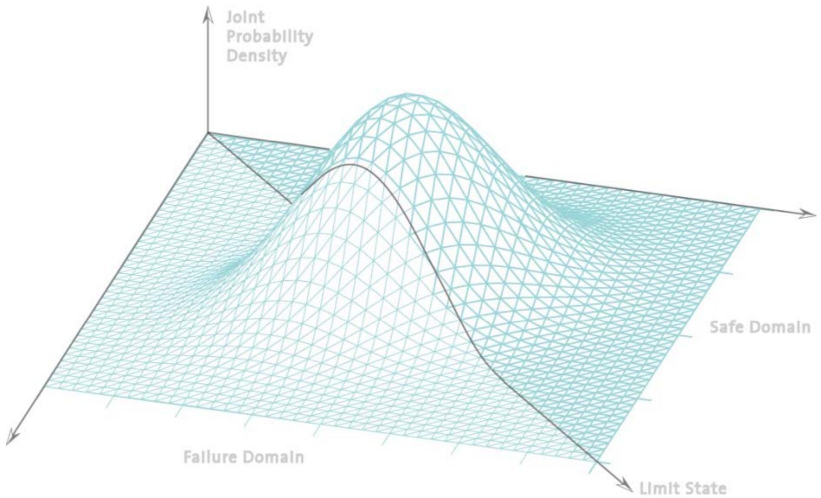


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 5

1. Teilprüfung am Donnerstag 10. April

Inhalt:

- Multiple Choice + 1 Übung zum Rechnen
- Stoff der Vorlesung bis und mit **1. April**, der Übungen bis und mit **3. April** und des Skripts bis und mit Kapitel 6 (Rechenaufgabe: etwas was wir an den Übungen bereits ähnlich gerechnet haben)
- Oder anders gesagt: Ganzer Stoff der Vorlesungen 1 bis 6, Übungen 1 bis 6, und bis und mit Kapitel 6 im Skript.

Beitrag an die Note für das 1. BcS:

- 2 Teilprüfungen: 1/3 (beide Teilprüfungen zusammen)
- Basisprüfung: 2/3
- Zusammen 3/3 = Note in Statistik

Obligatorisch! Ärztliches Zeugnis oder Militärschein bei Nichterscheinen notwendig! Ansonsten Note 1 ☹.

1. Teilprüfung am Donnerstag 10. April

Ort und Zeit:

- Start 8:15 (Einlass früher, bitte auf Assistierende warten), Ende 9:45
- Studierende **A - Ky** im **HCI G 3**
- Studierende **La - Z** im **HIL E 4**

Erlaubte Hilfsmittel:

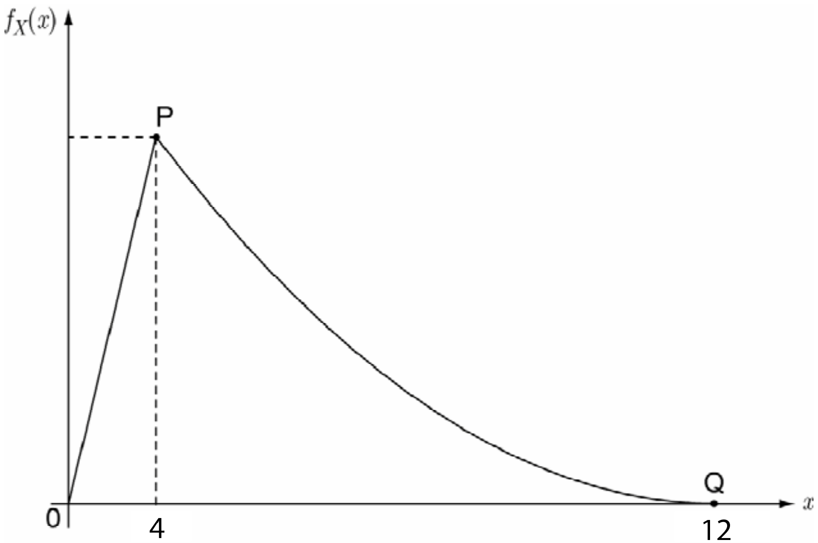
- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt, auch programmierbare.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

Hinweise:

- Jede Studentin/jeder Student erhält ein Couvert mit seinem Namen drauf, darin die Aufgabenblätter und ein kariertes+gestempeltes Blatt für die Lösung der Rechenaufgabe.
- Legi mitnehmen!
- Vor 9:15 fertig: dürft euch melden und hinausgehen.
- Danach warten bis die Prüfung zu Ende ist (9:45).

Aufgabe 4.3 Gruppenaufgabe

In der Grafik ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariable dargestellt. Innerhalb des Intervalls [0;4] ist die Funktion linear und zwischen [4;12] nähert sich die Funktion parabelförmig an die x-Achse an und tangiert sie in Punkt Q.



a) Berechne die Koordinaten von $P\ (x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

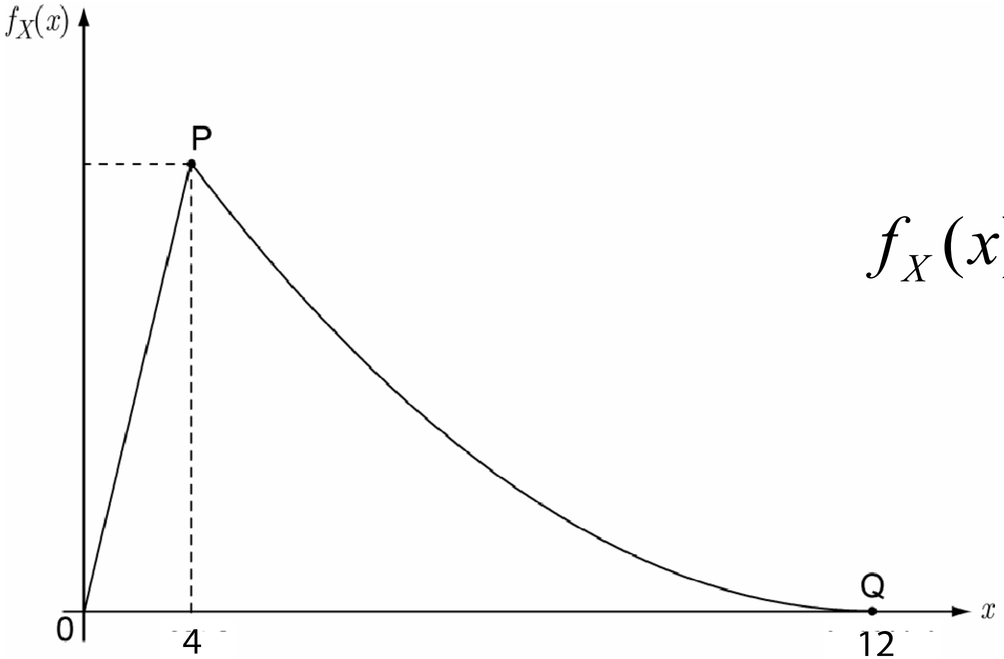
c) Berechne den Mittelwert von X.

d) Berechne $P[X>4]$.

Aufgabe 4.3 – Lösung

a) Berechne die Koordinaten von $P\ (x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall [0;12]:



$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Aufgabe 4.3 – Lösung

a) Berechne die Koordinaten von *P (x,y)* und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall [0;12]:

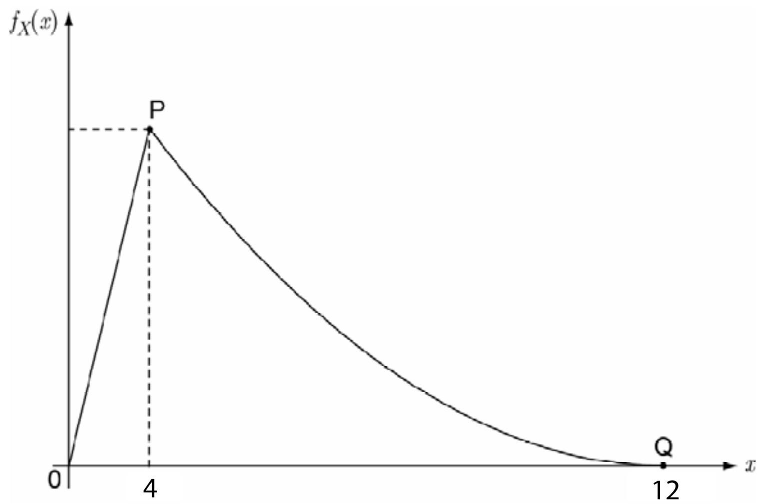
$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \le 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \le 12) \\ 0 & (sonst) \end{cases}$$

Berechnung der Koordinaten (Fläche unter der Funktion immer = 1!!):

$$4a = k(4-12)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{16}a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^4 axdx + \int_4^{12} k(x-12)^2\,dx = 1$$

$$a = \frac{3}{56} \qquad k = \frac{3}{896}$$



Aufgabe 4.3 – Lösung

a) Berechne die Koordinaten von $P\ (x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall [0;12]:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Berechnung der Koordinaten (Fläche unter der Funktion immer = 1!!):

$$4a = k(4-12)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{16}a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^4 axdx + \int_4^{12} k(x-12)^2 dx = 1$$

$$a = \frac{3}{56} \qquad k = \frac{3}{896}$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Aufgabe 4.3 – Lösung

a) Berechne die Koordinaten von $P\ (x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall [0;12]:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Berechnung der Koordinaten (Fläche unter der Funktion immer = 1!!):

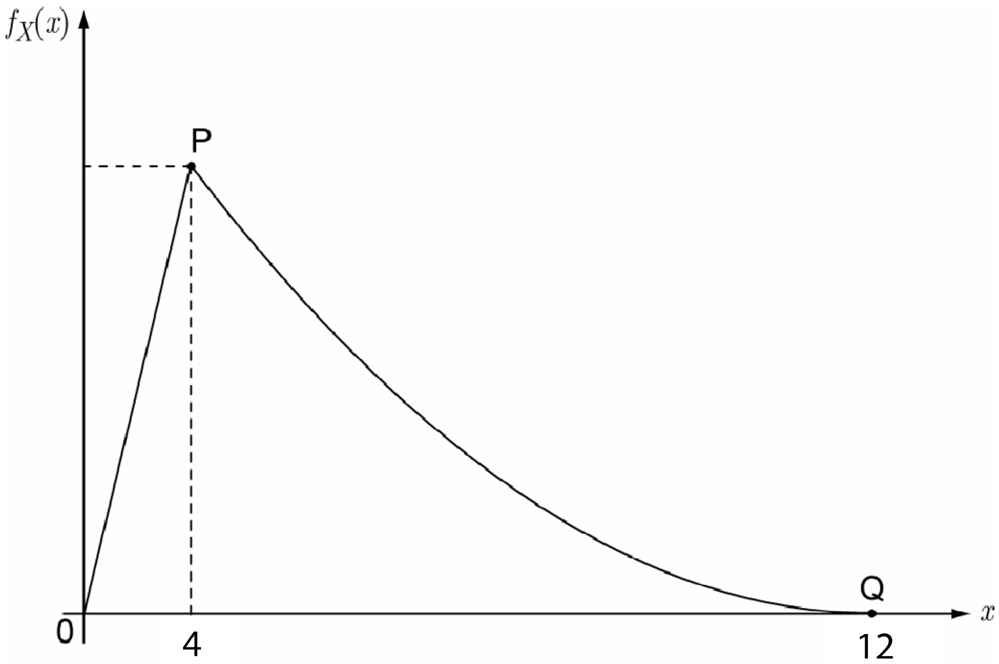
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \quad \xrightarrow{(x=4)} \quad P = \frac{3}{56} \cdot 4 = \frac{3}{14}$$

Aufgabe 4.3 – Lösung

b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

1. Schritt: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{3}{112}x^2 & (0 < x \leq 4) \\ \frac{(x-12)^3}{896}+1 & (4 < x \leq 12) \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$

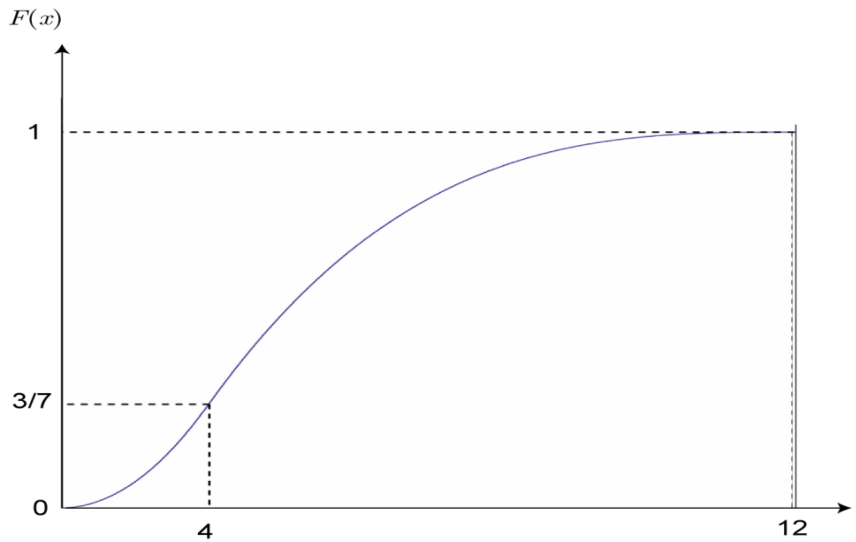
Aufgabe 4.3 – Lösung

b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

1. Schritt: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

2. Schritt: Zeichne F_X



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{3}{112}x^2 & (0 < x \leq 4) \\ \frac{(x-12)^3}{896}+1 & (4 < x \leq 12) \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$

Aufgabe 4.3 – Lösung

c) Berechne den Mittelwert von X.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \le 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \le 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

1. Schritt (vergleiche Übung 4.2):

$$\mu_X = E\left[X\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_X = \int_0^{12} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{56} x dx + \int_4^{12} x \cdot \frac{3}{896}(x-12)^2 dx = \frac{32}{7}$$

Aufgabe 4.3 – Lösung

d) Berechne $P[X>4]$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \le 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \le 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \frac{3}{112}x^2 & (0 < x \le 4) \\ \frac{(x-12)^3}{896}+1 & (4 < x \le 12) \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$

Zur Erinnerung:

Die Auftretenswahrscheinlichkeit von $P[X>\alpha]$ entspricht $1\text{-}P[X\le\alpha]$.

$$P[X > 4] = 1 - P[X \le 4] = 1 - F_X(4)$$

$$P[X > 4] = 1 - P[X \le 4]$$

$$= 1 - \int_0^4 \frac{3}{56} x dx = 1 - \left[\frac{3}{112}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{7}$$

Aufgabe 5.1

Die marginale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer zwei-dimensionalen Zufallsvariablen $Z = (X,Y)^T$ ist wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot (2y - y^2) & \text{für } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y entspricht $\rho_{XY} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X, 4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X - 4Y + 2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

Die marginale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $Z=(X,Y)^T$ ist wie folgt definiert:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \textit{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \textit{für } 0\le y\le 2\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}$$

Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y entspricht $\rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

zur Erinnerung...

Skript:
Gleichungen D.16 & D.18

Erwartungswertoperator:

$$E[c] = c$$
$$E[cX] = cE[X]$$
$$E[a + bX] = a + bE[X]$$
$$E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

Varianzoperator:

$$Var[c] = 0$$
$$Var[cX] = c^2 Var[X]$$
$$Var[a + bX] = b^2 Var[X]$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \text{für } 0\le y\le 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X und Y $\rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$E[a+bX]=a+bE[X]\qquad E[g_1(X)+g_2(X)]=E[g_1(X)]+E[g_2(X)]$$

$$E[6X-4Y+2]=6E[X]-4E[Y]+2=....$$

???? Berechnung des Erwartungswertes von X und Y.

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & sonst\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \text{für } 0\le y\le 2\\ 0 & sonst\end{cases}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X und Y $\quad \rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Berechnung *E[X]* und *Var[X]*

Skript:
Gleichungen D.5-D.11

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{2}dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=0$$

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\frac{1}{3}$$

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$

b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$

c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \text{für } 0\le y\le 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X und Y $\rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Berechnung *E[Y]* und *Var[Y]*

Skript: Gleichungen D.5-D.11

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_y(y)dy=\int_0^2 y\cdot\frac{3}{4}(2y-y^2)dy=\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot y^3-\frac{y^4}{4}\right]_0^2=1$$

$$Var(Y)=E\left[Y^2\right]-\left(E\left[Y\right]\right)^2=\frac{1}{5}$$

$$E\left[Y^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot f_Y(y)dy=\int_0^2 y^2\cdot\frac{3}{4}(2y-y^2)dx=\frac{3}{4}\left[\frac{y^4}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{6}{5}$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \textit{für}\ -1\le x\le 1\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \textit{für}\ 0\le y\le 2\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X und Y $\quad \rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Im Anschluss an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz beider Variablen werden die Eigenschaften der jeweiligen Operatoren verwendet:

Skript:
Gleichungen D.16-D.18

a) $E[6X-4Y+2]$

$$E\left[a+bX\right]=a+bE\left[X\right]$$

$$E[6X-4Y+2]=6E[X]-4E[Y]+2=6\cdot 0-4\cdot 1+2=-2$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$

b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$

c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \text{für } 0\le y\le 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X und Y $\quad \rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Im Anschluss an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz beider Variablen werden die Eigenschaften der jeweiligen Operatoren verwendet:

Skript: Gleichungen D.16-D.18 + D.23

b) $$Cov[6X,4Y]=6\cdot 4\cdot Cov[X,Y]=24\cdot\sqrt{\frac{1}{45}}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\cdot\sqrt{Var[Y]}}\ \Longrightarrow\ Cov[X,Y]=\rho_{XY}\cdot\sqrt{Var[X]\cdot Var[Y]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1}{45}}$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$

b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$

c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & sonst\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot(2y-y^2) & \text{für } 0\le y\le 2\\ 0 & sonst\end{cases}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X und Y $\rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Im Anschluss an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz beider Variablen werden die Eigenschaften der jeweiligen Operatoren verwendet:

Skript: Gleichungen D.16-D.18 + D.23

c) $$Var[6X-4Y+2]=Var[6X]+Var[4Y]-2\cdot Cov[6X,4Y]$$

Zufallsvektoren und Produktmomente

Skript: Gleichungen D.24 und D.25

Zufallsvektor

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$$

Lineare Funktion des Zufallsvektors

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Erwartungswert und Varianz der linearen Funktion Y

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j C_{X_i X_j}$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$

b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X, 4Y)$

c) Berechne die Varianz $6X - 4Y + 2$

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$

Im Anschluss an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz beider Variablen werden die Eigenschaften der jeweiligen Operatoren verwendet:

Skript:
Gleichungen D.16-D.18
+ D.25

c) $$Var[6X - 4Y + 2] = Var[6X] + Var[4Y] - 2 \cdot Cov[6X, 4Y]$$

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j C_{X_i X_j}$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

Im Anschluss an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz beider Variablen werden die Eigenschaften der jeweiligen Operatoren verwendet:

Skript:
Gleichungen D.16-D.18
+ D.25

c) $$Var[6X-4Y+2]=Var[6X]+Var[4Y]-2\cdot Cov[6X,4Y]$$

$$Var[6X-4Y+2]=Var[6X]+Var[4Y]-2\cdot Cov[6X,4Y]$$

$$\Updownarrow$$

$$Var[6X-4Y+2]=\left[6^2 Var[X]\right]+\left[(-4)^2 Var[Y]\right]-2\left[6\cdot 4\cdot Cov[X,Y]\right]$$

$$=\left[6^2\cdot\frac{1}{3}\right]+\left[(-4)^2\cdot\frac{1}{5}\right]-2\left[24\cdot\sqrt{\frac{1}{45}}\right]=8.0446$$

$$Y=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$$

$$E[Y]=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\,E[X_i]$$

$$Var[Y]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2Var[X_i]+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}a_ia_jC_{X_iX_j}$$

Aufgabe 5.1

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz von $Cov(6X,4Y)$
c) Berechne die Varianz $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

Im Anschluss an die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz beider Variablen werden die Eigenschaften der jeweiligen Operatoren verwendet:

Skript: Gleichungen D.16-D.18

d) $$E[6X^2-4Y^2]=6\cdot E[X^2]-4\cdot E[Y^2]$$

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \qquad E\left[Y^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Aufgabe 5.2

An einer Wetterstation werden seit vielen Jahren Messungen vorgenommen.

Vor einigen Jahren wurde ein neues, genaueres Gerät angeschafft. Danach wurden die Messungen sowohl mit dem alten wie auch mit dem neuen Gerät durchgeführt. Wir interessieren uns nun für den Zusammenhang zwischen der Messung des genauen und der Messung des weniger genauen Messgeräts.

Aufgrund der Messungen lassen sich die multivariaten Wahrscheinlichkeiten angeben.

Aufgabe 5.2

Die Tabelle zeigt die multivariate Wahrscheinlichkeit der Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert überschreitet, für beide Geräte.

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

N_G zeigt darin die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem genauen Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

N_U zeigt die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem ungenaueren Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

Aufgabe 5.2

Es wurden Windgeschwindigkeiten mit zwei unterschiedlich genauen Messgeräten erfasst.

Für beide Geräte liegt die multivariate Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Tage pro Jahr vor, an denen ein Grenzwert überschritten wird.

N_U zeigt darin die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem genauen Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

N_G zeigt die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem ungenaueren Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

Aufgabe 5.2

Aufgabenstellung

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen Überschreitungen des Grenzwertes von beiden Geräten gemessen wurden, entspricht.

b) Es gilt nun die Annahme, dass das genaue Geräte immer die exakte Windgeschwindigkeit misst.
Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Windgeschwindigkeit den Grenzwert innerhalb eines Jahres 0, 1, 2 und 3 mal überschreitet, wenn die Angaben des ungenaueren Messgeräts den Grenzwert 2 mal übersteigen?

Aufgabe 5.2 – Lösung

N_U zeigt darin die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem genauen Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

N_G zeigt die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem ungenaueren Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

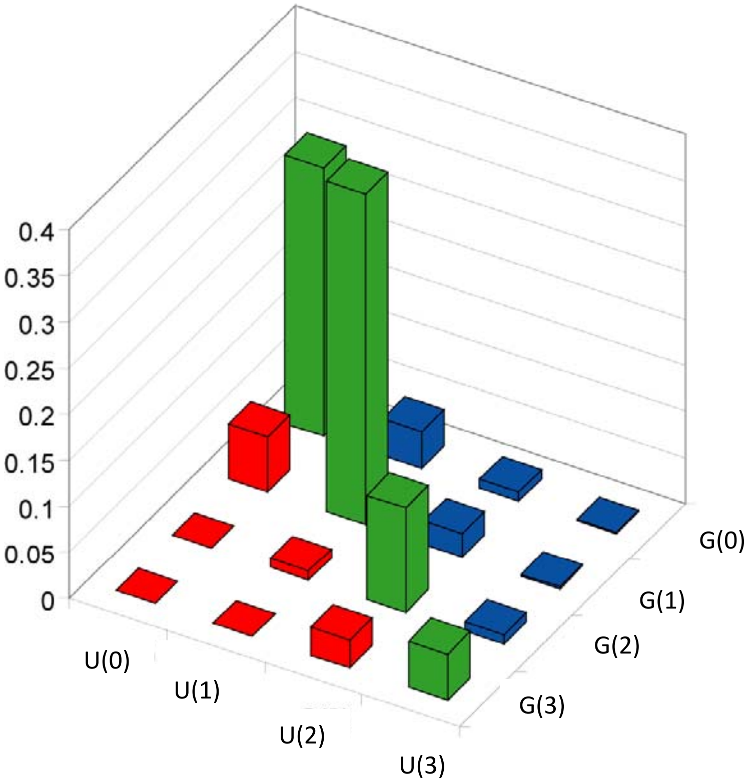
	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen Überschreitungen des Grenzwertes von beiden Geräten gemessen wurden, entspricht.

$$P[N_U = N_G] = 0.2910 + 0.3580 + 0.1135 + 0.0505 = 0.813$$

Aufgabe 5.2 – Lösung

Diskrete multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion



Wahrscheinlichkeit, dass $N_U = N_G$

$$P[N_G = N_U] = 0.2910 + 0.3580 + 0.1135 + 0.0505 = 0.813$$

Wahrscheinlichkeit, dass $N_U < N_G$

$$P[N_G < N_U] = 0.04 + 0.01 + 0.0005 + 0.0250$$
$$+0.0015 + 0.01 = 0.087$$

Wahrscheinlichkeit, dass $N_U > N_G$

$$P[N_G > N_U] = 0.06 + 0 + 0.01 + 0 + 0 + 0.03 = 0.1$$

Aufgabe 5.2 – Lösung

b) Es gilt nun die Annahme, dass das genaue Geräte immer die exakte Windgeschwindigkeit misst.
Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Windgeschwindigkeit den Grenzwert innerhalb eines Jahres 0, 1, 2 und 3 mal überschreitet, wenn die Angaben des ungenaueren Messgeräts den Grenzwert 2 mal übersteigen?

bedingte Wahrscheinlichkeit… Satz von Bayes

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

Aufgabe 5.2 – Lösung

bedingte Wahrscheinlichkeit… Satz von Bayes

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

$$P[N_G \mid N_U = 2] = \frac{P[N_G \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]}$$

$$P[N_G = 0 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 0) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.01}{0.1785} = 0.056$$

auf die gleiche Weise kann der Rest berechnet werden…

Exkurs *(Beispiel)*

Diskrete Zufallsvariablen

Man betrachte zwei Würfel. Das Ergebnis für jeden einzelnen Würfel wird anhand der diskreten Zufallsvariablen X und Y beschrieben.

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen z. B. 10 entspricht.

Die Summe selbst ist wiederum eine Zufallsvariable und so dargestellt werden:

$Z = X + Y$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 10 entspricht, ist???

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	***10***
5	*6*	*7*	*8*	*9*	***10***	*11*
6	*7*	*8*	*9*	***10***	*11*	*12*

Exkurs *(Beispiel)*

Diskrete Zufallsvariablen

Man betrachte zwei Würfel. Das Ergebnis für jeden einzelnen Würfel wird anhand der diskreten Zufallsvariablen X und Y beschrieben.

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen z. B. 10 entspricht.

Die Summe selbst ist wiederum eine Zufallsvariable und so dargestellt werden:

$Z = X + Y$

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	11
6	7	8	9	**10**	11	12

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 10 entspricht, ist:

$$P[Z = 10] = \sum_{i=4}^{6} P(X = i)P(Y = 10 - i)$$

Exkurs *(Beispiel)*

Diskrete Zufallsvariablen

Die Summe selbst ist wiederum eine Zufallsvariable und so dargestellt werden: $Z=X+Y$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 10 entspricht, ist:

$$P[Z=10]=\sum_{i=4}^{6} P(X=i)P(Y=10-i)$$

Für stetige Zufallsvariablen gilt:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	***10***
5	*6*	*7*	*8*	*9*	***10***	*11*
6	*7*	*8*	*9*	***10***	*11*	*12*

Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

Autobahnbrücken müssen während ihrer Lebensdauer gewartet werden. Die Zeitdauer T zwischen den Wartungseinheiten folgt einer Exponentialverteilung mit einem Mittelwert von 10 Jahren . Die Wartungsarbeiten nehmen einen Zeitraum S in Anspruch, die ebenfalls exponentiell verteilt ist und einen Mittelwert von 1/12 Jahren aufweist.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, z.B. $Z=S+T$.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

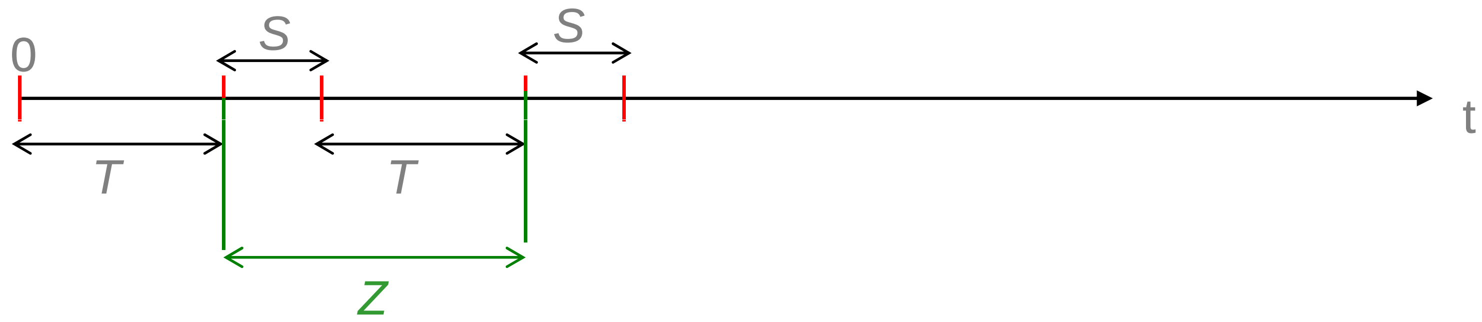
Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

Was ist gegeben???

Die Zeit, in der keine Wartung notwendig ist, T: exponentiell verteilt mit $\mu_T = 10$ *Jahre*.

Zeitraum der Wartungsarbeiten, S: exponentiell verteilt mit $\mu_S = 1/12$ *Jahre*.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, z.B. $Z = S + T$.



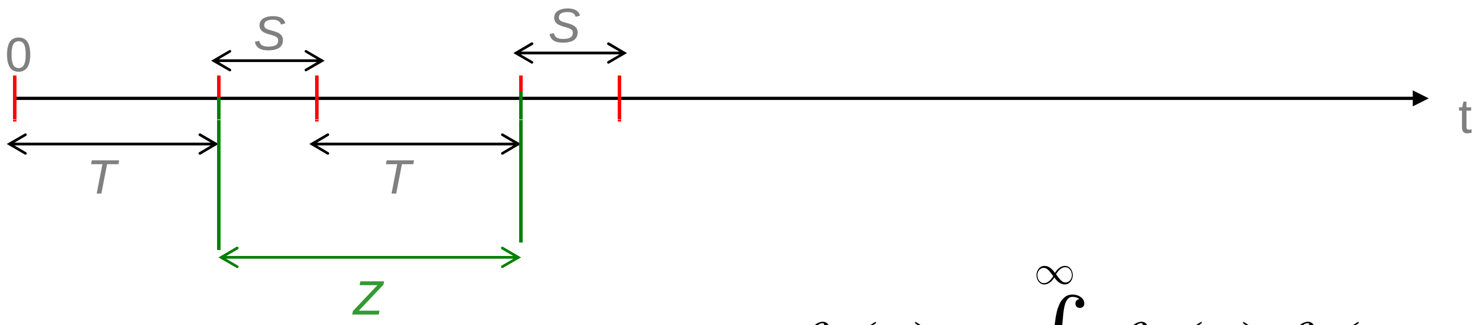
Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

Was ist gegeben???

Die Zeit, in der keine Wartung notwendig ist, T: exponentiell verteilt mit $\mu_T = 10$ *Jahre*.

Zeitraum der Wartungsarbeiten, S: exponentiell verteilt mit $\mu_S = 1/12$ *Jahre*.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, z.B. $Z=S+T$.



Für stetige Zufallsvariablen gilt:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

Was ist gegeben???

Die Zeit, in der keine Wartung notwendig ist, T: exponentiell verteilt mit $\mu_T = 10$ *Jahre*.

Zeitraum der Wartungsarbeiten, S: exponentiell verteilt mit $\mu_S = 1/12$ *Jahre*.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, z.B. $Z = S + T$.

Z ist innerhalb des Intervalls $[0;z]$ definiert.

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}}$$

$$f_Z(z) = \int_0^z f_T(t) f_S(z-t)\,dt = ...$$

$$f_S(s) = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-s}{\mu_S}}$$

Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

$$P(Z \leq 5) = F_Z(z) = ...$$

Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

Wie können wir den Problemansatz formulieren???

Aufgabe 5.3 *"Gruppenaufgabe"*

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

Vielleicht so... "Keine Wartung in den nächsten 5 Jahren."

$$E : \{T_1 > 5\} \cap \{T_2 > 5\}$$

Das wars…

… noch Fragen???