

ÜBUNG 9 Zusatzaufgaben - Lösungen

Aufgabe 9.6

Zur Dimensionierung eines Parkhauses wurden die Ankunftszeiten von Fahrzeugen aufgenommen. Die Zeitdifferenzen zwischen ankommenden Fahrzeugen sind in Tabelle 9.6.1 gegeben.

- Zeichne das Wahrscheinlichkeitspapier für die Exponentialverteilung und trage die Werte der Zeitdifferenzen ein. Beurteile, ob die Intervalle einer Exponentialverteilung folgen.
- Bestimme den Erwartungswert der Zeitdifferenz grafisch aus der in a) erzeugten Grafik unter der Annahme, dass die Daten exponentialverteilt sind. Berechne den Erwartungswert und vergleiche die beiden Werte.

Verwende für die beobachtete kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion: $F_o(x_i) = \frac{i}{n+1}$

i	Zeitdifferenz (Sekunden)
1	1.52
2	6.84
3	9.12
4	10.64
5	15.2
6	21.28
7	30.4
8	30.4
9	34.2
10	60.8
11	78.28
12	95.76

Tabelle 9.6.1: Zeitdifferenz zwischen den Ankunftszeiten der Fahrzeuge.

Aufgabe 9.6 – Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Exponentialfunktion ist:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

Wir versuchen nun, eine lineare Beziehung zwischen x und y zu finden.

Die Überschreitungswahrscheinlichkeit wird geschrieben als:

$$G(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda t)$$

Mit dem natürlichen Logarithmus erhält man eine lineare Beziehung zwischen x und y :

$$\ln(G(t)) = -\lambda t$$

$(t, \ln G(t))$ stellen eine Gerade dar mit der Steigung $-\lambda$. Die Annahme, dass die Daten exponentialverteilt sind wird unter Verwendung eines Wahrscheinlichkeitspapiers beurteilt, siehe Abbildung 9.6.1.

No.	Interval [s]	$F_o(t_i)$	$1-F_o(t_i)$	$\ln(G(t))$
1	1.52	0.077	0.923	-0.080
2	6.84	0.154	0.846	-0.167
3	9.12	0.231	0.769	-0.262
4	10.64	0.308	0.692	-0.368
5	15.2	0.385	0.615	-0.486
6	21.28	0.462	0.538	-0.619
7	30.4	0.538	0.462	-0.773
8	30.4	0.615	0.385	-0.956
9	34.2	0.692	0.308	-1.179
10	60.8	0.769	0.231	-1.466
11	78.28	0.846	0.154	-1.872
12	95.76	0.923	0.077	-2.565

Tabelle 9.6.1: Rechentabelle für die Erstellung des Wahrscheinlichkeitspapiers.

Aufgrund der Abbildung 9.6.1 darf behauptet werden, dass die Daten einer Exponentialverteilung folgen.

b) Der Stichprobenmittelwert wird berechnet als:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}(1.52 + 6.84 + 9.12 + 10.64 + 15.2 + 21.28 + 30.4 + 30.4 + 34.2 + 60.8 + 78.28 + 95.76) = 32.87$$

Da die negative Steigung der Geraden in der Abbildung dem Parameter λ entspricht, kann der Parameter als ca. 0.026 geschätzt werden. Der Mittelwert wird dann gemäss der folgenden Beziehung hergeleitet:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{0.026} = 38.1 \text{ [s]}$$

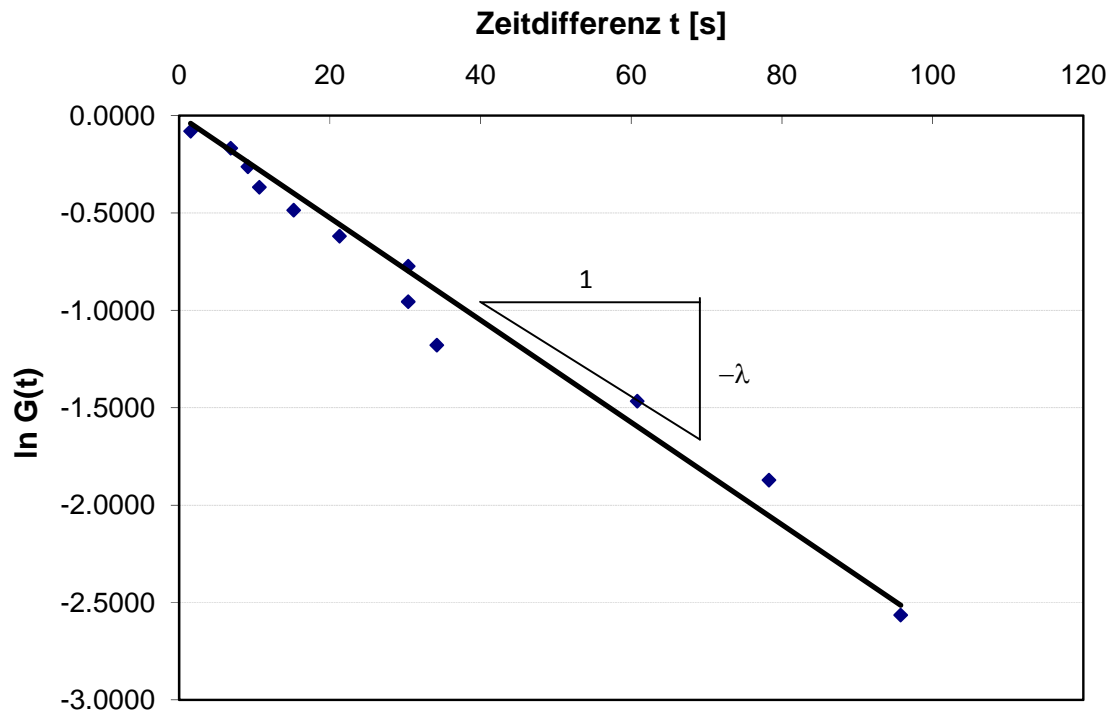


Abb. 9.6.1: Wahrscheinlichkeitspapier für die Exponentialfunktion, und eingetragene Beobachtungen der Zeitdifferenzen zwischen den Ankunftszeiten.

Aufgabe 9.7

Ein Student liest in einem Bericht über Verkehrsanalysen, dass die mittlere Fahrzeit mit einem Personenwagen von seinem Wohnort Baden bis zur ETH Hönggerberg während des Berufsverkehrs 23.7 Minuten, mit einer Standardabweichung von 3 Minuten, beträgt.

Bei seinen nächsten 13 Fahrten während des Berufsverkehrs notiert er sich seine eigenen Fahrzeiten und kommt auf einen Durchschnitt von 22.3 Minuten.

Berechne auf einem Signifikanzniveau von 5 %, ob der Bericht mit diesen Messungen übereinstimmen kann, unter der Annahme einer normalverteilten Fahrzeit und unter der Annahme, dass auch bei seinen Messungen die Standardabweichung 3 Minuten beträgt.

Aufgabe 9.7 – Lösung

1. Formuliere die Null- und die Alternativhypothese:

$$H_0 : \mu = 23.7 \quad H_1 : \mu \neq 23.7$$

2. Wähle ein Signifikanzniveau α

$$\alpha = 5\% .$$

3. Definiere die Art der Stichprobenerhebung (welche Daten, wie viele Daten?):

$$n = 13 \text{ Stichproben der Fahrzeit.}$$

4. Formuliere eine Entscheidungsregel:

$$\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

wobei σ die Standardabweichung der Fahrzeit ist, und n die Stichprobenanzahl.

5. Berechne:

$$\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 23.7 - 1.96 \frac{3}{\sqrt{13}} \leq \bar{x} \leq 23.7 + 1.96 \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow 22.07 \leq \bar{x} \leq 25.33$$

$$\bar{x} = 22.3 \text{ Minuten.}$$

6. Beurteile die Nullhypothese H_0

Der Stichprobenmittelwert befindet sich im Intervall $[22.07 \leq \bar{x} \leq 25.33]$. Die Nullhypothese kann auf einem Signifikanzniveau von 5% nicht verworfen werden.