

Antwortspektren

Alessandro Dazio
 Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich

1 EINFÜHRUNG

Die neuen SIA-Tragwerksnormen, sowie viele andere Normen weltweit, verwenden Antwortspektren zur Beschreibung der seismischen Einwirkung. Die entsprechende Bemessung erfolgt dann anhand von Bemessungsspektren.

Erdbeben sind eine äusserst komplexe dynamische Einwirkung und die Spektren sind ein pragmatisches, effizientes und zweckmässiges Werkzeug, um damit umgehen zu können. Dabei werden aber stillschweigend wichtige Annahmen akzeptiert, die bei der Bemessung von Bauten Konsequenzen haben. Um projektierenden Ingenieuren bei der Bemessung bessere Entscheidungsgrundlagen zu geben, soll dieser Beitrag zuerst zeigen wie Antwortspektren berechnet werden, welche Informationen sie enthalten und was für Eigenschaften sie haben. Anschliessend werden elastische und inelastische Bemessungsspektren nach Newmark hergeleitet und diskutiert. Es wird auf diese Spektren fokussiert, weil sie die Grundlagen für fast alle Normen weltweit darstellen. Zum Schluss werden die "Spektren nach Newmark¹" mit den "Spektren nach Norm SIA 261" verglichen.

2 EINMASSENSCHWINGER

2.1 Eigenschaften von linearen Einmassenschwinger

Für eine gegebene Einwirkung stellen Antwortspektren die maximale Antwort eines Einmassenschwingers in Funktion seiner Periode T (oder der Eigenfrequenz f) dar. Der erste Schritt zur Bestimmung eines Antwortspektrums ist somit die dynamische Berechnung eines Einmassenschwingers.

Der Einmassenschwinger (EMS) ist ein dynamisches System mit einem Freiheitsgrad. Dieser besteht aus einem Massenpunkt mit Masse m , aus einer

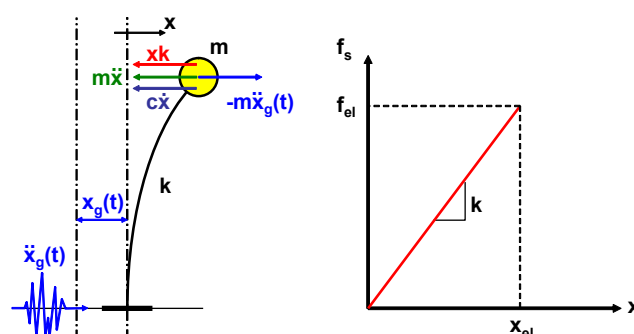


Abb. 1: Notation zum linearen Einmassenschwinger.

Feder mit Steifigkeit k und aus einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante c . Wenn die Federsteifigkeit k , wie in Abbildung 1, konstant über die Zeit ist, spricht man von einem linearen EMS.

Der Freiheitsgrad des EMS von Abbildung 1 ist die Verschiebung der Masse m in X-Richtung. Die Bewegungsgleichung für eine Fusspunktanregung mit dem Beschleunigungszeitverlauf $\ddot{x}_g(t)$ kann aus dem Gleichgewicht der Kräfte hergeleitet werden:

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

wobei \ddot{x} , \dot{x} und x als Bewegungsgrössen relativ zum Fusspunkt des EMS zu betrachten sind. Nach leichter Umformung wird Gleichung (1) zu:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t) \quad (2)$$

Es handelt sich dabei um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die analytisch gelöst werden kann, wenn die Anregung $-m\ddot{x}_g(t)$ in einfacher mathematischer Form vorliegt (Chopra (2001)). Die Einführung der Eigenkreisfrequenz ω (bzw. der Eigenfrequenz f und der Periode T) und der Dämpfungsrate (oder "Dämpfung") ζ erlaubt nochmals die Umformung der Bewegungsgleichung.

$$\text{Eigenkreisfrequenz: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

$$\text{Eigenfrequenz: } f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4)$$

1. Professor Nathan M. Newmark (1910-1981). Department of Civil Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign.

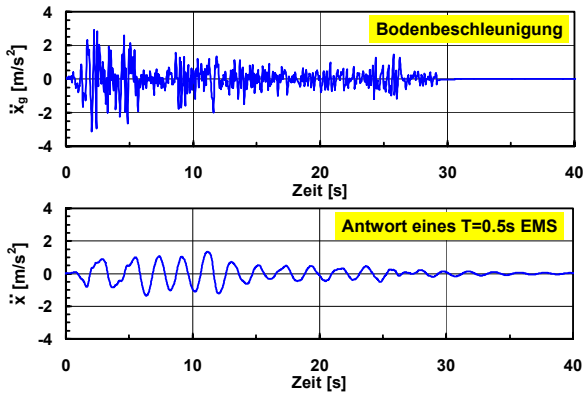


Abb. 2: Zeitverlauf einer Bodenbeschleunigung ("El Centro" Erdbeben, 18.5.1940, S00E Komponente) und entsprechende Antwort eines EMS mit $T=0.5s$.

Periode:
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

Dämpfungsrate:
$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\omega m} \quad (6)$$

Gleichung (7) ergibt sich mit der Einführung von Gleichungen (3) und (6) in Gleichung (2). Sie zeigt, dass das Bewegungsverhalten eines EMS bei gegebener Erdbebenanregung nur von seiner Periode und von seiner Dämpfung abhängig ist.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = -\ddot{x}_g(t) \quad (7)$$

2.2 Zeitverlaufsberechnungen von linearen EMS

Der Zeitverlauf der Bewegungsgrößen \ddot{x} , \dot{x} und x des EMS soll aus der Lösung der Differentialgleichung (7) berechnet werden. Auf Abbildung 2 ist deutlich zu sehen, dass der Zeitverlauf der Bodenbeschleunigung eines Erdbebens nicht einfach mathematisch beschreibbar ist. Zeitverläufe werden deshalb, in der Regel, als Reihenfolge von diskreten Stützwerten angegeben. Gleichung (7) muss somit numerisch gelöst werden. Eine detaillierte Diskussion der verschiedenen Verfahren, die zur Lösung beigezogen werden können, ist in Chopra (2001) zu finden. Im Rahmen dieses Beitrags wird nur das Integrationsverfahren nach Newmark kurz präsentiert.

Die Stützwerte der Bodenbeschleunigung $\ddot{x}_g(t)$ sind vom Anfang bis zum Ende des Erdbebens bei jedem Zeitinkrement ("Zeitschritt") Δt angegeben. Die Bewegungsgrößen des EMS zum Zeitpunkt t sind bekannt und mit dem Verfahren nach Newmark werden die Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnet. Die Berechnung fängt zum Zeitpunkt $t = 0$ an (bei welchem der EMS unter bekannter Anfangsbedingungen steht) und wird Zeitschritt nach Zeitschritt weitergeführt bis der gesamte Zeitverlauf der Bewegungsgrößen, wie z.B. in Abbildung 2 die absolute Beschleunigung des EMS, berechnet ist.

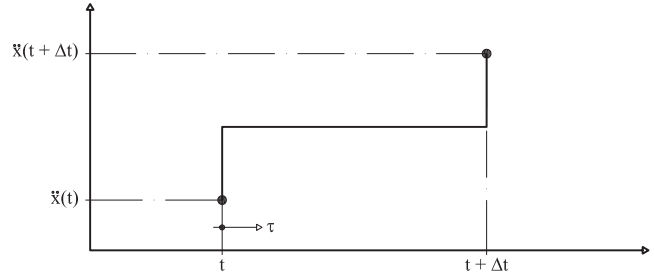


Abb. 3: Integrationsverfahren nach Newmark: mögliche Annahme des Verlaufs der Beschleunigung im Zeitschritt.

Wenn der EMS zu den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ im Gleichgewicht ist, dann muss er auch innerhalb des Zeitschritts im Gleichgewicht sein. Die Bewegungsdifferentialgleichung kann somit in seiner inkrementellen Form geschrieben werden

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + k\Delta x = -m\Delta\ddot{x}_g(t) \quad (8)$$

und die Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ können wie folgt berechnet werden:

$${}^{t+\Delta t}x = {}^t x + \Delta x, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{x} = {}^t \dot{x} + \Delta \dot{x}, \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{x} = {}^t \ddot{x} + \Delta \ddot{x} \quad (9)$$

Die Inkremente $\Delta\ddot{x}$, $\Delta\dot{x}$ und Δx sind vorläufig noch unbekannt und um sie zu bestimmen wird ein möglicher Verlauf der Beschleunigung des EMS im Zeitschritt Δt angenommen. Es wird häufig angenommen ("average constant acceleration method"), dass die relative Beschleunigung des EMS im Zeitschritt konstant ist (siehe Abbildung 3) und beträgt:

$$\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{2} [{}^t \ddot{x} + {}^{t+\Delta t} \ddot{x}] \text{ bei } t \leq \tau < t + \Delta t \quad (10)$$

Aus der Integration der Beschleunigung $\ddot{x}(\tau)$ im Zeitschritt Δt können die Inkremente der Geschwindigkeit $\Delta\dot{x}$ und der Verschiebung Δx berechnet werden.

$$\Delta\dot{x} = \left({}^t \dot{x} + \frac{\Delta\dot{x}}{2} \right) \Delta t \quad (11)$$

$$\Delta x = {}^t \dot{x} \Delta t + \left({}^t \ddot{x} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{2} \quad (12)$$

Gleichungen (11) und (12) können jetzt in Gleichung (8) eingefügt werden

$$m\Delta\ddot{x} + c \left({}^t \dot{x} + \frac{\Delta\dot{x}}{2} \right) \Delta t + k \left[{}^t x \Delta t + \left({}^t \ddot{x} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{2} \right] = -m\Delta\ddot{x}_g \quad (13)$$

wo der Inkrement $\Delta\ddot{x}$ der Beschleunigung die einzige Unbekannte ist. $\Delta\ddot{x}$ kann somit berechnet werden. Durch Rückwärtseinsetzen in Gleichungen (11), (12) und (9) können dann die gesuchten Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnet werden.

Es ist zu bemerken, dass dieses Integrationsverfahren nach Newmark auf einer Diskretisierung der Differentialgleichung beruht, und deshalb seine

Genauigkeit von der Länge des Zeitschritts abhängig ist. Im Erdbebeningenieurwesen kommen, in Abhängigkeit der Periode des EMS, Zeitschritte in der Größenordnung von 0.001 - 0.02 Sekunden zur Anwendung. Weitere Hinweise über die Genauigkeit dieser numerischen Verfahren ist z.B. in Chopra (2001) zu finden.

2.3 Zeitverlaufsberechnungen von nicht-linearen EMS

Nicht-lineare EMS sind durch die Eigenschaft charakterisiert, dass die Federsteifigkeit k in Funktion der Beanspruchung variiert. Die Federkraft f_s kann somit nicht mehr aus der Multiplikation der Verformung mit der Steifigkeit berechnet werden. Abbildung 4 zeigt rechts die Kraft-Verformungs-Beziehung dreier unterschiedlicher Federn: eine Lineare und zwei Nicht-lineare. In der Wirklichkeit variiert die Federsteifigkeit meist kontinuierlich. Bei Modellen werden hingegen meist idealisierte Beziehungen angewendet, wie in diesem Fall, wo in Abbildung 4 die idealisierte Kraft-Verformungs-Beziehung eines sogenannten "Takeda"-Typ EMS dargestellt ist.

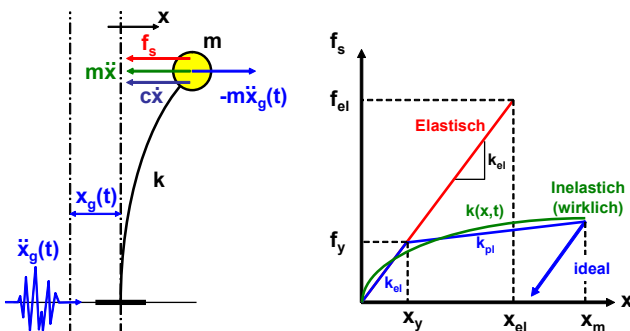


Abb. 4: Notation zum nicht-linearen EMS.

Die Berechnung des Zeitverlaufs der Bewegungsgrößen \ddot{x} , \dot{x} und x erfolgt grundsätzlich gleich wie bei linearen EMS unter Annahme, dass innerhalb eines Zeitschritts die Steifigkeit konstant bleibt. Eine Annahme die sicher erfüllt ist, wenn die Zeitschritte klein genug gewählt werden oder wenn innerhalb des Zeitschritts iteriert wird. Die inkrementelle Bewegungsgleichung wird zu

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + k(x,t)\Delta x = -m\Delta\ddot{x}_g(t) \quad (14)$$

Die Steifigkeit $k(x,t)$ wird bei jedem Zeitschritt aus den bekannten konstitutiven Beziehungen der Feder bestimmt, sodass Gleichung (14) ähnlich wie im Abschnitt 2.2 gelöst werden kann.

Das Integrationsverfahren nach Newmark lässt sich sowohl für lineare als auch für nicht-lineare EMS sehr einfach in Excel implementieren. Ein Beispiel

dazu ist unter <http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads> zu finden.

3 ELASTISCHE ANTWORTSPEKTREN

3.1 Berechnung von Antwortspektren

Im Erdbebeningenieurwesen sind Zeitverläufe häufig nicht gefragt. Vielmehr sind in den meisten Fällen nur die maximale relative Verschiebung und die maximale Beanspruchung des EMS von Interesse. Deshalb wurde das Konzept des Antwortspektrums eingeführt. Ein einziges Antwortspektrum fasst diese Größen für alle möglichen EMS gleicher Dämpfung bei einem gegebenen Erdbeben zusammen.

Antwortspektren werden berechnet, indem die Bewegungsdifferentialgleichung (7) für verschiedene EMS mit unterschiedlicher Periode T_i aber gleicher Dämpfung ζ gelöst wird, und die maximalen Bewegungsgrößen jedes EMS in Funktion seiner Periode T_i aufgetragen werden. Wird die maximale relative Verschiebung $\max(|x(t)|)$ aufgetragen, dann spricht man vom Antwortspektrum der Verschiebung $S_d(\omega_i)$ (nicht zu verwechseln mit dem S_d aus SIA 261, siehe Abschnitt 4.2); wird die maximale relative Geschwindigkeit $\max(|\dot{x}(t)|)$ verwendet, erhält man das Antwortspektrum der Geschwindigkeit $S_v(\omega_i)$, und für die maximale absolute Beschleunigung $\max(|\ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t)|)$ ergibt sich das Antwortspektrum der Beschleunigung $S_a(\omega_i)$. Die gerade präsentierte Methodologie um elastische Antwortspektren zu bestimmen ist in Abbildung 5 schematisch dargestellt.

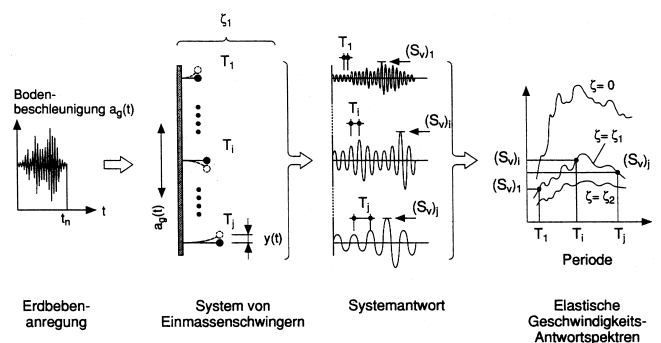


Abb. 5: Ermittlung von elastischen Antwortspektren (nach Bachmann (2002)).

3.2 Bodenbewegungsgrößen

Abbildung 6 zeigt den Zeitverlauf der Bodenbeschleunigung¹ a_g , der Bodengeschwindigkeit v_g und der Bodenverschiebung d_g der S00E Komponente des

1. Beschleunigungen werden mit \ddot{x} in mathematischen Formulierungen bezeichnet, in anderen Fällen wird die Abkürzung a verwendet. Ähnliches gilt auch für Geschwindigkeiten und Verschiebungen.

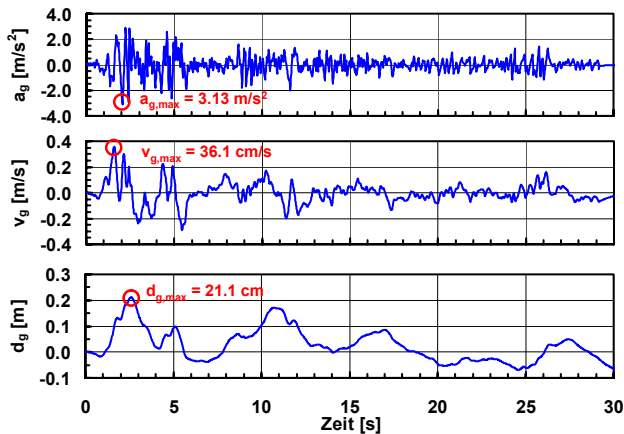


Abb. 6: Zeitverlauf der Bodenbewegungsgrößen des "El Centro" Erdbebens.

1940 "El Centro" Erdbeben. In den Vierziger Jahren wurden eher Bodenbeschleunigungen gemessen und die zwei anderen Bewegungsgrößen mittels Integration berechnet. Heutzutage können auch Geschwindigkeiten und Dank GPS auch Verschiebungen gemessen werden.

Wichtig zur Beschreibung eines Erdbebens sind die maximalen Bodenbewegungsgrößen $a_{g,max}$, $v_{g,max}$ und $d_{g,max}$, die in den nächsten Abschnitten oft zur Anwendung kommen werden. In Abbildung 6 sind maximale Bodenbewegungsgrößen des "El Centro" Erdbebens zur späteren Referenz identifiziert.

3.3 Grenzwerte der Bewegungsgrößen für sehr steife und sehr weiche Systeme

Betrachtungen anhand der Bewegungsgleichung (7) erlauben Aussagen über die Grenzwerte sowohl für sehr steife (links in Abb. 7) als auch für sehr weiche Systeme (rechts in Abb. 7).

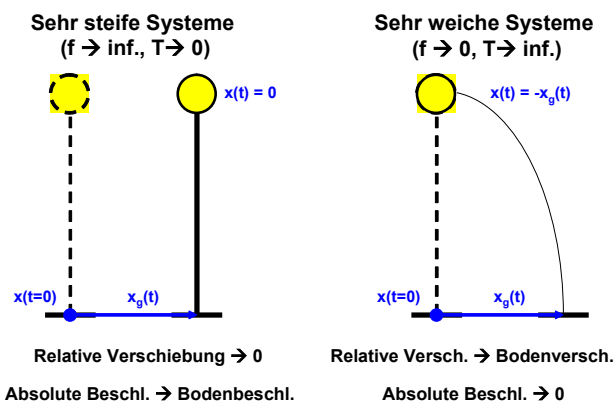


Abb. 7: Verformung eines sehr steifen (links) und ein sehr weichen (rechts) EMS (nach Bachmann (2002)).

Bei sehr steifen Systemen ($T \rightarrow 0, f \rightarrow \infty$) bewegt sich die Masse wegen der sehr steifen Feder praktisch wie der Boden (Starrkörperverschiebung). Die Relativver-

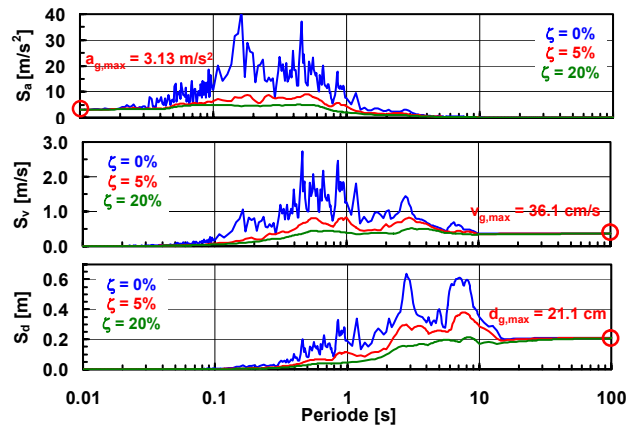


Abb. 8: Elastische Antwortspektren des "El Centro" Erdbebens, berechnet für unterschiedliche Dämpfungen.

schiebung tendiert zu null ($\lim_{T \rightarrow 0} S_d = 0$) und die absolute Beschleunigung entspricht der Bodenbeschleunigung ($\lim_{T \rightarrow 0} S_a = a_{g,max}$).

Bei sehr weichen Systemen ($T \rightarrow \infty, f \rightarrow 0$) bleibt die Masse wegen der sehr weichen Feder praktisch am Ort (keine Verschiebung). Die Relativverschiebung entspricht der Bodenverschiebung ($\lim_{T \rightarrow \infty} S_d = d_{g,max}$) und die absolute Beschleunigung ist null ($\lim_{T \rightarrow \infty} S_a = 0$).

3.4 Eigenschaften von Antwortspektren (Teil 1)

Abbildung 8 zeigt elastische Antwortspektren der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der Verschiebung berechnet für die S00E Komponente des 1940 "El Centro" Erdbebens. Es können dabei folgende allgemein gültige Eigenschaften festgestellt werden:

- Die Grenzwerte der spektralen Bewegungsgrößen S_a und S_d für sehr steife und sehr weiche Systeme bestätigen die Überlegungen von Abs. 3.3. Aus der Integration der Bewegungsgleichung resultiert, dass bei sehr steifen Systemen die relative Geschwindigkeit null ist ($\lim_{T \rightarrow 0} S_v = 0$) und dass bei sehr weichen Systemen die Relativgeschwindigkeit der Bodengeschwindigkeit entspricht ($\lim_{T \rightarrow \infty} S_v = v_{g,max}$).
- Ausser bei sehr weichen und sehr steifen EMS hat die Dämpfung einen wesentlichen Einfluss auf die Antwortspektren. Bei kleinen Dämpfungen sind die spektralen Werte wesentlich grösser und der Verlauf der Spektren ist sehr zackig. Bei Tragwerken ist deshalb Dämpfung eine sehr günstige Eigenschaft, weil sie die Beanspruchungen verkleinert und vermeidet, dass zwei Tragwerke (als EMS modelliert), die ähnliche Eigenfrequenzen haben, völlig unterschiedliche Antworten erfahren. Es ist somit leicht zu verstehen, warum die Bemessung oder die Ertüchtigung von Tragwerken anhand von mechanischen Systeme-

men, die die Dämpfung des Tragwerks erhöhen, sehr effizient sein kann.

Weitere Eigenschaften von Antwortspektren sind im Abschnitt 3.7 zu finden.

3.5 Pseudo-Bewegungsgrösse

In der Literatur sind oft auch Antwortspektren der Pseudo-Geschwindigkeit $S_{pv}(\omega_i)$ und der Pseudo-Beschleunigung $S_{pa}(\omega_i)$ zu finden. Sie werden berechnet, indem das Antwortspektrum der Verschiebung S_d mit ω_i bzw. ω_i^2 multipliziert wird:

$$S_{pv} = \omega S_d \tag{15}$$

$$S_{pa} = \omega^2 S_d \tag{16}$$

Die Pseudo-Geschwindigkeit S_{pv} ist in Gleichung (15) definiert. Sie hat die Einheiten einer Geschwindigkeit und kann als Mass für die maximale Verformungsenergie des EMS interpretiert werden:

$$E_s = \frac{kS_d^2}{2} = \frac{k(S_{pv}/\omega)^2}{2} = \frac{mS_{pv}^2}{2} \tag{17}$$

Die Pseudo-Beschleunigung S_{pa} ist in Gleichung (16) definiert. Sie hat die Einheiten einer Beschleunigung und kann als Mass für die maximale Federkraft des EMS interpretiert werden:

$$F = kS_d = k(S_{pa}/\omega^2) = mS_{pa} \tag{18}$$

Oft werden wirkliche Tragwerke als EMS modelliert und die maximale Federkraft $V = mS_{pa}$ entspricht somit der statischen Ersatzkraft, die zur Bemessung des Tragwerks verwendet wird. Im Erdbebeningenieurwesen sind somit Pseudo-Bewegungsgrössen wesentlich wichtiger als die wirklichen Bewegungsgrössen, weil sie einen direkten Bezug zur Beanspruchung des EMS bzw. des Tragwerks haben.

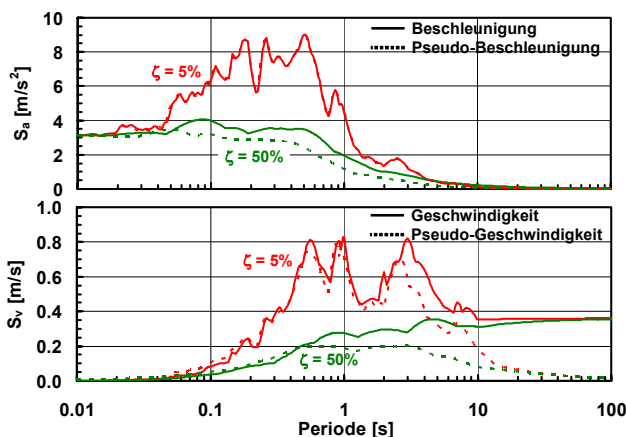


Abb. 9: Vergleich zwischen "wirklicher" und Pseudo-Bewegungsgrösse.

Ein Vergleich zwischen "wirklicher" und Pseudo-Bewegungsgrösse ist in Abbildung 9 präsentiert. Zwischen

$S_v(\omega_i)$ und $S_{pv}(\omega_i)$ gibt es im Allgemeinen ab einer Periode von einer Sekunde markante Unterschiede. $S_a(\omega_i)$ und $S_{pa}(\omega_i)$ sind hingegen identisch für $\zeta = 0$ und weichen auch für $\zeta > 0$ kaum voneinander ab. Diese Übereinstimmung beruht darauf, dass die maximale absolute Beschleunigung und die maximale Federkraft praktisch gleichzeitig auftreten und dabei auch die relative Geschwindigkeit des EMS null ist, sodass keine Dämpfungskräfte vorhanden sind.

3.6 Kombinierte doppelt-logarithmische Darstellung von Antwortspektren

Die Einführung der Pseudo-Bewegungsgrössen erlaubt die kombinierte Darstellung von allen relevanten Spektralgrössen in einer einzigen logarithmischen Zeichnung. Aus Gleichungen (15) und (16) haben wir die Beziehungen:

$$\log S_{pa} = \log S_{pv} + \log \omega = \log S_{pv} - \log T + \log 2\pi \tag{19}$$

$$\log S_d = \log S_{pv} - \log \omega = \log S_{pv} + \log T - \log 2\pi \tag{20}$$

Diese führen zur kombinierten doppelt-logarithmischen Darstellung von Abbildung 10. Dort ist eine konstante Pseudo-Beschleunigung durch die Gleichung $\log S_{pv} = \log T + konst$ charakterisiert, d.h durch eine Gerade mit $+45^\circ$ Neigung. Eine konstante Verschiebung hingegen, ist durch Gleichung $\log S_{pv} = -\log T + konst$ charakterisiert, d.h. durch eine Gerade mit -45° Neigung.

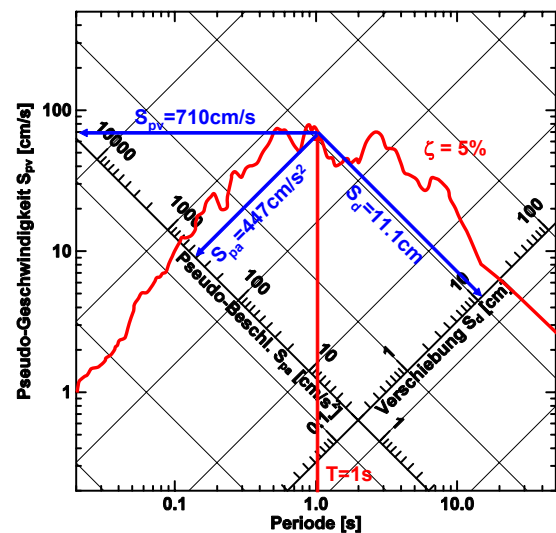


Abb. 10: Kombinierte doppelt-logarithmische Darstellung des Antwortspektrums des "El Centro" Erdbebens, berechnet für 5% Dämpfung.

3.7 Eigenschaften von Antwortspektren (Teil 2)

Abbildung 11 stellt die elastischen Antwortspektren von Abbildung 8 kombinierter doppelt-logarithmisch

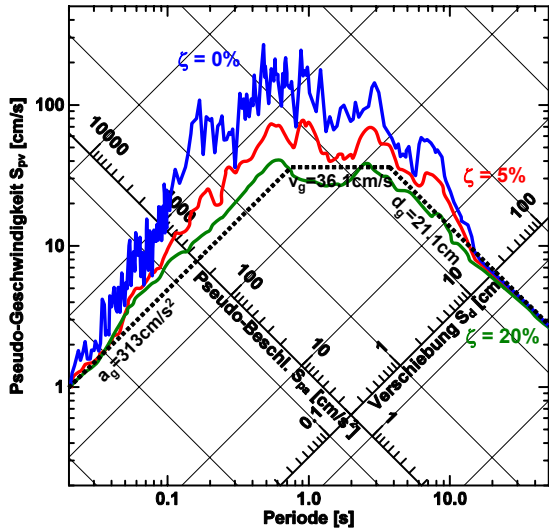


Abb. 11: Kombinierte doppelt-logarithmische Darstellung der Antwortspektren des "El Centro" Erdbebens.

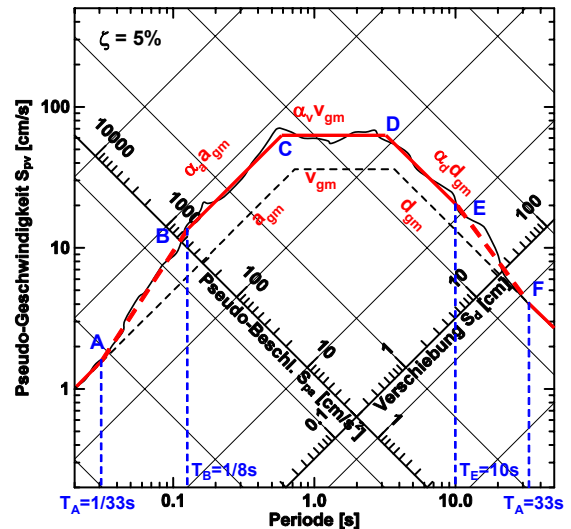


Abb. 12: Konstruktion eines elastischen Bemessungsspektrums nach Newmark.

dar. Die maximale Bodenbewegungsgrößen sind hier durch gestrichelten Linien dargestellt.

Neben den Eigenschaften betreffend Grenzwerte und Dämpfung, die schon im Abschnitt 3.4 diskutiert wurden, kann man hier anhand der kombinierten doppelt-logarithmischen Darstellung deutlich sehen, dass es im Antwortspektrum Periodenbereiche gibt, die von den Bodenbewegungsgrößen stark beeinflusst sind:

- Im Periodenbereich zwischen zirka 0.03 und 0.5 Sekunden ist die Pseudo-Beschleunigung ein Vielfaches der Bodenbeschleunigung.
- Im Periodenbereich zwischen zirka 0.5 und 3 Sekunden ist die Pseudo-Geschwindigkeit ein Vielfaches der Bodengeschwindigkeit.
- Im Periodenbereich zwischen zirka 3 und 15 Sekunden ist die Verschiebung ein Vielfaches der Bodenverschiebung.

Diese Zusammenhänge sind erst Dank der kombinierten doppelt-logarithmischen Darstellung ersichtlich geworden und werden im nächsten Kapitel verwendet, um elastischen Bemessungsspektren zu konstruieren.

4 ELASTISCHE BEMESSUNGSSPEKTREN

4.1 Bemessungsspektren nach Newmark

Die erstmalige Entwicklung von Bemessungsspektren bei Professor Nathan Newmark und seinen Mitarbeitern hat in den Sechziger Jahren das Erdbebeningenieurwesen revolutioniert. Trotzdem, wird im Rahmen dieses Beitrags auf eine genaue Erklärung des dabei verwendeten Verfahrens verzichtet. Es wird hier nur die Grundidee anhand von Abbildung 12 kurz erläutert.

Für eine vertiefte Diskussion wird auf Newmark & Hall (1982) oder auf Chopra (2001) verwiesen.

Ein elastisches Bemessungsspektrum wird als geglättete statistische Auswertung der elastischen Antwortspektren mehrerer registrierter Erdbeben von etwa gleicher Intensität in Gegenden mit ähnlicher Tektonik und ähnlicher Bodenart konstruiert (nach Bachmann (2002)).

Abbildung 12 zeigt mit der dünnen ausgezogenen Linie den Mittelwert aus Antwortspektren von mehreren registrierten Erdbeben. Der Mittelwert aus Antwortspektren ist glatter als die einzelnen Antwortspektren (siehe Abb. 11), besitzt aber die gleichen Eigenschaften im Bezug auf den Verlauf der Kurve wie die einzelnen Spektren (siehe Abs. 3.7). Die verschiedenen Bereiche des Antwortspektrums sind durch die sogenannten Eckperioden T_A bis T_F charakterisiert.

Das geglättete Bemessungsspektrum wird dann folgendermassen konstruiert:

- Im Periodenbereich $T < T_A$ entspricht die spektrale Pseudo-Beschleunigung der Bodenbeschleunigung
- Im Periodenbereich $T_B < T < T_E$ werden die spektralen Amplifikationsfaktoren α_a , α_v und α_d gesucht, die multipliziert mit den entsprechenden Mittelwerten der Bewegungsgrößen a_{gm} , v_{gm} und d_{gm} , die beste Übereinstimmung mit dem Mittelwert aus den Antwortspektren ergeben.
- Im Periodenbereich $T > T_F$ entspricht die spektrale Verschiebung der Bodenverschiebung
- In allen anderen Bereichen wird interpoliert.

Bemessungsspektren können für ein beliebiges Fraktile der statistischen Auswertung von mehreren registrierten Erdbeben berechnet werden. Die statistische Auswertung von Erdbeben aus Kalifornien, die seinerzeit

ζ	Median (50%)			Eine Stdabw. (84%)		
	α_a	α_v	α_d	α_a	α_v	α_d
2%	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5%	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10%	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20%	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

Tabelle 1: Spektrale Aamplifikationsfaktoren für elastische Spektren (nach Newmark & Hall (1982)).

bei Newmark vorgeschlagen wurde, ist in Tabelle 1 zusammengefasst.

4.2 Elastische Antwortspektren nach SIA 261

Abbildung 13 vergleicht die Form der elastischen Antwortspektren der Norm SIA 261 mit der Form der Bemessungsspektren nach Newmark. Es ist offensichtlich, dass die Spektren für die Norm SIA 261 anhand ähnlicher Prinzipien wie bei den Spektren nach Newmark konstruiert wurden. Es wurden dabei andere Erdbeben ausgewertet.

Bei steifen EMS unterscheiden sich die beiden Spektrenformen. Die Spektren nach Newmark weisen eine zusätzliche Eckperiode T_A . Dieser Unterschied ist aber von untergeordneter Bedeutung, weil der betroffene Periodenbereich bei praktischen Anwendungen kaum vorkommt.

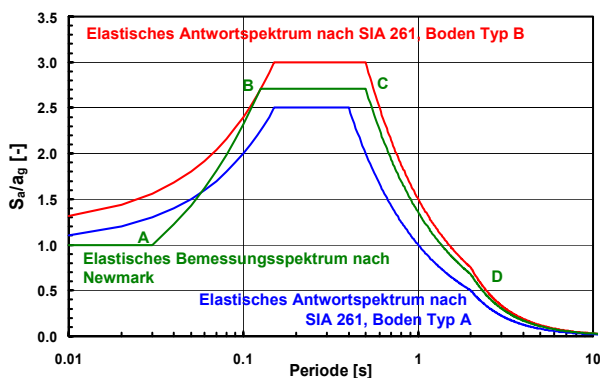


Abb. 13: Elastische Antwortspektren nach SIA 261 vs. elastische Bemessungsspektren nach Newmark.

Aufpassen! Zwischen den üblichen Bezeichnungen der Literatur und den Bezeichnungen der Norm SIA 261 gibt es Unterschiede. In SIA 261 wird S_e für "elastisches Antwortspektrum der Beschleunigung" verwendet, während in der Literatur S_a vorkommt. In SIA 261 wird S_d für "Bemessungsspektrum der Beschleunigung" verwendet, während in der Literatur S_d für "Antwortspektrum der Verschiebung" steht. Weitere Unterschiede bezüglich Bezeichnungen sind in Tabelle 2 zu finden.

SIA		Newmark
elastisches Antwortspektrum	=	elastisches Bemessungsspektrum
Bemessungsspektrum	=	inelastisches Bemessungsspektrum

Tabelle 2: Bezeichnungen gemäss SIA 261 und Newmark.

4.3 Elastische Bemessungsspektren im ADRS-Format

Immer mehr moderne Bemessungsverfahren benötigen die sogenannten Bemessungsspektren im ADRS-Format wobei die Abkürzung für "Acceleration-Displacement-Response Spectra" steht. Solche Spektren werden auch im neuen Merkblatt SIA 2018 (2004) im Rahmen von verformungsbasierten Bemessungsverfahren verwendet.

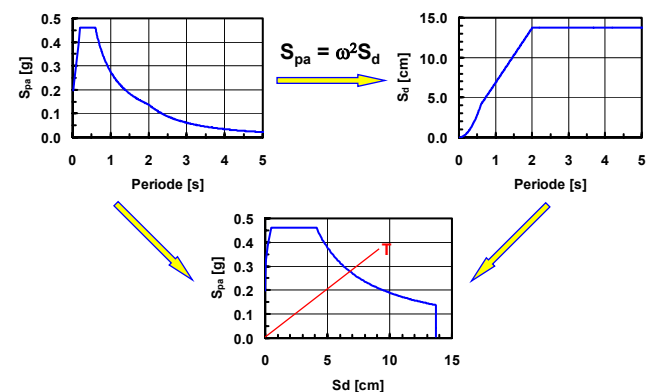


Abb. 14: Konstruktion eines elastischen Bemessungsspektrums in ADRS-Format.

Auch wenn die Diskussion dieser neuen Bemessungsverfahren kein Ziel dieses Beitrags ist, soll mindestens erklärt werden, wie diese Spektren konstruiert werden.

Abbildung 14 zeigt die Konstruktion eines elastischen Bemessungsspektrums im ADRS-Format:

- 1) Zuerst wird das elastische Antwortspektrum der Beschleunigung für die gewünschte Erdbebenzone und die gewählte Baugrundklasse gezeichnet.
- 2) Dann wird das elastische Antwortspektrum der Verschiebung anhand von Gleichung (16) berechnet.
- 3) Anschliessend wird das elastische Bemessungsspektrum im ADRS-Format konstruiert, indem die spektrale Beschleunigung in Funktion der spektralen Verschiebung aufgetragen wird. Die Periode T entspricht Geraden, die durch den Ursprung der Achsen laufen.

Bemessungsspektren im ADRS-Format haben, wie schon Spektren in kombinierter doppelt-logarithmischer Darstellung, den Vorteil, dass sie sehr anschaulich sind.

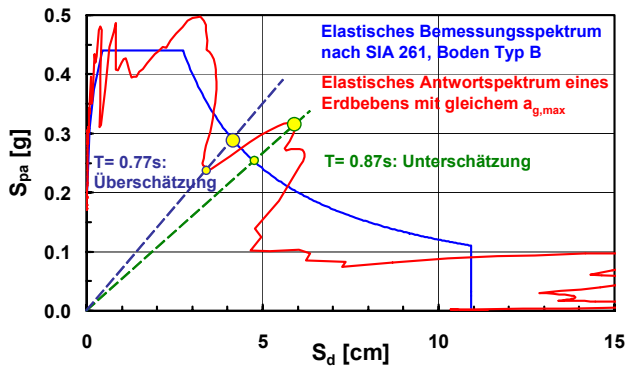


Abb. 15: Spektren im ADRS-Format.

Abbildung 15 zeigt zum Beispiel den Vergleich zwischen dem elastischen Bemessungsspektrum im ADRS-Format nach Norm SIA 261 für Böden Typ B und dem elastischen Antwortspektrum eines gemessenen Erdbebens. Es ist dabei sofort zu erkennen, dass das Bemessungsspektrum die Bewegungsgrößen eines $T=0.77s$ EMS überschätzt, während es die Bewegungsgrößen eines $T=0.87s$ EMS unterschätzt. Im Abschnitt 4.1 wurde erklärt, dass Bemessungsspektren anhand von gemittelten Antwortspektren bestimmt werden. Es ist deshalb möglich, dass einzelne Erdbeben Bereiche aufweisen, die durch größere Spektralwerte im Vergleich zum Bemessungsspektrum charakterisiert sind. Diese wichtige Eigenschaft von Bemessungsspektren soll während der Bemessung von Tragwerken nie vergessen werden.

5 INELASTISCHE ANTWORTSPEKTREN

Im Zusammenhang mit inelastischen Antwortspektren sollen zwei wichtige Begriffe eingeführt werden, nämlich der Reduktionsfaktor R_y und die Verschiebeduktilität μ_Δ . Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen aus Abbildung 16 wird R_y als Verhältnis zwischen dem Widerstand des elastischen EMS f_{el} zur Fließkraft des inelastischen EMS f_y definiert. Die Verschiebeduktilität wird hingegen als Verhältnis zwischen der maximalen Verschiebung des nichtlinearen EMS x_m zu seiner Fließverschiebung x_y definiert.

$$\text{Reduktionsfaktor: } R_y = \frac{f_{el}}{f_y} \quad (21)$$

$$\text{Verschiebeduktilität: } \mu_\Delta = \frac{x_m}{x_y} \quad (22)$$

Das inelastische Antwortspektrum eines gegebenen Erdbebens wird wie folgt berechnet:

- 1) Die viskose Dämpfung und die "Soll-Verschiebeduktilität", für welche das inelastische Antwortspektrum berechnet werden soll, werden festgelegt.

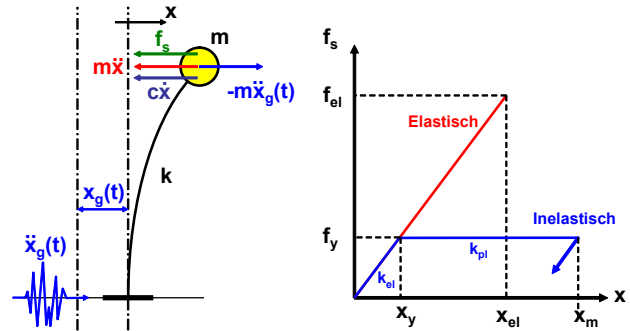


Abb. 16: Begriffe zu den inelastischen Antwortspektren.

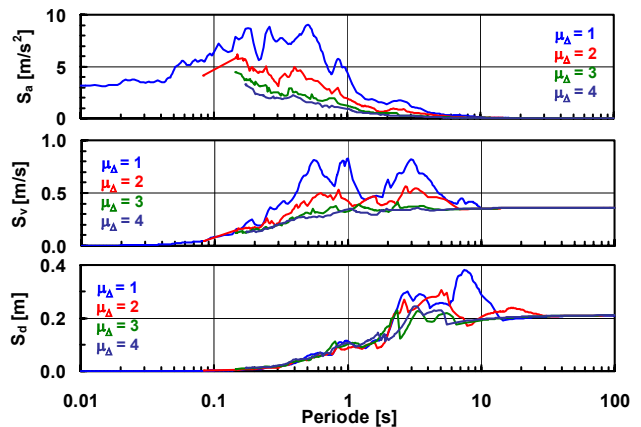


Abb. 17: Inelastische Antwortspektren des "El Centro" Erdbebens berechnet für unterschiedliche Verschiebeduktilitäten. Die viskose Dämpfung ζ beträgt 5%.

- 2) Das elastische Antwortspektrum wird berechnet und die dabei erreichte Federkraft des linearen EMS gespeichert.
- 3) Für jeden elastischen EMS wird ein inelastischer EMS gleicher Periode definiert. Sein Widerstand entspricht der Federkraft des linearen EMS aus Schritt 2 und wird mit einem geschätzten Wert von R_y dividiert und damit eine inelastische Zeitverlaufberechnung durchgeführt. Am Ende der Zeitverlaufberechnung wird die erreichte "Ist-Verschiebeduktilität" bestimmt. Es wird iteriert indem R_y so lange variiert wird, bis die "Ist-Verschiebeduktilität" der "Soll-Verschiebeduktilität" entspricht. Die maximalen Bewegungsgrößen werden dann in Antwortspektrum eingetragen.

Abbildung 17 zeigt die inelastischen Antwortspektren des "El Centro" Erdbebens. Die Antwortspektren der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der Verschiebung wurden für vier verschiedene "Soll-Verschiebeduktilitäten" berechnet. Es können dabei die zwei wichtigsten Eigenschaften von inelastischen Antwortspektren festgestellt werden:

- 1) Da $S_a \cong S_{pa}$, kann auch die spektrale Beschleunigung als Maß für die vorhandene Federkraft interpretiert werden. Bei inelastischen EMS wird die

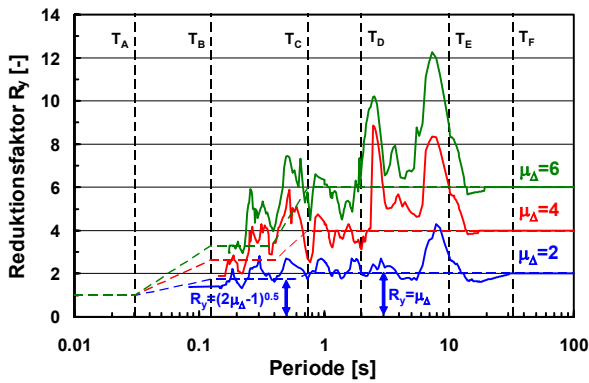


Abb. 18: Reduktionsfaktoren R_y für die Berechnung der Antwortspektren von Abbildung 17.

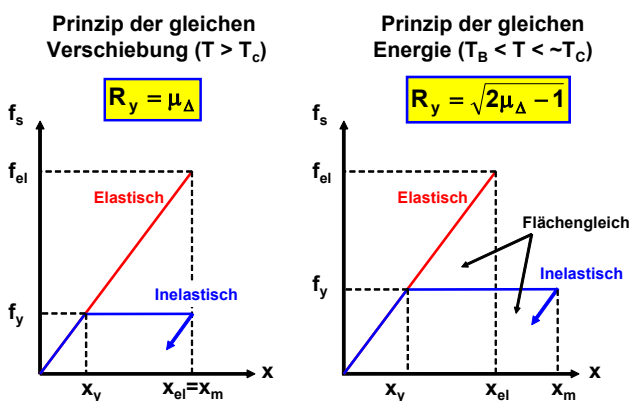


Abb. 19: Ansätze zur Abminderung des Widerstands eines EMS.

Federkraft f_s auf $f_y = f_{el}/R_y$ begrenzt. Für einen gegebenen EMS, wächst R_y beim Wachsen der "Soll-Verschiebeduktilität". Aus diesem Grund führt die Erhöhung der "Soll-Verschiebeduktilität" zu einer Reduktion der spektralen Beschleunigung (Abb. 17, oben).

2) Im Allgemeinen ist die spektrale Verschiebung nicht sehr von der "Soll-Verschiebeduktilität" abhängig. D.h. ein elastischer EMS und ein inelastischer EMS gleicher Periode erfahren im Allgemeinen ähnliche maximale Verschiebungen (Abb. 17, unten).

Die Reduktionsfaktoren R_y , die notwendig waren, um die inelastischen Antwortspektren von Abb. 17 zu berechnen, sind pro "Soll-Verschiebeduktilität" in Abbildung 18 dargestellt. Neben den verwendeten Reduktionsfaktoren (ausgezogene Linien) sind auch mathematische Ansätze angegeben, die zur Schätzung der Reduktionsfaktoren normalerweise angewendet werden (gestrichelten horizontalen Linien). Diese Ansätze sind in Abbildung 19 schematisch dargestellt.

- Das "Prinzip der gleichen Verschiebung" sagt, dass ein elastischer EMS und ein inelastischer EMS gleicher Periode die gleiche maximale Verschiebung erreichen, gleiche Anregung vorausgesetzt.

- Das "Prinzip der gleichen Energie" (oder auch "Prinzip der gleichen Arbeit") sagt, dass ein elastischer EMS und ein inelastischer EMS gleicher Periode beim Erreichen der maximalen Verschiebung (x_{el} bzw. x_m) die gleiche Arbeit geleistet haben.

Es ist dabei zu betonen, dass es sich um empirische Prinzipien und nicht um physikalische Gesetze handelt. Diese Prinzipien wurden aus der statistischen Auswertung von vielen Erdbeben hergeleitet und wenn Mittelwerte betrachtet werden stimmen sie recht gut mit der Wirklichkeit überein. Wenn hingegen, wie in Abbildung 18 deutlich zu erkennen ist, einzelne Erdbeben betrachtet werden, können die Abweichungen zwischen den Prinzipien und der Wirklichkeit sehr gross sein. Erfahrungsgemäss werden diese Abweichungen um so grösser, je grösser die "Soll-Verschiebeduktilität" ist.

6 INELASTISCHE BEMESSUNGSSPEKTREN NACH NEWMARK

Die Abminderungsprinzipien von Abbildung 19 wurden von Newmark entwickelt und zur Konstruktion von inelastischen Bemessungsspektren verwendet (Abbildung 20).

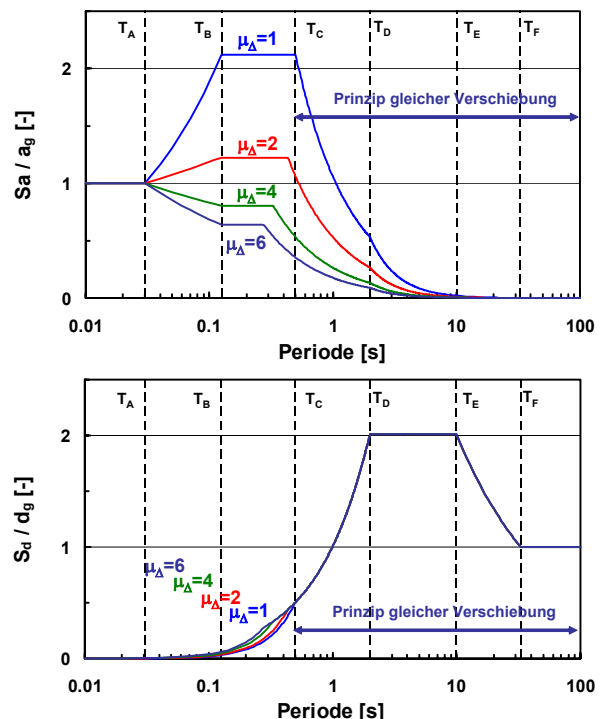


Abb. 20: Inelastische Bemessungsspektren nach Newmark. Beschleunigung (oben) und Verschiebung (unten)

Das inelastische Bemessungsspektrum der Beschleunigung wird für eine gegebene "Soll-Verschiebeduktilität" μ_Δ berechnet, indem das elastische Bemessungsspektrum durch den Reduktionsfaktor R_y

dividiert wird. Für die verschiedenen Periodenbereiche gilt:

$$T < T_A: \quad R_y = 1 \quad (23)$$

$$T_B < T < \tilde{T}_C: \quad R_y = \sqrt{2\mu_\Delta - 1} \quad (24)$$

$$T > T_C: \quad R_y = \mu_\Delta \quad (25)$$

Das inelastische Bemessungsspektrum der Verschiebung wird für eine gegebene "Soll-Verschiebeduktilität" μ_Δ berechnet, indem das elastische Bemessungsspektrum mit dem Faktor μ_Δ/R_y multipliziert wird.

Wichtiger Hinweis: Wird ein Tragwerk für eine statische Ersatzkraft $F = (mS_{a,el})/R_y$ bemessen, betragen die maximalen Verformungen infolge des gleichen Erdbebens $\Delta = \Delta(F) \cdot \mu_\Delta$ und nicht nur $\Delta = \Delta(F)$.

7 INELASTISCHE BEMESSUNGSSPEKTREN NACH NORM SIA 261

Bei den Bemessungsspektren nach Newmark wird das inelastische Verhalten eines EMS durch die Verschiebeduktilität μ_Δ charakterisiert. In der Norm SIA 261 hingegen, wird das inelastische Verhalten eines EMS durch den Verhaltensbeiwert q berücksichtigt. Zwischen beiden Faktoren gilt folgende Beziehung:

$$q = \mu_\Delta \cdot \lambda_o \quad (26)$$

wobei λ_o die inherente Überfestigkeit des Tragwerks darstellt. λ_o liegt in der Größenordnung von 1.5.

Abbildung 21 stellt das Bemessungskonzept der Norm SIA 261 dar und in Abbildung 22 sind die dafür notwendigen Spektren angegeben.

Im Bemessungskonzept der Norm wird das duktile Verhalten von Tragwerken berücksichtigt indem der elastische Bedarf infolge Einwirkung anhand des Verhaltensbeiwerts q reduziert wird, um den Bemessungswert der Einwirkung zu bekommen. Diese Abminderung erfolgt implizit bei der Verwendung der Bemessungsspektren aus Ziffer 16.2.4 von SIA 261. Infolge Anwendung von Sicherheitsfaktoren im Rahmen der Bemessung, besitzt das Tragwerk eine inherente Überfestigkeit und deshalb liegt das erwartete Verhalten des Tragwerks zwischen dem rein elastischen Verhalten und dem Verhalten, dass während der Bemessung angenommen wurde.

In Bezug auf die maximalen Verformungen, die während eines Erdbeben auftreten, hat dieser Unterschied zwischen angenommenem und erwartetem Verhalten keine wesentliche Bedeutung. Die maximalen Verformungen können deshalb als $x_y \cdot q$ berechnet werden, was Ziffer 16.5.5.1 von SIA 261 entspricht.

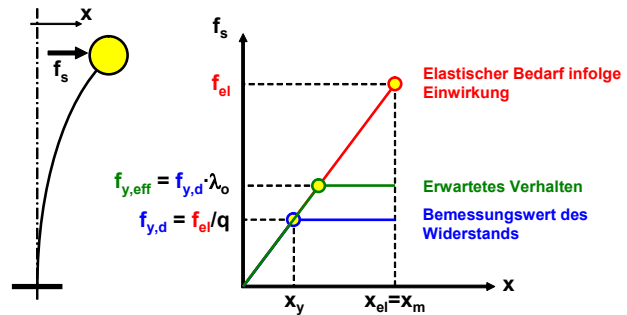


Abb. 21: Verhaltensbeiwert q nach Norm SIA 261.

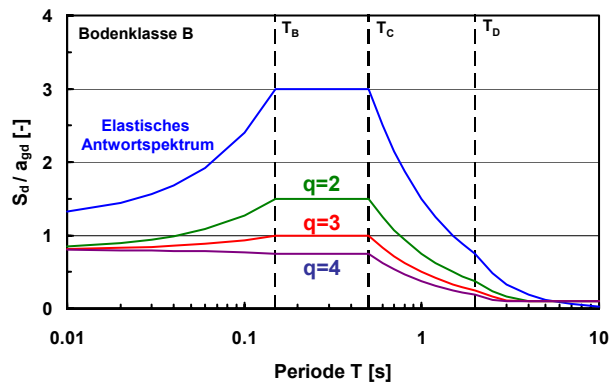


Abb. 22: Bemessungsspektren nach Norm SIA 261.

8 ZUSAMMENFASSUNG

Bemessungsspektren sind sehr nützliche Werkzeuge, um Tragwerke auf die zu erwartende Erdbebeneinwirkung zu bemessen. Im Mittel können Bemessungsspektren die Auswirkung von Erdbeben gut abbilden. Wenn einzelne Erdbeben betrachtet werden, kann es hingegen oft vorkommen, dass die Spektren diese Auswirkung unterschätzen. Diese Eigenschaft der Spektren soll bei Bemessungsaufgaben berücksichtigt werden, indem möglichst robuste Tragwerke angestrebt werden sollen.

9 LITERATUR

- Bachmann H. (2002), Erdbebensicherung von Bauwerken. 2. überarbeitete Auflage. ISBN 3-7643-6941-8. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Chopra A.K. (2001), *Dynamics of Structures*. Second Edition. ISBN 0-13-086973-2. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Newmark N.M., Hall W.J. (1982), *Earthquake Spectra and Design*. EERI Monograph. ISBN 0-943198-22-4.
- SIA 261 (2003), *Einwirkung auf Tragwerke*. Norm. Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich.
- SIA 2018 (2004), *Überprüfung bestehender Gebäude bezüglich Erdbeben*. Merkblatt. Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich.
- SIA D0171 (2002), *Erdbebengerechter Entwurf und Kapazitätsbemessung eines Gebäudes mit Stahlbetontragwänden. Dokumentation*. Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich.