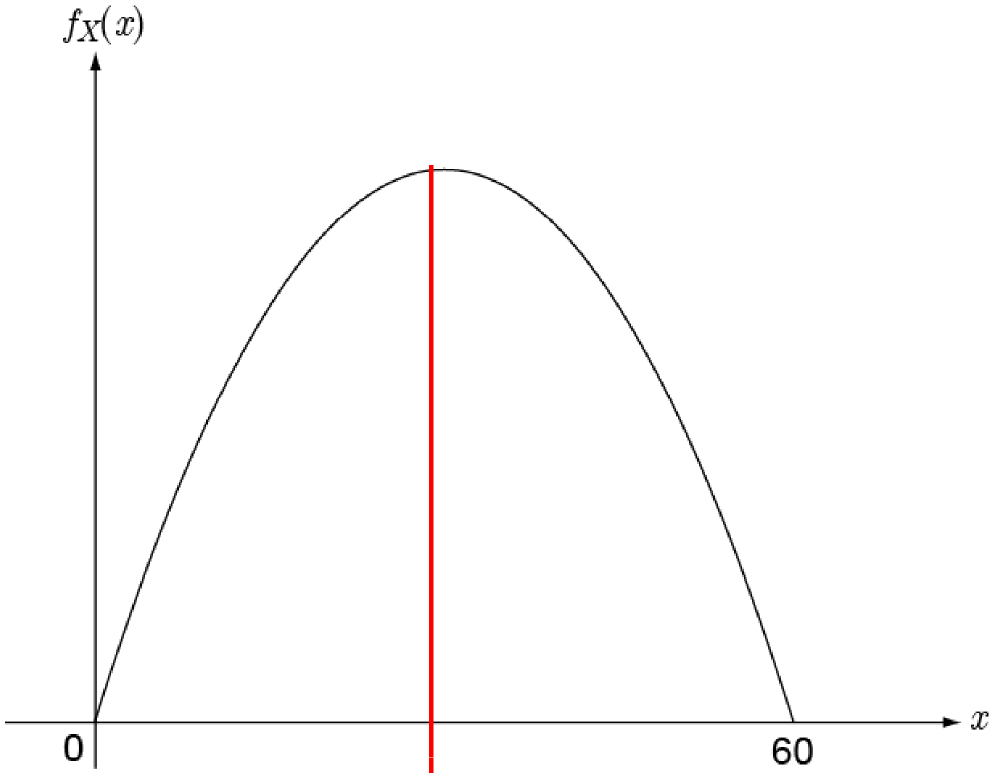
$$\frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{15}{2} \cdot \alpha^2 - \frac{1}{12} \cdot \alpha^3 \right) = 0.9$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^3}{12} - \frac{15}{2} \cdot \alpha^2 + 8100 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 90 \cdot \alpha^2 + 97200 = 0 \Rightarrow \alpha = 48.30$$

Aufgabe 4.1

d) Wie hoch ist die mittlere monatliche Aufwendung für den Wasserverbrauch einschliesslich der Wassergebühren eines 2-Personenhaushalts?



Mittelwert = 30

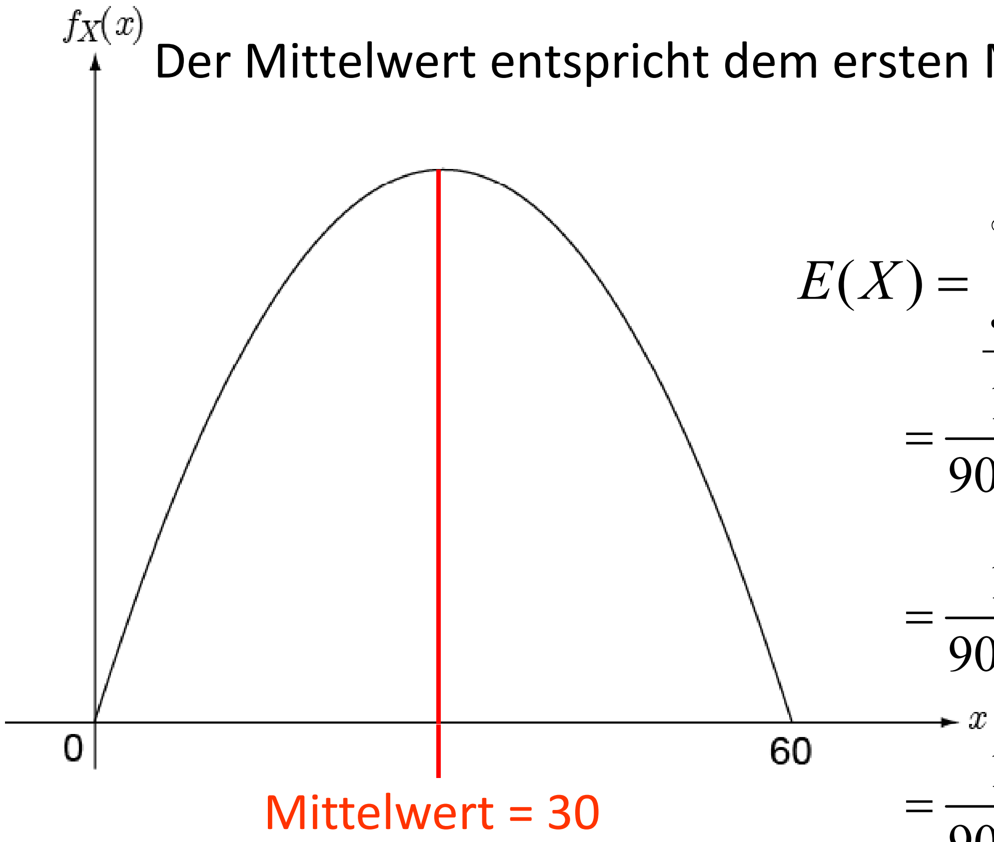
Mittelwert = 30

Wir können dies direkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion herauslesen.
Warum?

Aufgabe 4.1

d) Wie hoch ist die mittlere monatliche Aufwendung für den Wasserverbrauch einschliesslich der Wassergebühren eines 2-Personenhaushalts?

Der Mittelwert entspricht dem ersten Moment $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \frac{1}{9000} \cdot \int_{0}^{60} x^2 \cdot (15 - \frac{x}{4})\, dx$$

$$= \frac{1}{9000} \cdot \left[\frac{15x^3}{3} - \frac{x^4}{4 \cdot 4} \right]_0^{60}$$

$$= \frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{15 \cdot (60)^3}{3} - \frac{(60)^4}{16} \right) - \left(\frac{15 \cdot (0)^3}{3} - \frac{(0)^4}{16} \right)$$

$$= \frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{15 \cdot (60)^3}{3} - \frac{(60)^4}{16} \right) = 30$$

Aufgabe 4.2

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine Zufallsvariable ist in Abbildung 4.2.1 dargestellt. (Annahme für Teilaufgabe b, c, d und e: a=1, b=2, c=3 und d=6.)

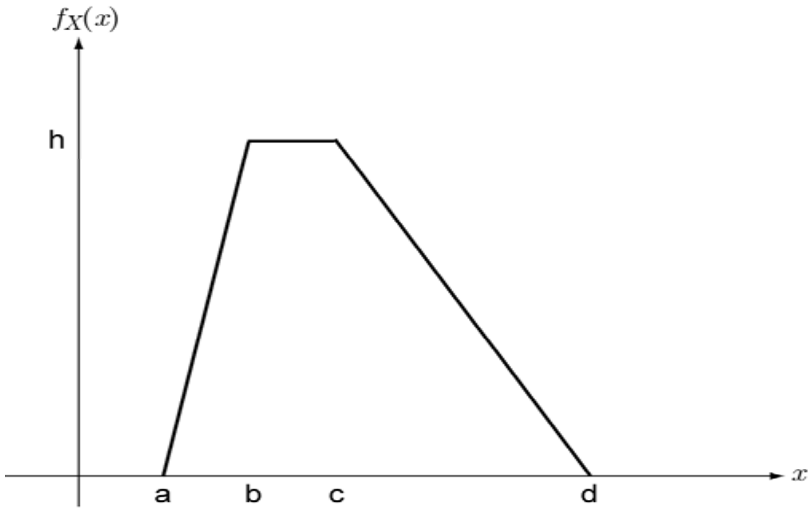
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h.

c) Berechne den Mittelwert.

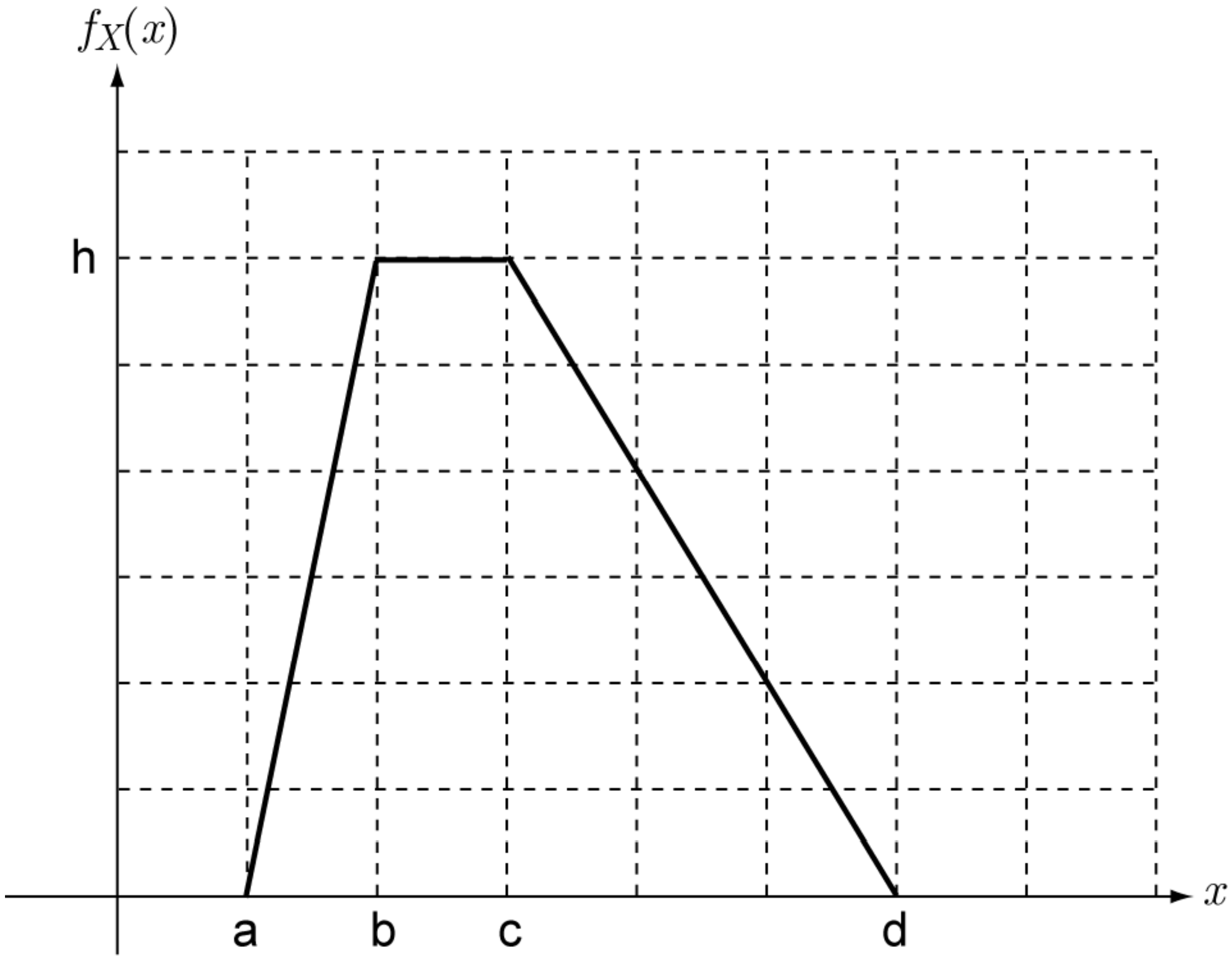
d) Berechne den Wert des Medians.

e) Ermittle grafisch den Median aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Diskutieren Sie wie der Mittelwert graphisch ermittelt werden kann.



Aufgabe 4.2

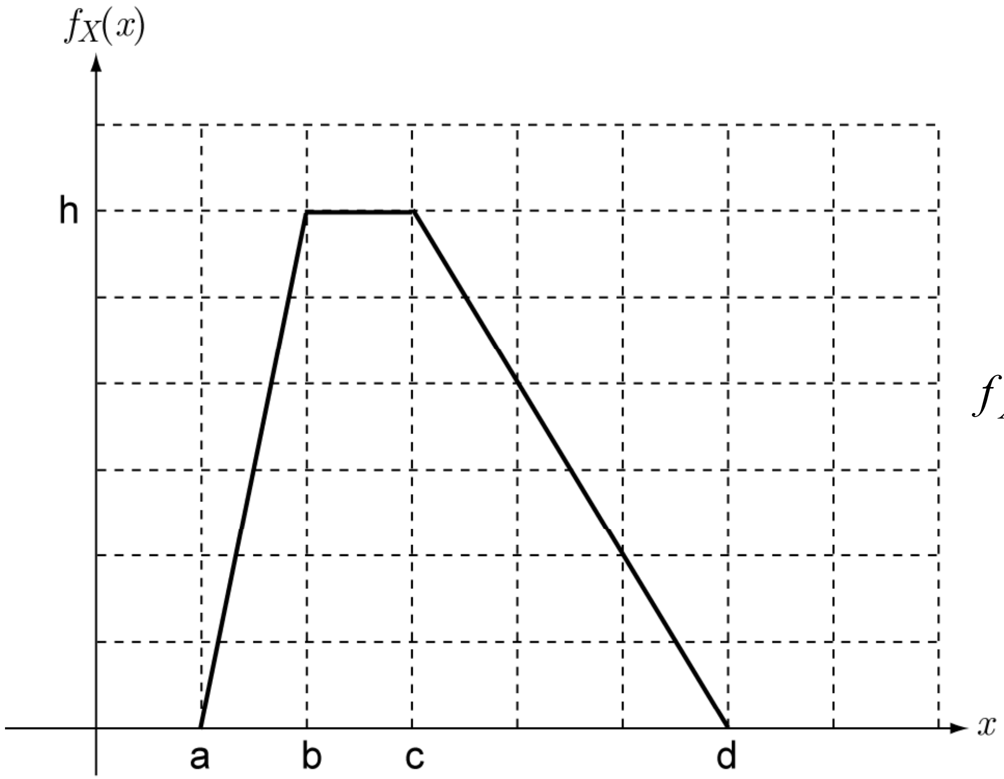
Denken wir zuerst über die Definition nach – Was bedeutet das grafisch?



Aufgabe 4.2

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion:



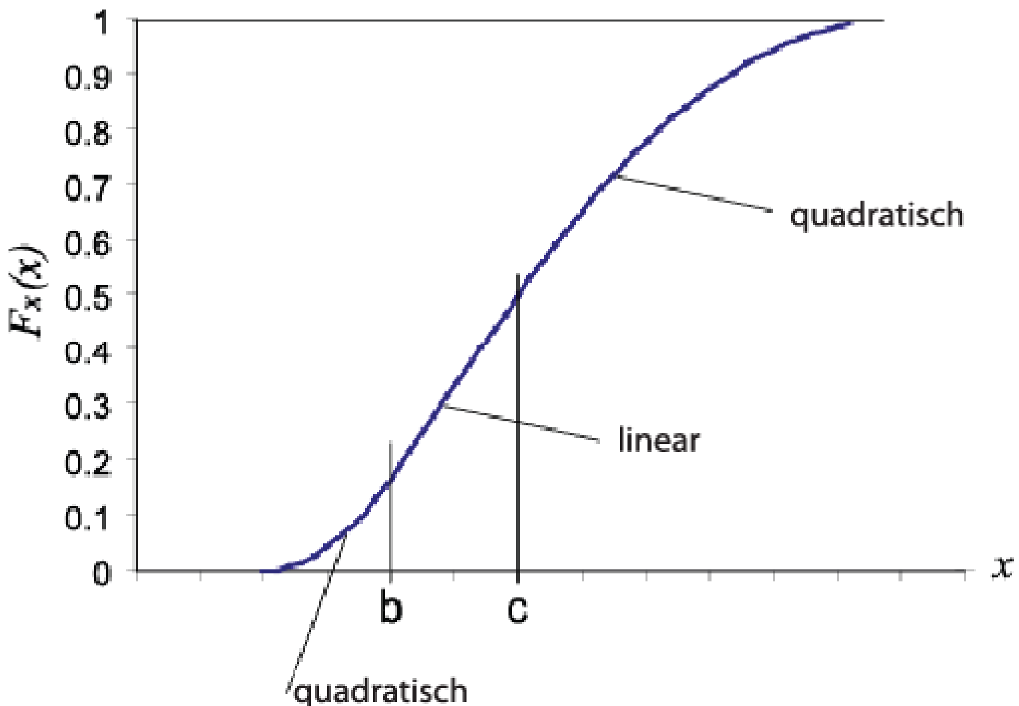
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ h \cdot \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & a \le x < b \\ h & b \le x < c \\ h \cdot \dfrac{(x-d)}{(c-d)} & c \le x < d \\ 0 & d \le x \end{cases}$$

Aufgabe 4.2

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

$$F_X(x) = \int_\Omega f_X(x)dx$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ h \cdot \dfrac{(x-a)^2}{2\cdot(b-a)} + C_1 & a \le x < b \\ h \cdot x + C_2 & b \le x < c \\ h \cdot \dfrac{(x-d)^2}{2\cdot(c-d)} + C_3 & c \le x < d \\ 1 & d \le x \end{cases}$$

Die Konstanten können berechnet werden indem die Grenzbedingungen benutzt werden.

Aufgabe 4.2

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

$$F_X(x) = \int_\Omega f_X(x)dx$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ h \cdot \dfrac{(x-a)^2}{2\cdot(b-a)} + C_1 & a \le x < b \\ h \cdot x + C_2 & b \le x < c \\ h \cdot \dfrac{(x-d)^2}{2\cdot(c-d)} + C_3 & c \le x < d \\ 1 & d \le x \end{cases}$$

Für $x = a$ $\quad 0 = h \cdot \dfrac{(a-a)^2}{2\cdot(b-a)} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

Für $x = b$ $\quad h \cdot \dfrac{(b-a)^2}{2\cdot(b-a)} = h \cdot b + C_2$

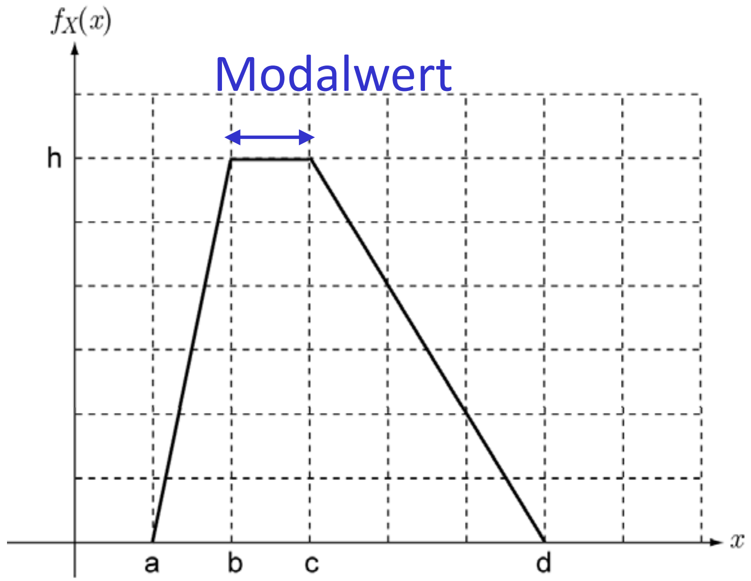
$$\Rightarrow \quad C_2 = -\frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

Für $x = c$ $\quad h \cdot \dfrac{(x-d)^2}{2\cdot(c-d)} + C_3 = h \cdot x + C_2$

$$\Rightarrow h \cdot \frac{(c-d)^2}{2\cdot(c-d)} + C_3 = h \cdot c - \frac{(a+b)}{2} \cdot h \Rightarrow C_3 = \left(\frac{(c+d)-(a+b)}{2}\right) \cdot h$$

Aufgabe 4.2

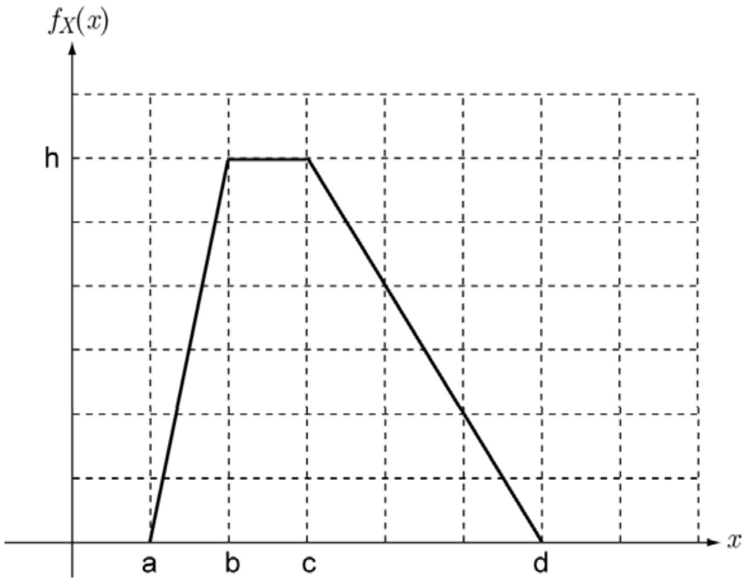
b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h (a=1, b=2, c=3 und d=6).



Modalwert = Bereich zwischen b und c

Aufgabe 4.2

b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h (a=1, b=2, c=3 und d=6).



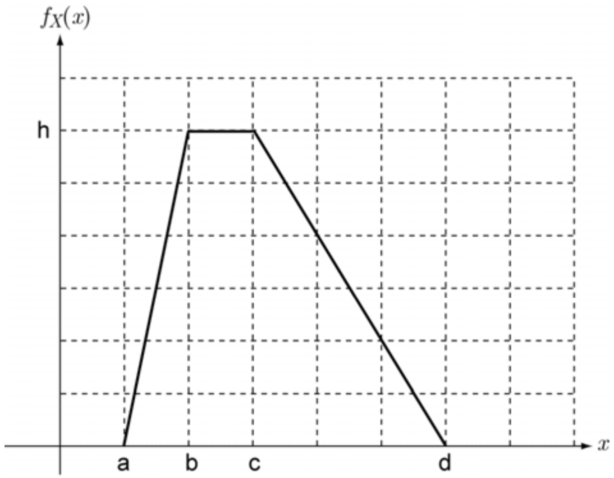
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Fläche unter der Wahrscheinlichkeits-dichtefunktion

$$\frac{(d-a)+(c-b)}{2} \cdot h = 1 \Rightarrow \frac{(6-1)+(3-2)}{2} \cdot h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 4.2

c) Berechne den Mittelwert (a=1, b=2, c=3 und d=6).



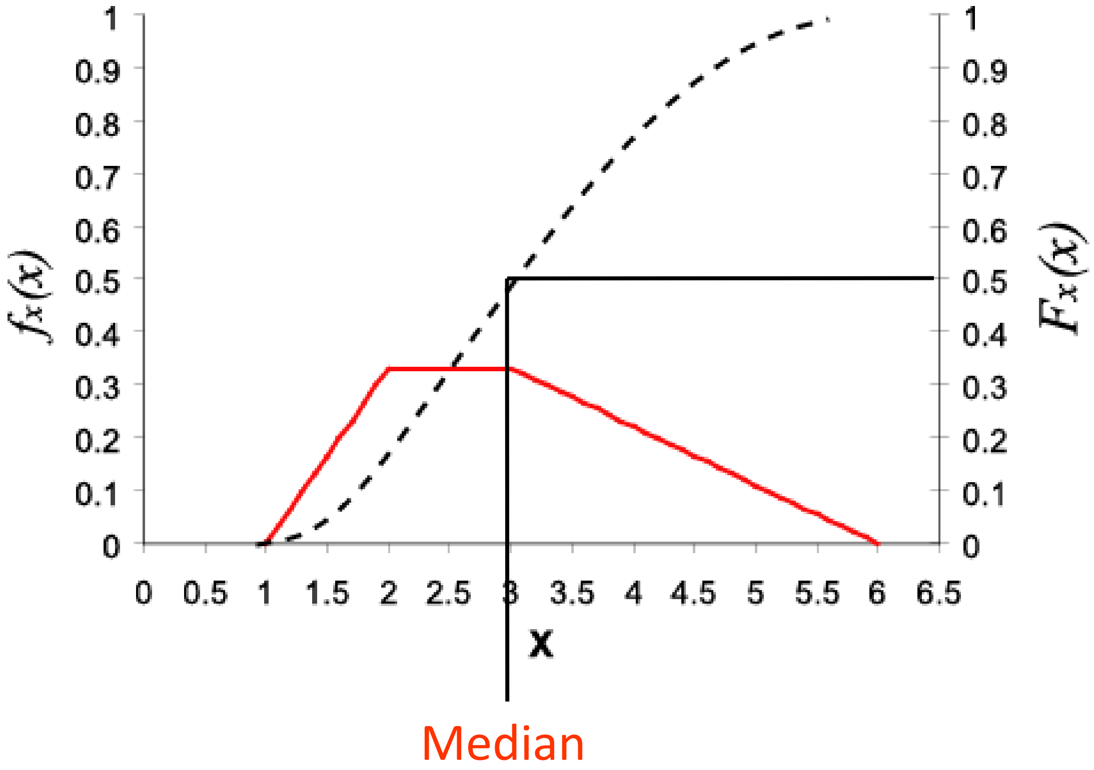
$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ h\cdot\frac{(x-a)}{(b-a)} & a\le x<b \\ h & b\le x<c \\ h\cdot\frac{(x-d)}{(c-d)} & c\le x<d \\ 0 & d\le x \end{cases} \Longrightarrow f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{(x-1)}{3} & 1\le x<2 \\ \frac{1}{3} & 2\le x<3 \\ -\frac{(x-6)}{9} & 3\le x<6 \\ 0 & 6\le x \end{cases}$$

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\cdot dx = \int_1^2 \frac{x\cdot(x-1)}{3}dx + \int_2^3 \frac{x}{3}\cdot dx + \int_3^6 \frac{-x\cdot(x-6)}{9}dx = 3.11$$

Aufgabe 4.2

d) Berechne den Wert des Medians.

grafisch anhand der kumulativen Dichtefunktion

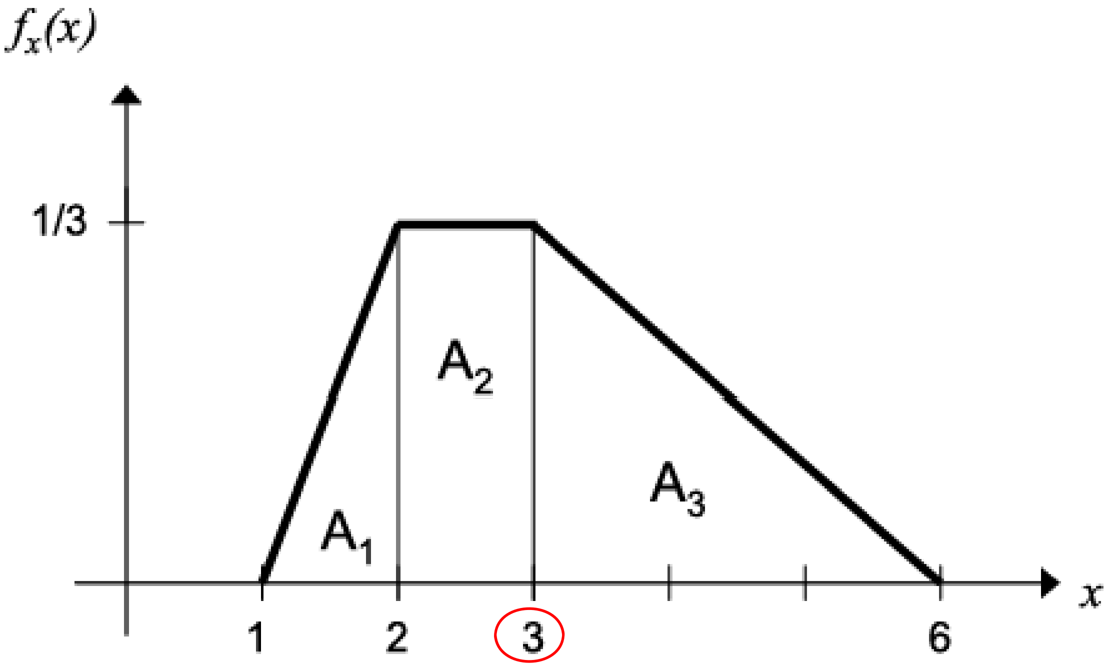


analytisch

$$P(X \leq x) = \int_1^x f_X(x)\, dx = 0.5$$

Aufgabe 4.2

e) Ermittle grafisch den Medianwert aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.



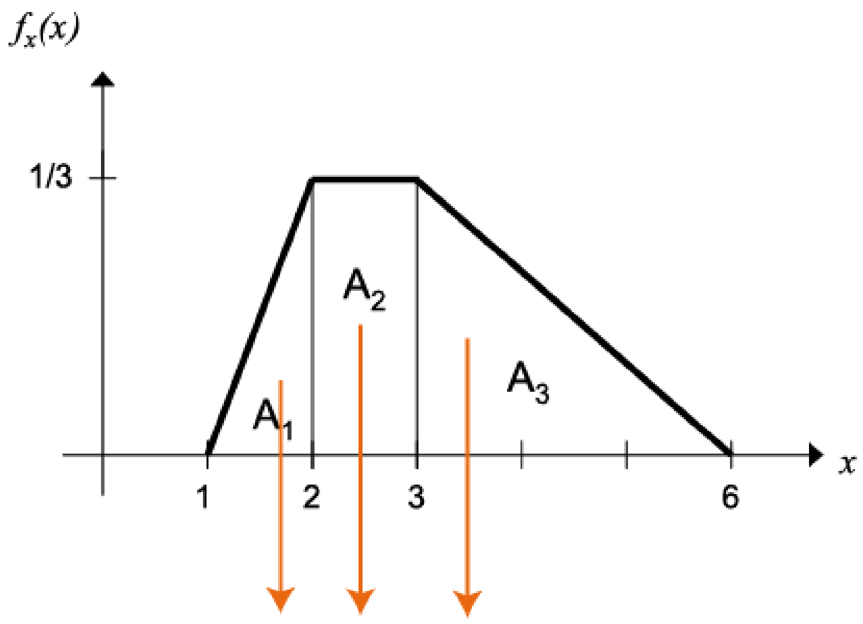
$$\left.\begin{array}{l} A_1 = (2-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ A_2 = (3-2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} 0.5$$

$$A_3 = (6-3)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Median: Punkt P auf der X-Achse, bei welchem die Fläche der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Intervall [0,P] gleich 0.5 ist.

Aufgabe 4.2

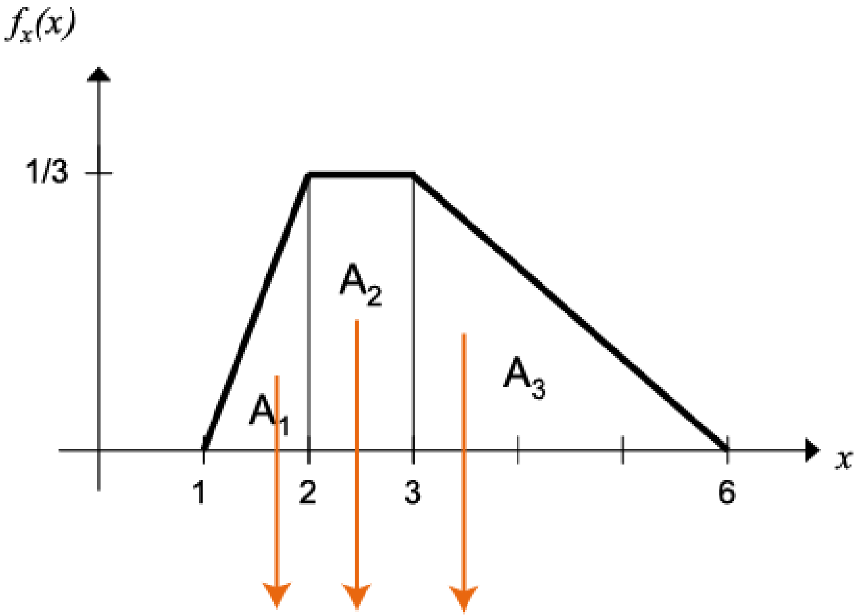
e) Diskutieren Sie wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.



Der Mittelwert ist der Schwerpunkt der Figur der Wahrscheinlichkeitsdichte-funktion.

Aufgabe 4.2

e) Diskutieren Sie wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.



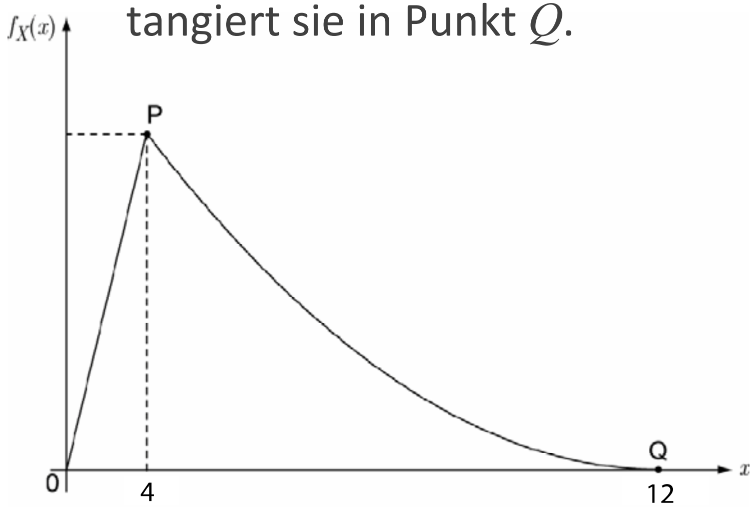
Der Mittelwert ist der Schwerpunkt der Figur der Wahrscheinlichkeitsdichte-funktion.

$$x_s = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

$$x_s = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\left(\frac{2}{3}+1\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\frac{1}{3}+(1+3)\cdot\frac{1}{2}}{1} = 3.11$$

Aufgabe 4.3 (Gruppenaufgabe)

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in Abbildung 4.3.1 dargestellt. In dem Intervall $[0, 4]$ ist die Funktion linear.
In dem Intervall $[4, 12]$ nähert sich die Funktion parabelförmig der x-Achse und tangiert sie in Punkt Q.



a) Berechne die Koordinaten des Punktes $P(x,y)$ und beschreibe die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

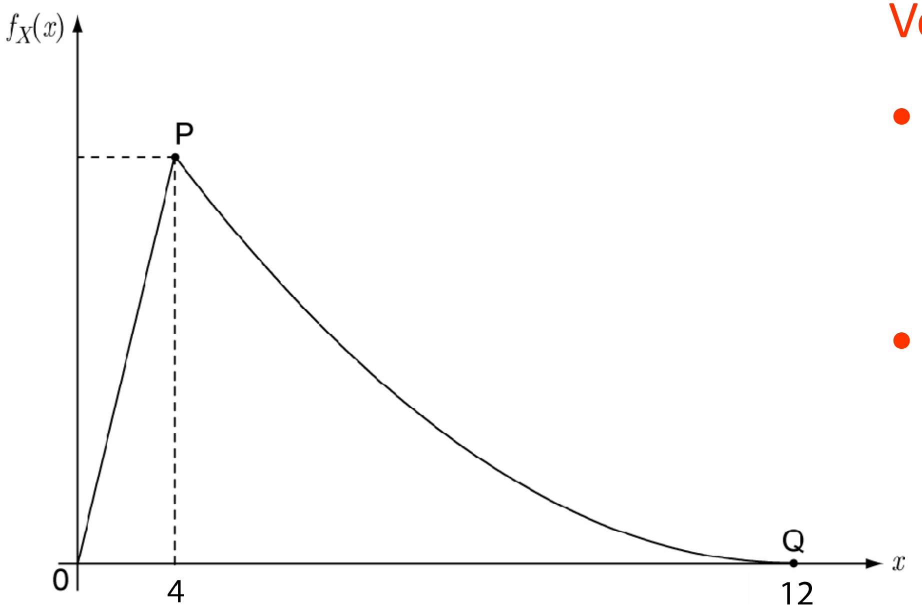
b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

c) Berechne den Mittelwert der Zufallsvariablen X.

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P\,[X>4]$.

Aufgabe 4.3 (Gruppenaufgabe)

a) Berechne die Koordinaten des Punktes $P(x,y)$ und beschreibe die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

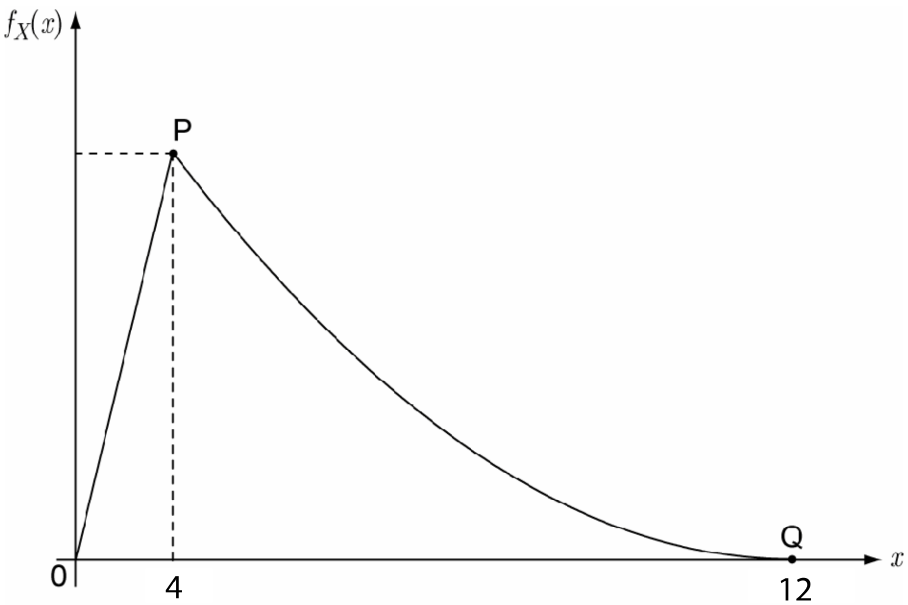


Vorgehensweise:

- Definiere die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über dem Intervall [0,12].
- Ermittle die Koordinaten des Punktes P (Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist immer gleich 1).

Aufgabe 4.3 (Gruppenaufgabe)

b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.



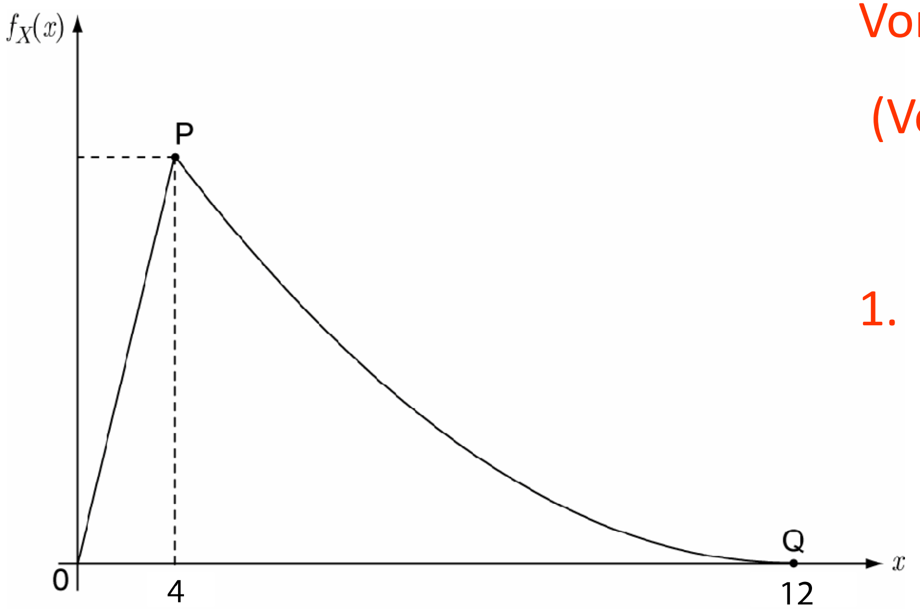
Vorgehensweise:

1. $$\int_{\Omega} f_X(x)dx = 1$$

2. Zeichne…

Aufgabe 4.3 (Gruppenaufgabe)

c) Berechne den Mittelwert der Zufallsvariablen X.



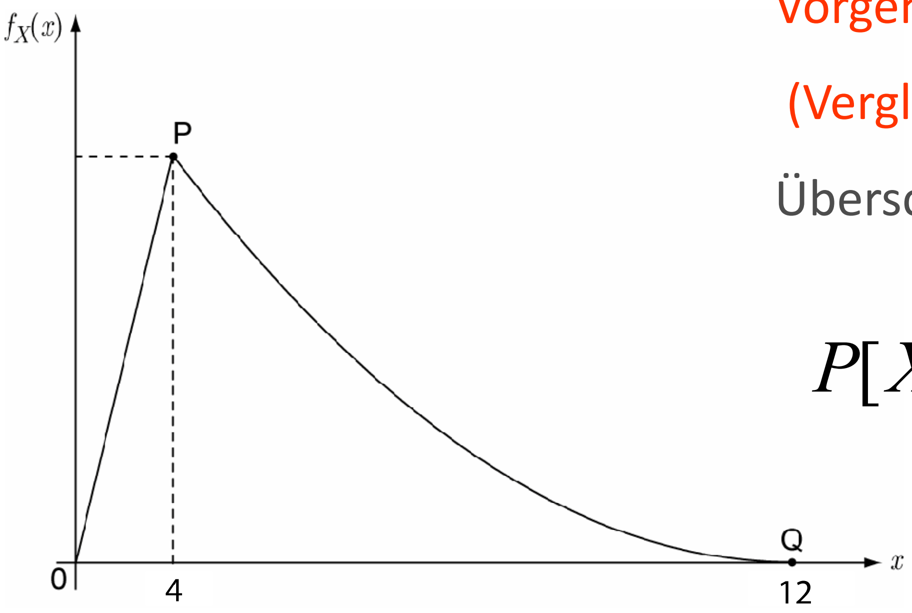
Vorgehensweise:

(Vergleiche Aufgabe 4.2)

1. $\mu_x = E\left[x\right]$

Aufgabe 4.3 (Gruppenaufgabe)

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P\,[X>4]$.



Vorgehensweise:

(Vergleiche Aufgabe 4.2)

Überschreitungswahrscheinlichkeit $P[X>\alpha]$ ist

$$P[X>4] = 1 - P[X \leq 4]$$

Wie kann diese Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden?