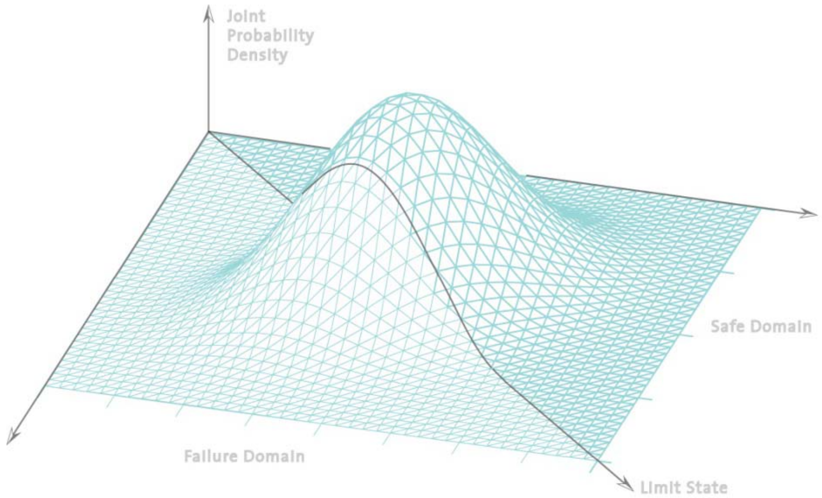


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 11

Organisation der Sprechstunden in den Semesterferien

Kontaktdaten:

Internet: http://www.ibk.ethz.ch/fa/education/ss_statistics

Assistenten:

Eva Sabiote	sabiote@ibk.baug.ethz.ch
Markus Sandomeer	sandomeer@ibk.baug.ethz.ch
Mathias Graf	graf@ibk.baug.ethz.ch
Andreas Kurz	kurz@ibk.baug.ethz.ch

Aufgabe 11.1

Ein Junge will ein Computerspiel kaufen, das erst in Kürze in den Läden erhältlich sein wird. Der Preis des Computerspieles wurde noch nicht bekannt gegeben, aber basierend auf verschiedenen Informationen nimmt er an, dass der Preis durch eine Normalverteilung mit μ = 50 CHF, σ = 10 CHF beschrieben werden kann.
Der Junge verfügt momentan über 20 CHF, und er erwartet, dass er bis zum Erscheinen des Computerspieles noch Taschengeld von seinen Eltern bekommt. Er geht davon aus, dass der Taschengeldbetrag durch eine Normalverteilung mit μ = 20 CHF, σ = 5 CHF beschrieben werden kann.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

Aufgabe 11.1

Stelle die “Grenzzustandsfunktion” auf.

Preis des Computerspieles: Zufallsvariable X
Taschengeld: Zufallsvariable Y

Z sei eine weitere Zufallsvariable und ist wie folgt definiert:

$$Z = 20 + Y - X$$

Wenn $Z > 0$, dann kann er das Computerspiel kaufen, sonst nicht.

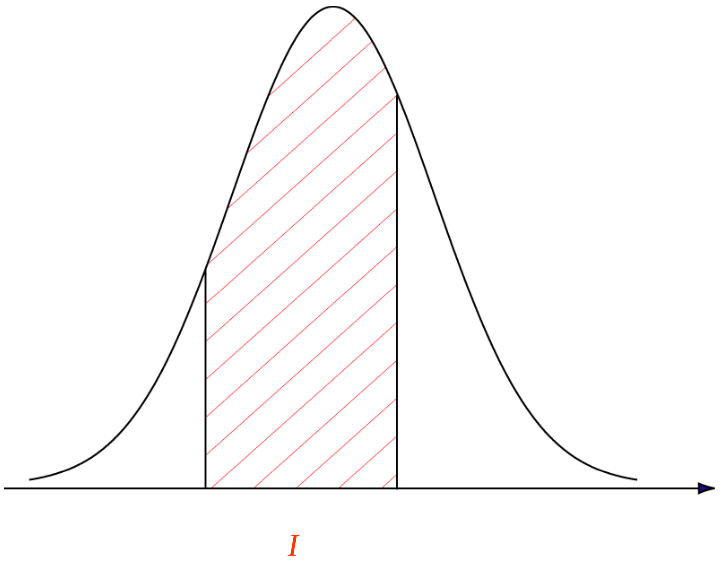
Folglich kann die Wahrscheinlichkeit, dass er das Videospiel nicht kaufen kann, wie folgt beschrieben werden:

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

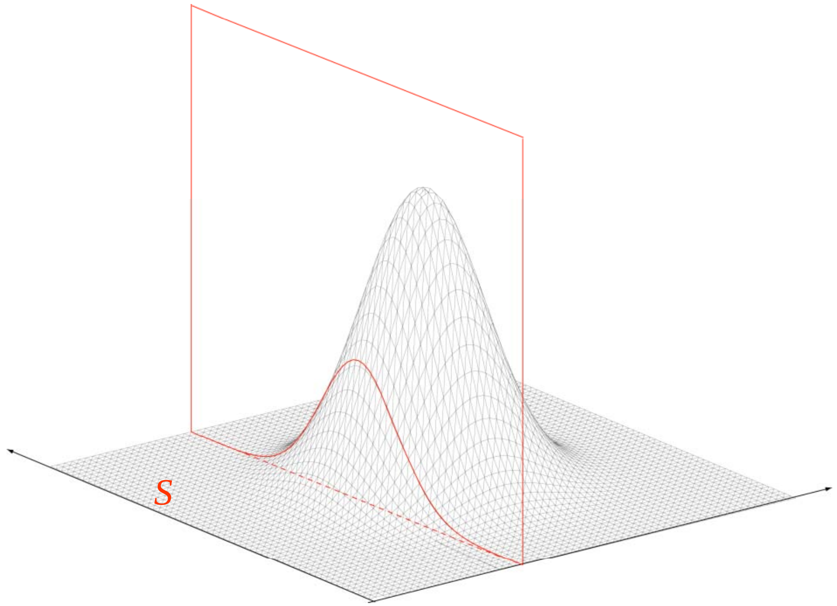
Das Problem: Wie bestimme ich diese Wahrscheinlichkeit?

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

… durch Integration:



$$P[X \in I] = \int_I f_X(x)dx$$



$$P[\mathbf{X} \in S] = \int_S f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über den entsprechenden Abschnitt integriert wird.

Aufgabe 11.1

Vor dem Integrieren wird die Grenzzustandsfunktion mit den standardnormal verteilten Variablen transformiert:

$$X \sim N(50,10) \qquad \longrightarrow \qquad X = 50 + 10U, \quad U \sim N(0,1)$$

$$Y \sim N(20,5) \qquad \qquad Y = 20 + 5V, \quad V \sim N(0,1)$$

Die Grenzzustandsfunktion lautet demzufolge:

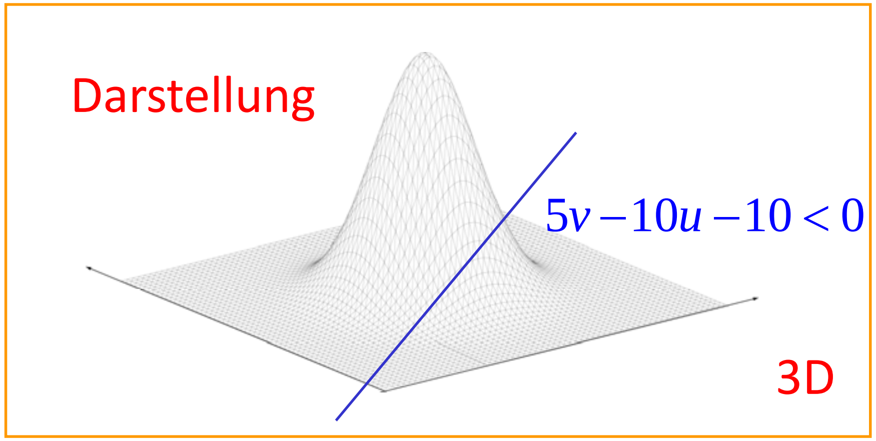
$$\begin{aligned} Z &= 20 + Y - X \\ &= 20 + (20 + 5V) - (50 + 10U) \\ &= 5V - 10U - 10 \end{aligned}$$

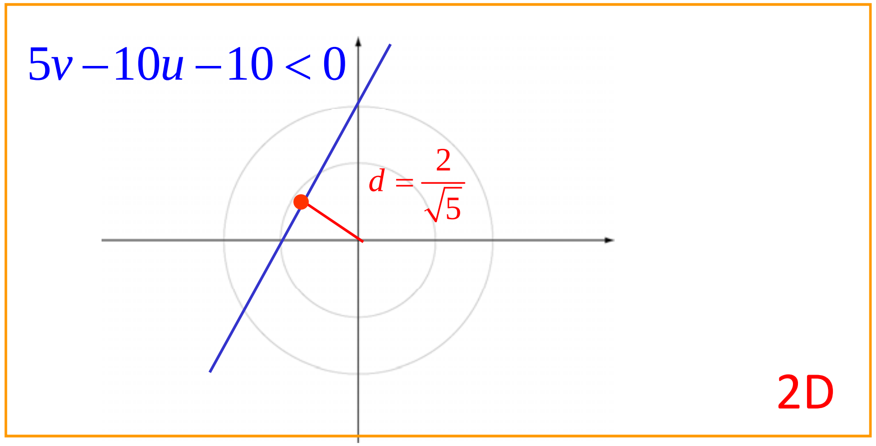
Wir suchen jedoch die Wahrscheinlichkeit:

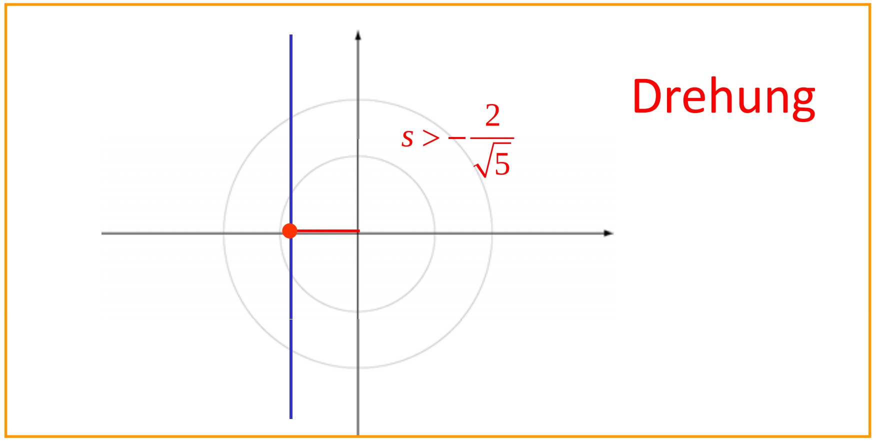
$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0]$$

Aufgabe 11.1

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)dudv$$



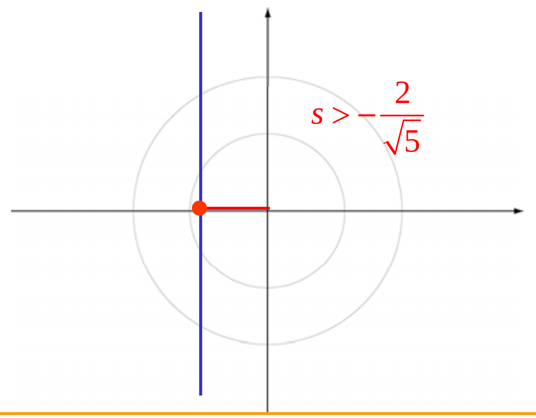




d ist kürzester Abstand zum Ursprung

Aufgabe 11.1

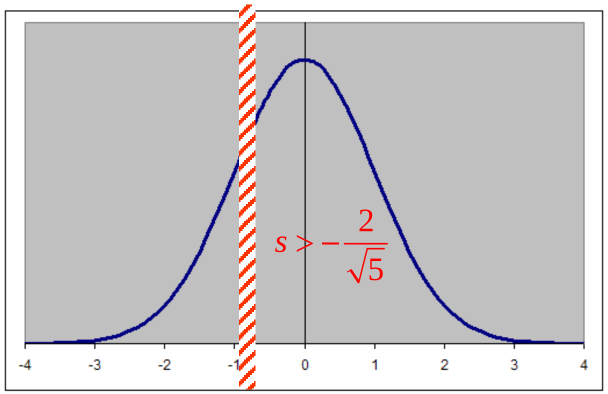
$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)dudv$$



Drehung

Integration

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{-2/\sqrt{5}}^{\infty} \phi(s)ds$$
$$= 1 - \Phi(-2/\sqrt{5})$$
$$= 0.89$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird beträgt 0.89.

Aufgabe 11.1

Das Ziel ist, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses(ausgedrückt mit der Grenzzustandsfunktion) zu berechnen.

1) Grenzzustandsfunktion mit standardnormalverteilter Zufallsvariable transformieren (das ist erlaubt, da eine lineare Funktion einer normalverteilten Variable ebenfalls normalverteilt ist).

2) Achsen drehen (das ist erlaubt, weil die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer normalverteilten Variable symmetrisch ist).

3) Wahrscheinlichkeit berechnen (das ist möglich, weil die Grenzzustandsfunktion linear ist).

✓Was wäre wenn eine Zufallsvariable nicht normalverteilt ist?
-> Wird im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt.
✓Was wäre wenn die Grenzzustandsfunktion nicht linear ist?
-> das wird im Folgenden gelöst…

Aufgabe 11.2

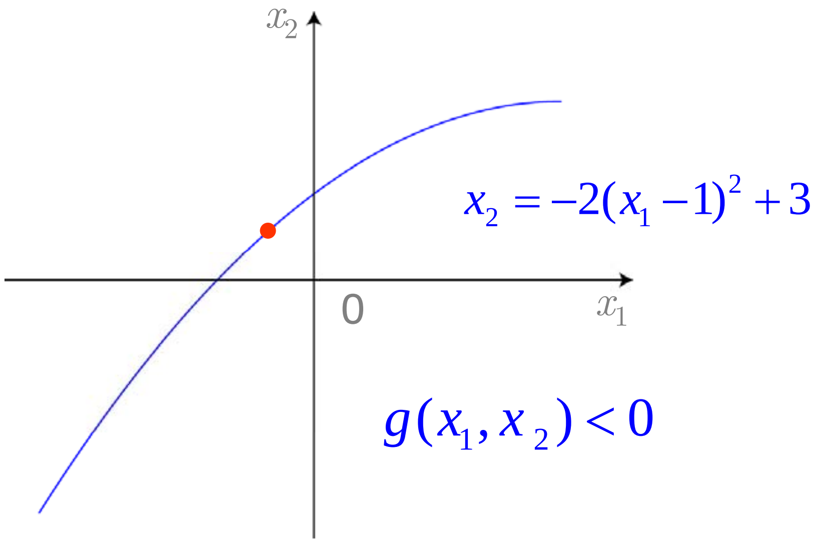
Wie in der Aufgabe 11.1 ersichtlich, kann die Versagenswahrscheinlichkeit durch eine Grenzzustandsfunktion beschrieben werden. Seien X_1 und X_2 durch eine Standardnormalverteilung beschrieben, und die Grenzzustandsfunktion sei beschrieben als:

$$g(X_1, X_2) = 2(X_1 - 1)^2 + X_2 - 3$$

Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit: $P[g(X_1, X_2) < 0]$

Aufgabe 11.2

Gebiet des Integrals



Linearisieren der Grenzzustandsfunktion

In welchem Punkt???

In dem Punkt auf g, der den geringsten Abstand zum Nullpunkt aufweist.

Warum???

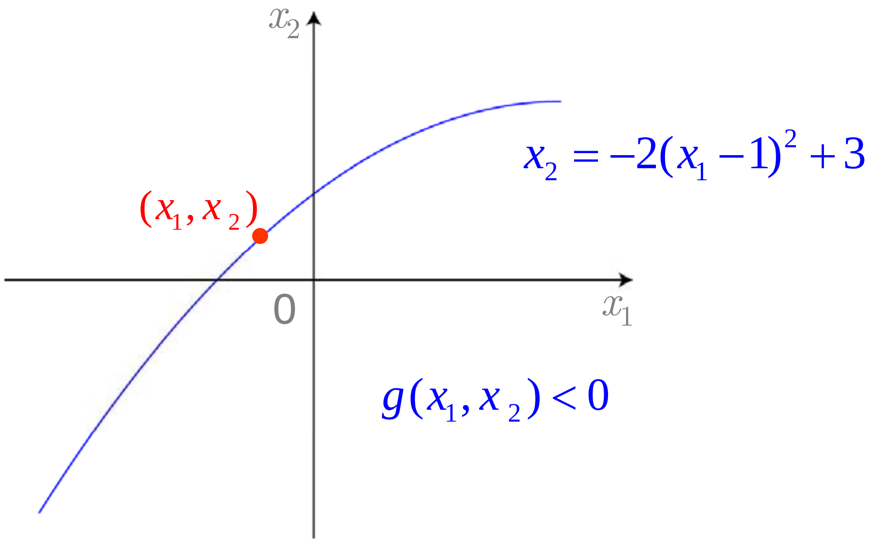
Weil die Wahrscheinlichkeit in diesem Punkt am meisten zur tatsächlichen gesamten Wahrscheinlichkeit beiträgt.

Linearisieren (Taylor-Entwicklung erster Ordnung) wird in demjenigen Punkt auf g durchgeführt, der den geringsten Abstand zum Nullpunkt aufweist.

Wie kann dieser Punkt bestimmt werden?

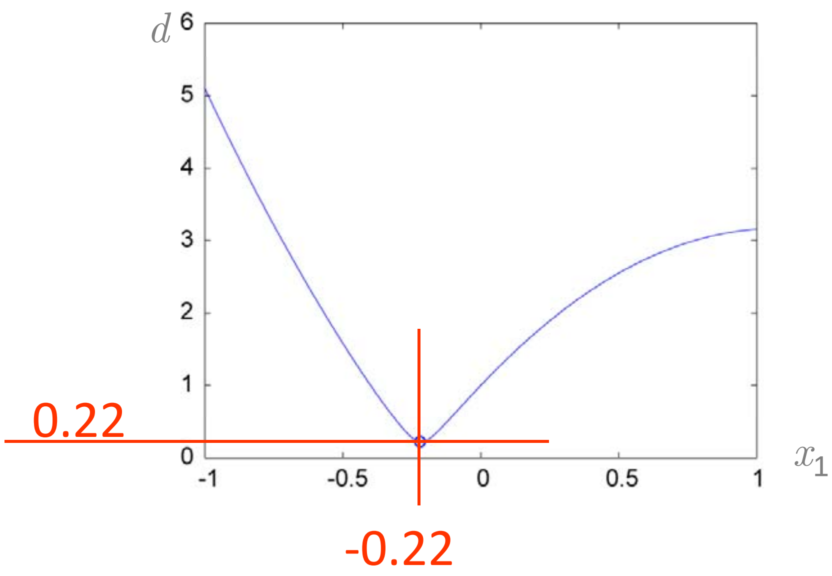
Aufgabe 11.2

Ein einfaches Vorgehen:



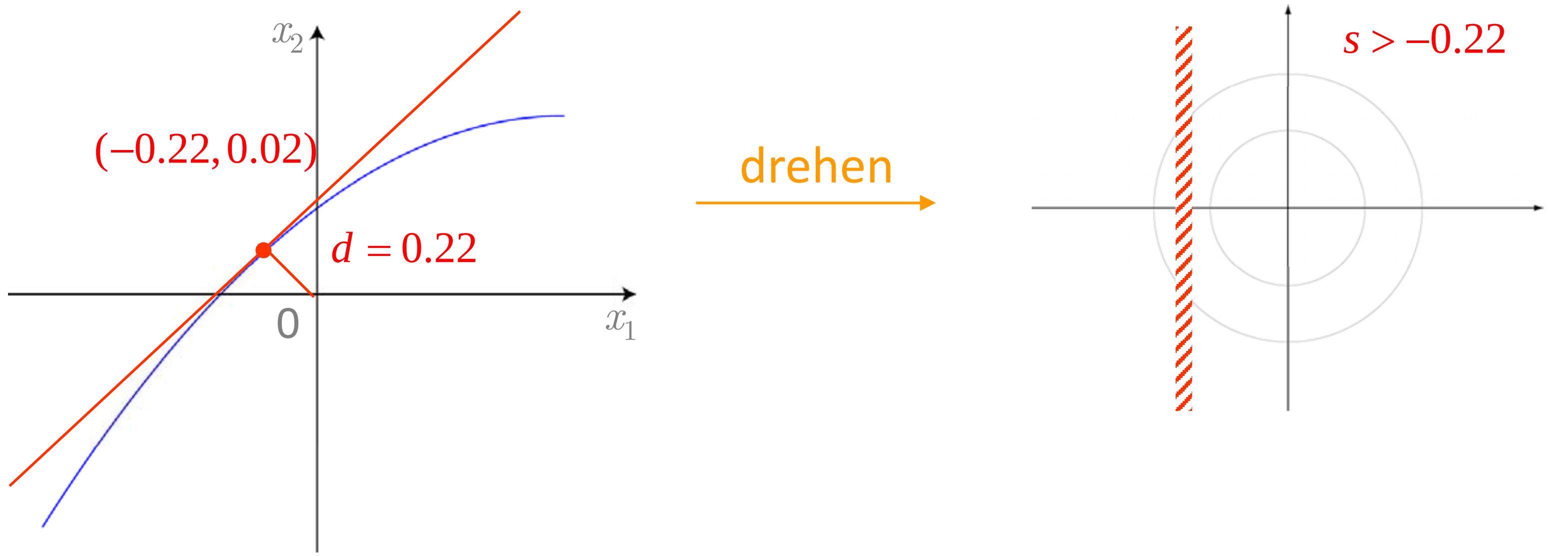
Der Abstand zwischen (x_1,x_2) und (0,0):

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + \left(-2(x_1-1)^2+3\right)^2}$$



Aufgabe 11.2

Man bestimmt den nächsten Punkt und dessen Abstand zum Nullpunkt.

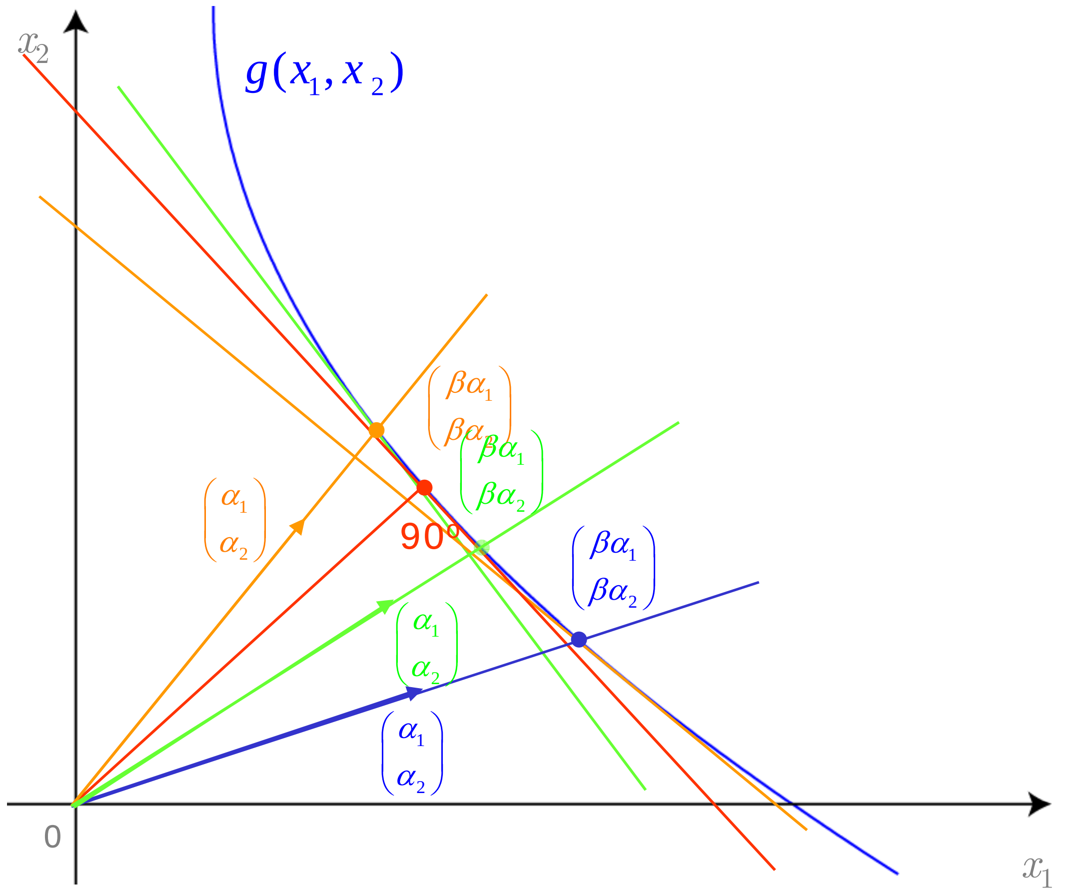


$$
\begin{aligned}
P[g(X_1, X_2) < 0] &= P[S > -0.22] \\
&= 1 - \Phi(-0.22) \\
&= 0.587
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.2

Eine andere Art: FORM

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\[2mm]\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

Aufgabe 11.2

Vorgehen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 4x_1 - 4 = 4\beta\alpha_1 - 4 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \end{cases}$$

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow 2(\beta\alpha_1 - 1)^2 + \beta\alpha_2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2\beta\alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_2}$$

	Start	1	2	3	4	5
β	-1.00000	-0.26800	-0.21584	-0.22058	-0.22013	-0.22017
α_1	0.60000	0.97758	0.97935	0.97951	0.97950	0.97950
α_2	-0.60000	-0.21054	-0.20218	-0.20138	-0.20144	-0.20143

$$P[g(X_1, X_2) < 0] = \Phi(-\beta) = \Phi(0.22) = 0.587$$

Aufgabe 11.3

Ein Unternehmen plant den Bau einer Fabrik in einer Wüste. Um die Produktion zu gewährleisten, werden 100 $Kiloliter$ Wasser am Tag benötigt. Es bestehen zwei Möglichkeiten, dies zu realisieren:

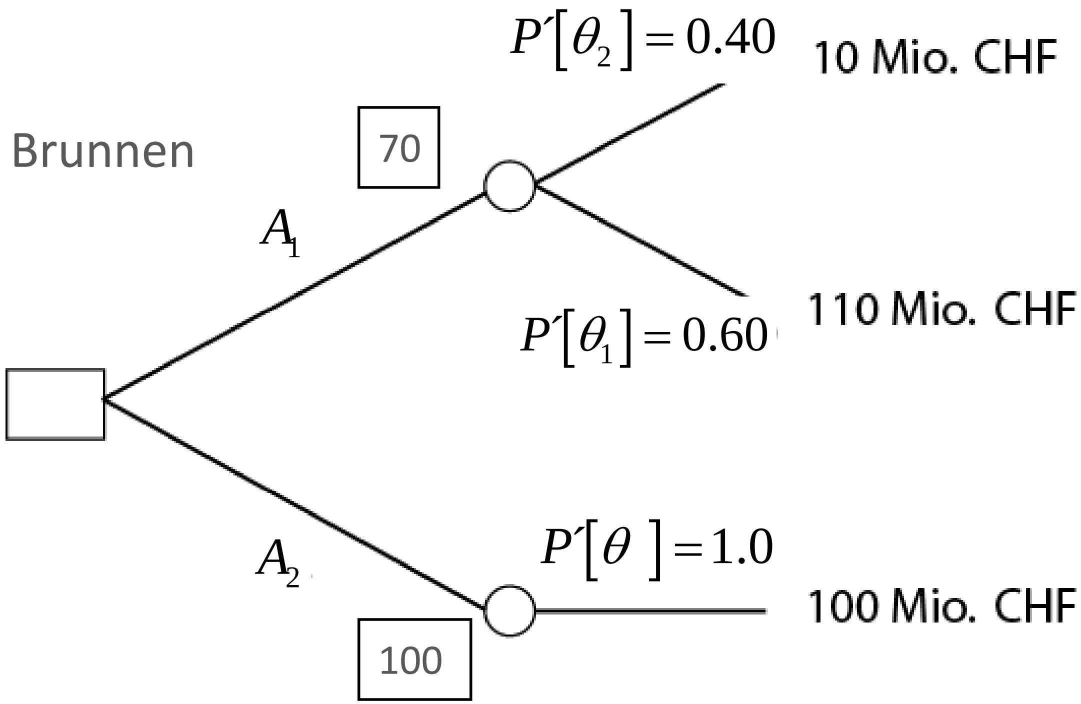
- *A1*: Bohren eines Brunnens vor Ort
- *A2*: Bau einer Pipeline zur Wasserversorgung

Die Pipeline kann für 100 Mio. CHF realisiert werden. Der Bau eines Brunnens kostet 10 Mio. CHF. Es kann jedoch nicht garantiert werden, dass der Brunnen ausreichend Wasser führt.

a) Aus Erfahrungen früherer Projekte mit ähnlichen geologischen Voraussetzungen kann geschlossen werden, dass ein Brunnen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% ausreichend Wasser führen wird. Für welche Aktion sollten sich die Geschäftsführer dieses Unternehmens entscheiden?

Aufgabe 11.3

A-Priori Analyse



$$E'[u]=\min\ \{P'[\theta_1]\cdot 110+P'[\theta_2]\cdot 10;\ \ P'[\theta]\cdot 100\}=$$
$$\min\ \{0.6\cdot 110+0.4\cdot 10;\ 1.0\cdot 100\}=70\ \text{Mio. CHF}$$

Die Aktion A_1 würde mit den gegebenen A-Priori Wahrscheinlichkeiten geringere Kosten verursachen. Also sollte der Ingenieur sich für die Erschliessung eines Brunnens vor Ort entscheiden.

Aufgabe 11.3

b) Die Kapazität des Brunnens kann durch eine **Probebohrung** geschätzt werden. Diese Bohrung verursacht Kosten von 1 Mio. CHF. Das Verfahren der Probebohrung liefert drei unterschiedliche Indikatoren bezüglich der Kapazität. Die Wahrscheinlichkeitstabelle für dieses Verfahren ist gegeben.

Die erste Probebohrung ergibt eine Indikation I_2.
Sollte der Brunnen zur Wasserversorgung gebohrt werden?

	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 : < 100 kl	θ_2 :> 100 kl
I_1: Kapaziät >105 kl	**0.1**	**0.8**
I_2 : 95 kl < Kapaziät <105 kl	**0.2**	**0.1**
I_3 : Kapaziät < 95 kl	**0.7**	**0.1**

Aufgabe 11.3

Posterior Analyse

Durch eine Probebohrung können wir nun unsere Priorwahrscheinlichkeiten aktualisieren – Dazu verwenden wir den Satz von Bayes.

Likelihood

$$P(X \mid E) = \frac{P(X \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \mid X)}{P(E \mid X_1)P(X_1) + \cdots P(E \mid X_n)P(X_n)} P(X)$$

Posterior Wahrscheinlichkeit

$$P''(\theta_1 \mid I_2) = \frac{P(I_2 \mid \theta_1)}{P(I_2 \mid \theta_1)P(\theta_1) + P(I_2 \mid \theta_2)P(\theta_2)} P'(\theta_1)$$

aktualisierte Priorwahrscheinlichkeit

$$P''(\theta_2 \mid I_2) = \frac{P(I_2 \mid \theta_2)}{P(I_2 \mid \theta_1)P(\theta_1) + P(I_2 \mid \theta_2)P(\theta_2)} P'(\theta_2)$$

Aufgabe 11.3

Posterior Analyse

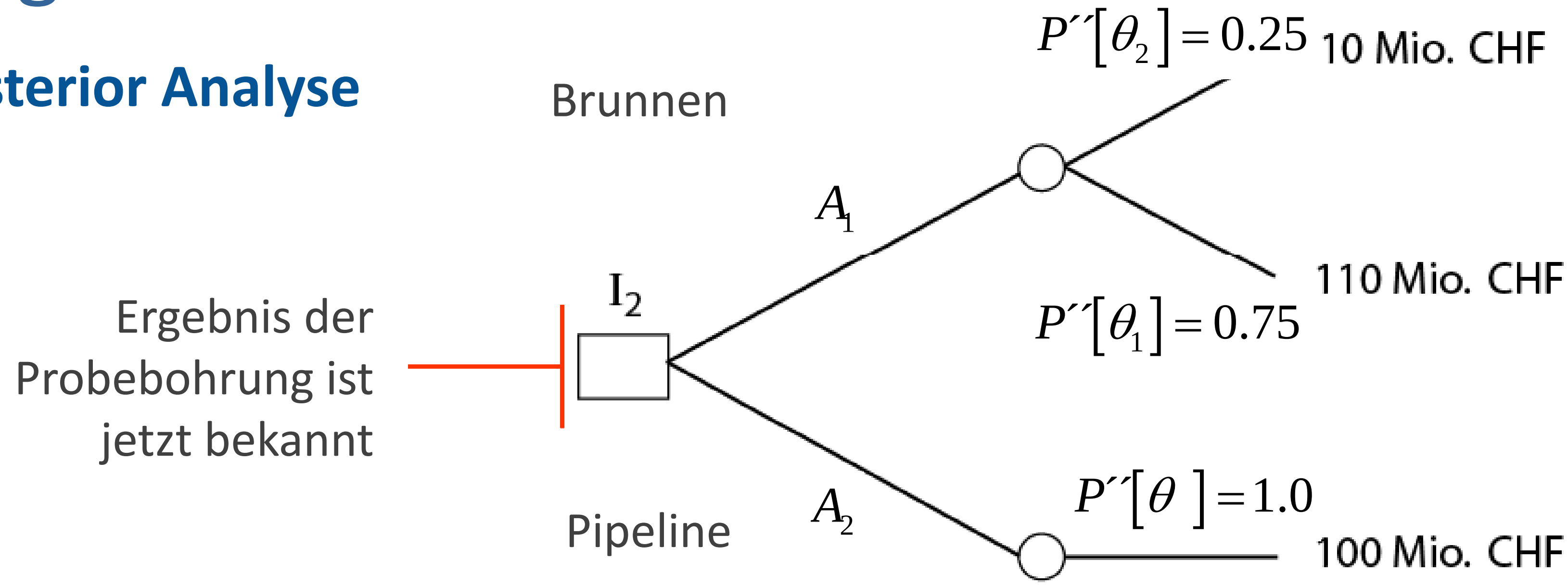
	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 :< 100 kl	θ_2 : > 100 kl
I_1: Kapaziät >105 kl	**0.1**	**0.8**
I_2 : 95 kl < Kapaziät <105 kl	**0.2**	**0.1**
I_3 : Kapaziät < 95 kl	**0.7**	**0.1**

$$P(\theta_1 \mid I_2) = \frac{0.2}{0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4} \cdot 0.6 = 0.75$$

$$P(\theta_2 \mid I_2) = \frac{0.1}{0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4} \cdot 0.4 = 0.25$$

Aufgabe 11.3

Posterior Analyse



$$E''[u] = \min \quad \{P''[\theta_1]\cdot(10) + P''[\theta_2]\cdot(100+10); \quad P''[\theta]\cdot 100\} =$$

$$\min \quad \{0.25\cdot 10 + 0.75\cdot 110; \; 1.0\cdot 100\} = 85 \text{ Mio. CHF}$$

Mit dieser Indikation aus dem Pumpversuch erscheint die Aktion A_1 als die günstigere und sollte folglich gewählt werden.

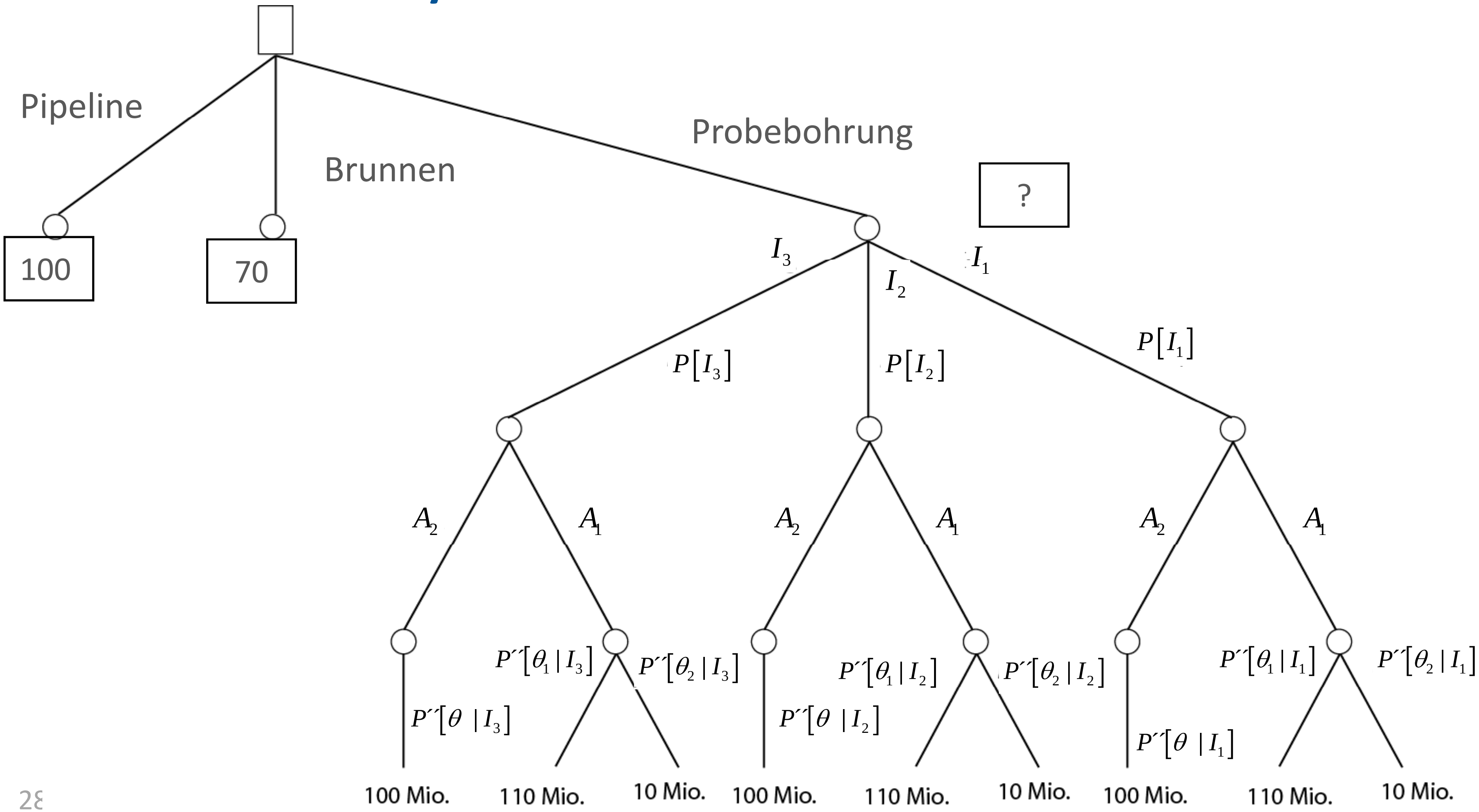
Aufgabe 11.3

c) Entscheide, ob überhaupt eine Probebohrung durchgeführt werden sollte.

Betrachten wir dazu zunächst den Entscheidungsbaum.

Aufgabe 11.3

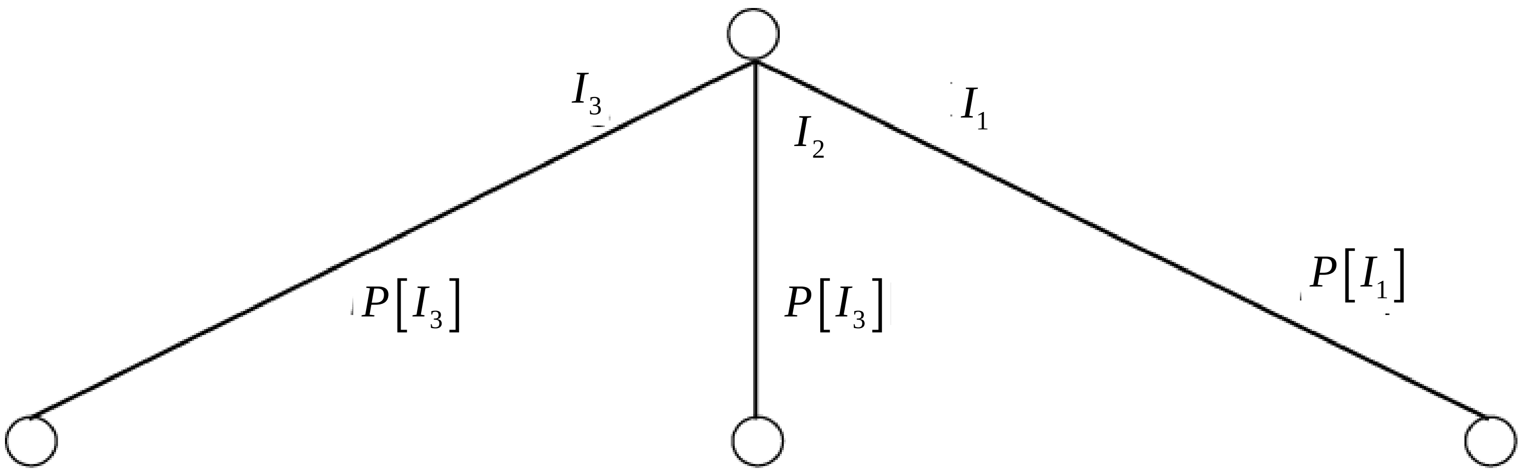
Prä-Posterior Analyse



Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

Zuerst benötigen wir die Wahrscheinlichkeit, dass die Probebohrung als Indikator I_1, I_2 oder I_3 liefert.



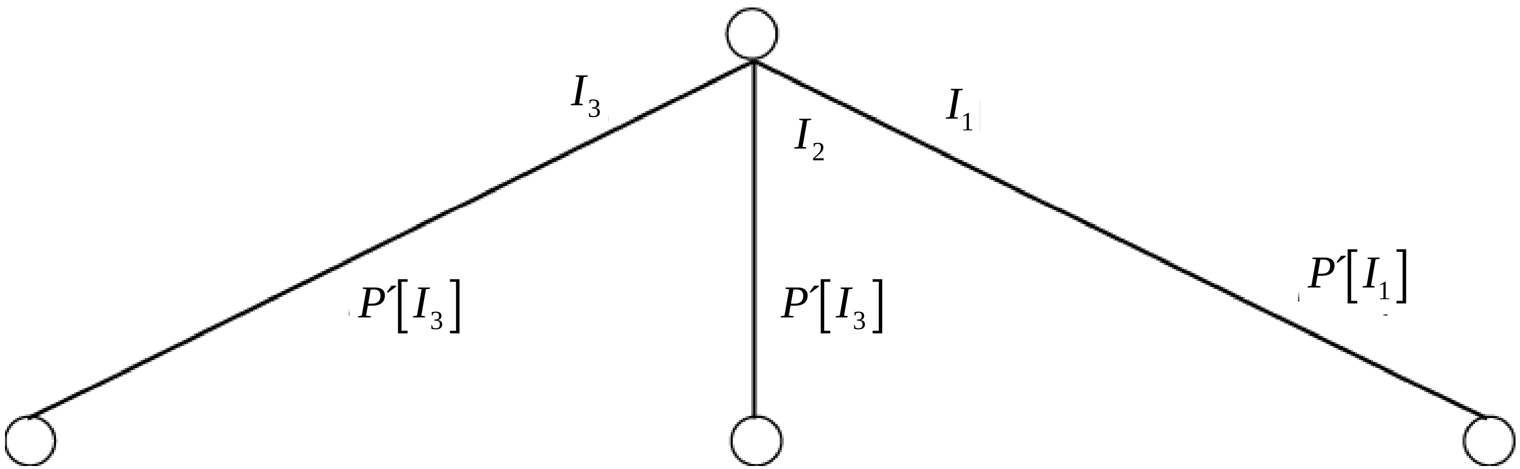
Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

$$P'[I_1] = P[I_1 | \theta_1] \cdot P[\theta_1] + P[I_1 | \theta_2] \cdot P[\theta_2] = 0.1 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.38$$

$$P'[I_2] = P[I_2 | \theta_1] \cdot P[\theta_1] + P[I_2 | \theta_2] \cdot P[\theta_2] = 0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.16$$

$$P'[I_3] = P[I_3 | \theta_1] \cdot P[\theta_1] + P[I_3 | \theta_2] \cdot P[\theta_2] = 0.7 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.46$$



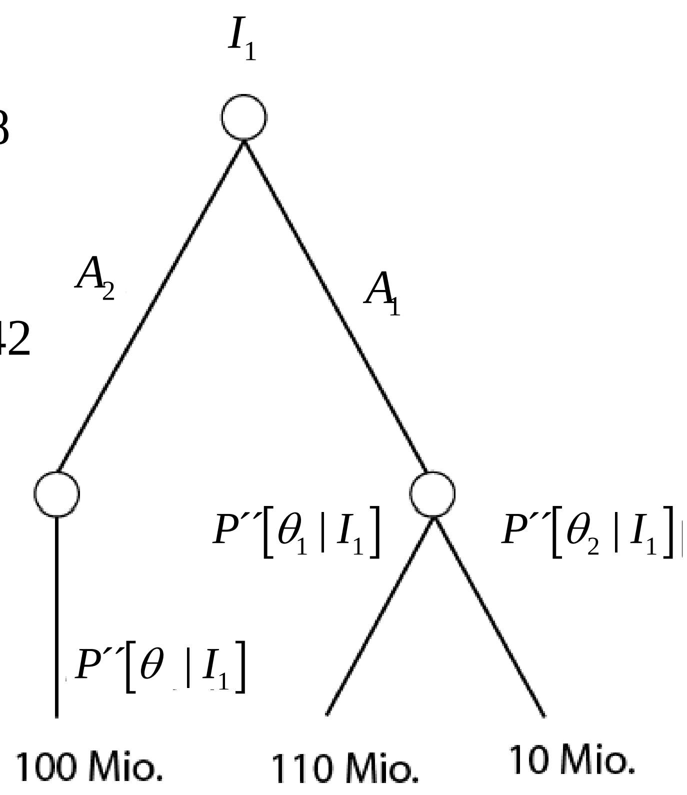
Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

Jetzt müssen wir unsere Posteriori Wahrscheinlichkeiten der Zustände für jede Indikation berechnen.

$$P''(\theta_1 \mid I_1) = \frac{P(I_1 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P'(I_1)} = \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.38} = \frac{0.06}{0.38} = 0.158$$

$$P''(\theta_2 \mid I_1) = \frac{P(I_1 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P'(I_1)} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.38} = \frac{0.32}{0.38} = 0.842$$

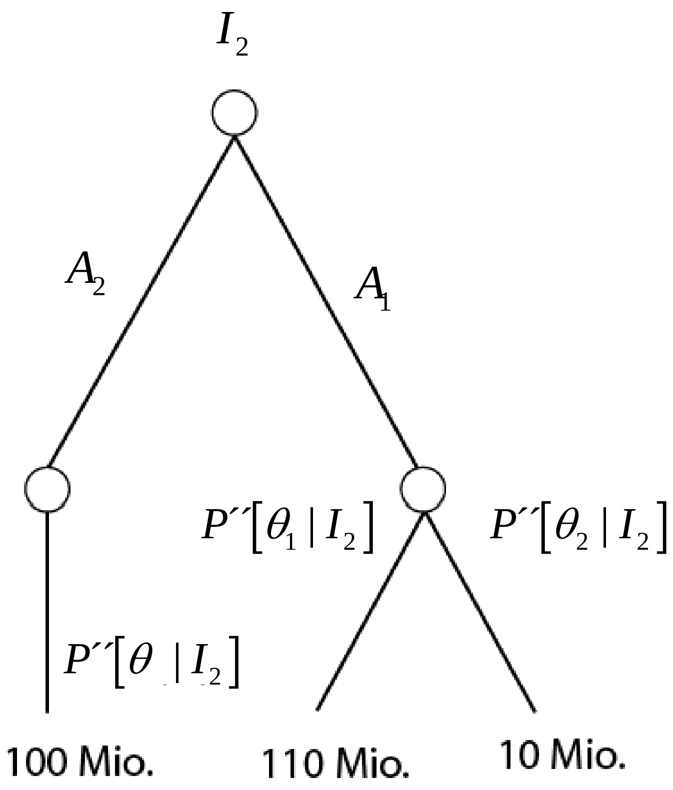


Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

$$P''(\theta_1 \mid I_2) = \frac{P(I_2 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P'(I_2)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.16} = \frac{0.12}{0.16} = 0.75$$

$$P''(\theta_2 \mid I_2) = \frac{P(I_2 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P'(I_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.16} = \frac{0.04}{0.16} = 0.25$$

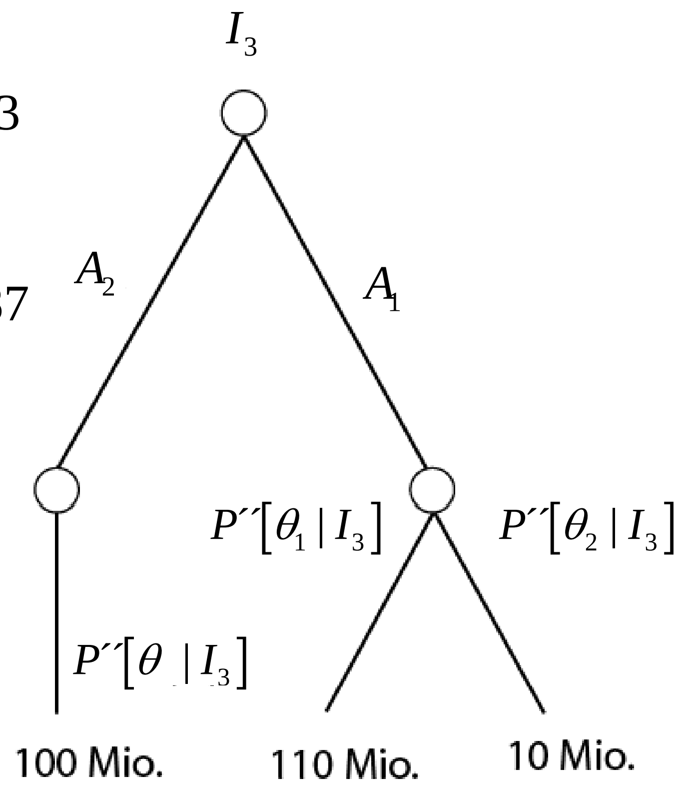


Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

$$P''(\theta_1 \mid I_3) = \frac{P(I_3 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P'(I_3)} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.46} = \frac{0.42}{0.46} = 0.913$$

$$P''(\theta_2 \mid I_3) = \frac{P(I_3 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P'(I_3)} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.46} = \frac{0.04}{0.46} = 0.087$$



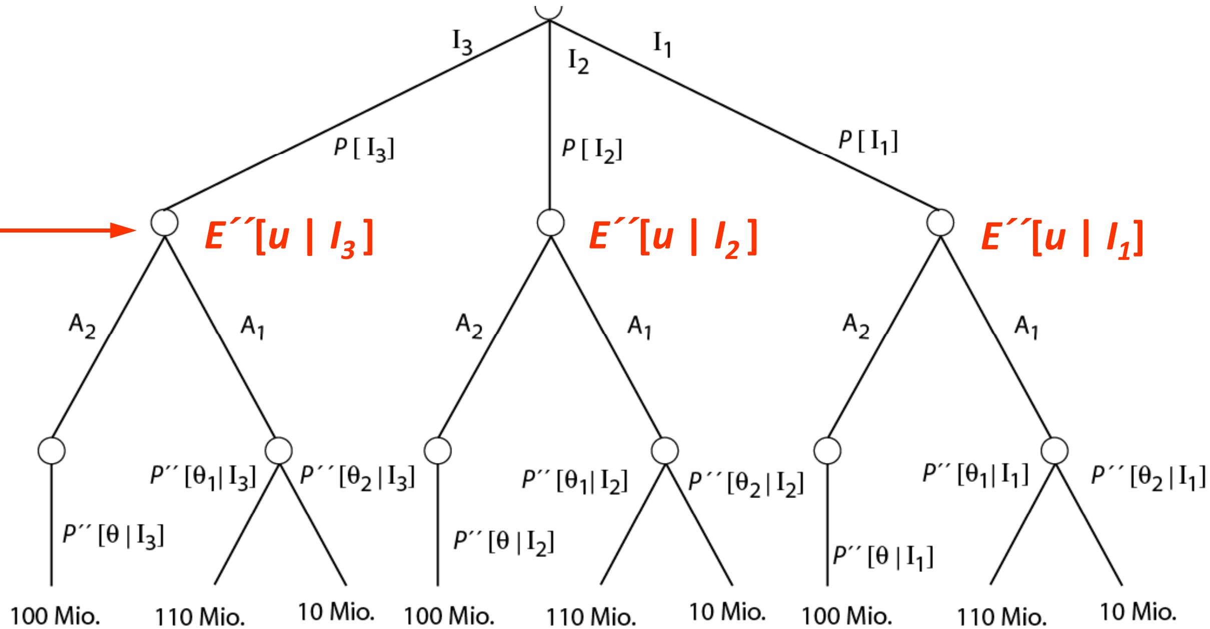
Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

$$E''[u\,|\,I_1] = \min\ \{P''(\theta_1\,|\,I_1)\cdot 110 + P''(\theta_2\,|\,I_1)\cdot 10;\quad P'[\theta]\cdot 100\}$$

$$E''[u\,|\,I_2] = \min\ \{P''(\theta_1\,|\,I_2)\cdot 110 + P''(\theta_2\,|\,I_2)\cdot 10;\quad P'[\theta]\cdot 100\}$$

$$E''[u\,|\,I_3] = \min\ \{P''(\theta_1\,|\,I_3)\cdot 110 + P''(\theta_2\,|\,I_3)\cdot 10;\quad P'[\theta]\cdot 100\}$$



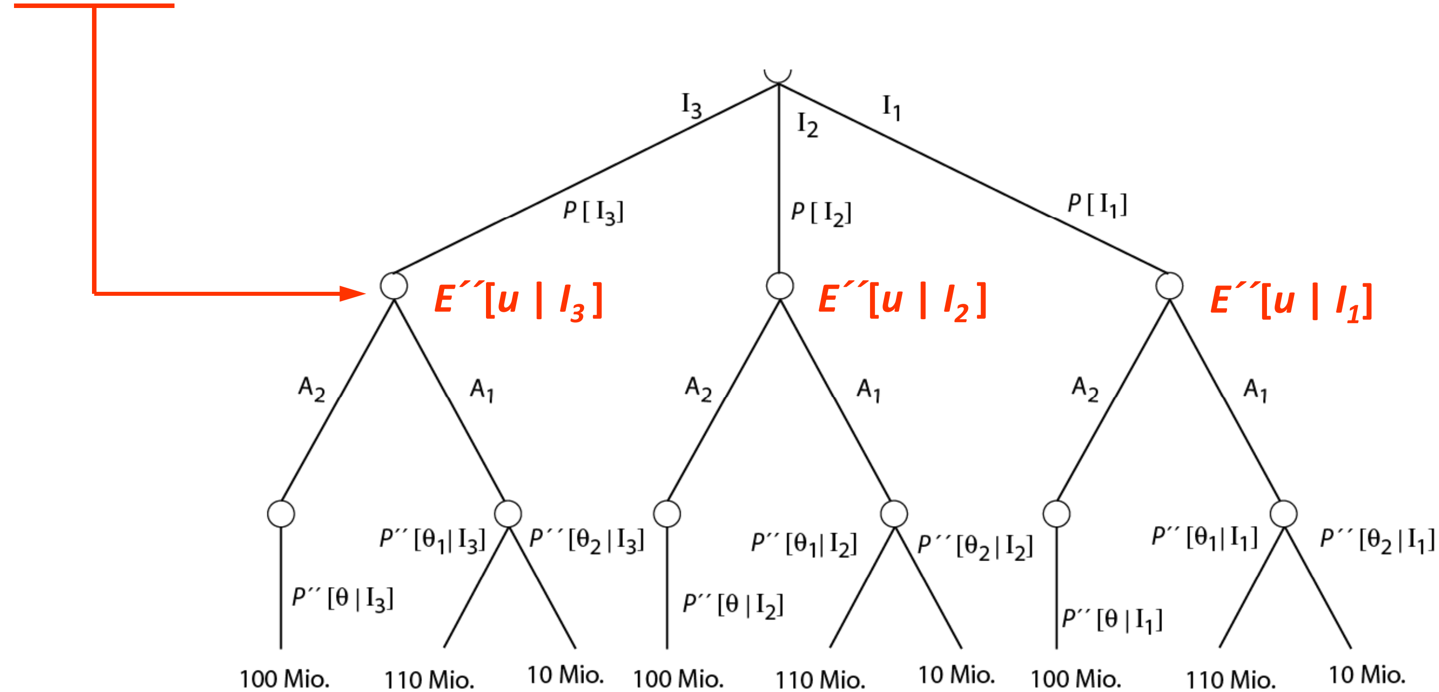
Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

$$E''[u \mid I_1] = \min \quad \{0.16 \cdot 110 + 0.84 \cdot 10; \quad 1.0 \cdot 100\} = 26$$

$$E''[u \mid I_2] = \min \quad \{0.75 \cdot 110 + 0.25 \cdot 10; \quad 1.0 \cdot 100\} = 85$$

$$E''[u \mid I_3] = \min \quad \{0.913 \cdot 110 + 0.087 \cdot 10; \quad 1.0 \cdot 100\} = 100$$



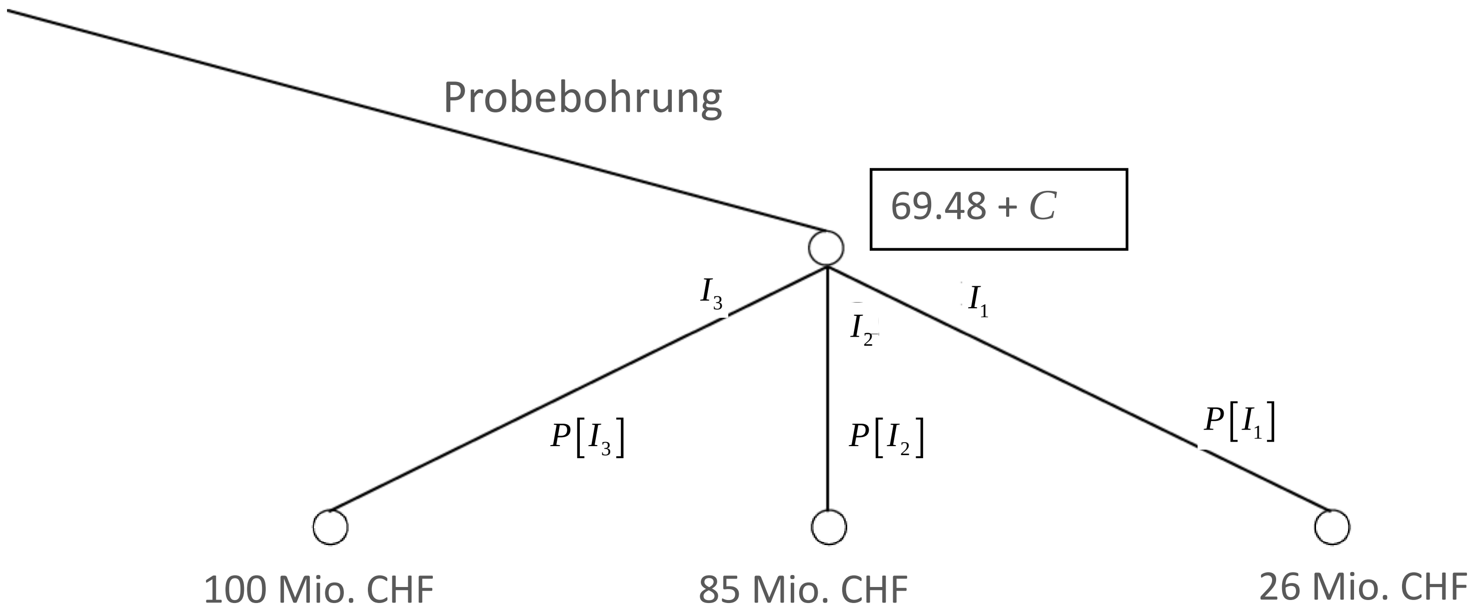
Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

$$E''[u] = \left(E''[u \mid I_1] \cdot P[I_1] + E''[u \mid I_2] \cdot P[I_2] + E''[u \mid I_3] \cdot P[I_3]\right) + C$$

$$E''[u] = 26 \cdot 0.38 + 85 \cdot 0.16 + 100 \cdot 0.46 = 69.48 + C$$

Wobei C die Kosten für die Probebohrung sind.



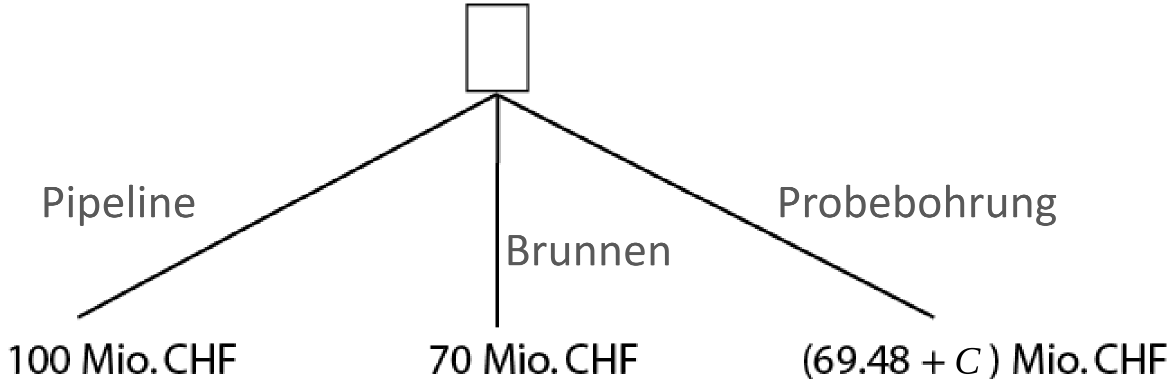
Aufgabe 11.3

Prä-Posterior Analyse

Jetzt können wir die Entscheidung fällen !

$$69.48 + C \leq \min(A_1, A_2) = 70$$

$$\Leftrightarrow C \leq 0.52 \text{ Mio.CHF}$$



Wenn die Probebohrung weniger als 0.52 Mio. CHF kostet, dann lohnt sie sich. Da die Probebohrung aber 1 Mio. CHF kostet sollte diese nicht durchgeführt werden