7.6 Schwingungstilger

7.6.1 Einführung

Bei der Betrachtung von “Systemen mit mehreren Freiheitsgrade” wurde bereits im Abschnitt 6.6 “Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung” ein Schwingungstilger behandelt. Dort wurde angenommen, dass sowohl die Hauptstruktur als auch der Schwingungstilger keine Dämpfung hatten.

> Dort war es möglich die Bewegungsgleichung einfach anhand der Modalanalyse zu lösen.

Hier wird die Theorie des Schwingungstilgers mit Dämpfung behandelt. Wie wir sehen werden, muss die Dämpfung von beiden Freiheitsgraden frei wählbar sein, deshalb:

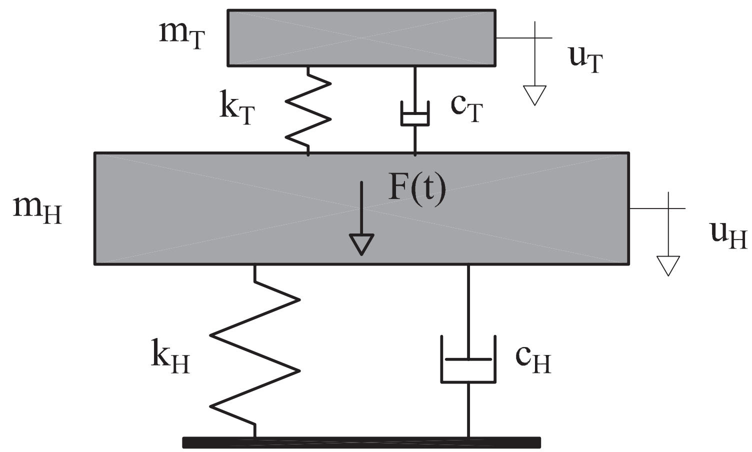
> Beim Schwingungstilger mit Dämpfung kann die Modalanalyse “nicht” verwendet werden

- Literatur

[BW95] Bachmann H., Weber B.: “Tuned Vibration Absorbers for Damping of Lively Structures”. Struct. Eng. Internat., No. 1, 1995.

[Den85] Den Hartog J.P.: “Mechanical Vibrations”. ISBN 0-486-64785-4. Dover Publications,1985. (Nachdruck der originalen vierten Auflage von 1956)

7.6.2 Zweimassenschwinger



Die Bewegungsgleichungen des obengezeichneten Zweimassenschwingers sind:

$$\begin{cases} m_H\ddot{u}_H + c_H\dot{u}_H + c_T(\dot{u}_H - \dot{u}_T) + k_Hu_H + k_T(u_H - u_T) = F(t) \\ m_T\ddot{u}_T + c_T(\dot{u}_T - \dot{u}_H) + k_T(u_T - u_H) = 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

Für eine harmonische Anregung des Typs $F(t) = F_H\cos(\omega t)$ kann für den stationären Anteil der Lösung folgender Ansatz gemacht werden:

$$u_H = U_He^{i\omega t}, \quad u_T = U_Te^{i\omega t}, \quad F(t) = F_He^{i\omega t}, \quad (7.35)$$

Die Anwendung von komplexen Zahlen ermöglicht eine besonders elegante Lösung des Problems. Die Bewegungsgleichungen werden:

$$\begin{cases} [-\omega^2 m_H + i\omega(c_H + c_T) + (k_H + k_T)]U_H + [-i\omega c_T - k_T]U_T = F_H \\ [-i\omega c_T - k_T]U_H + [-\omega^2 m_T + i\omega c_T + k_T]U_T = 0 \end{cases} \qquad (7.36)$$

Um die Lösung des Gleichungssystems zu vereinfachen, werden jetzt einige dimensionslose Parameter eingeführt:

$\gamma = m_T / m_H$:	Verhältnis der Massen (Tilgermasse/Hauptmasse)
$\omega_T = \sqrt{k_T / m_T}$:	Eigenkreisfrequenz des Tilgers
$\omega_H = \sqrt{k_H / m_H}$:	Eigenkreisfrequenz der Hauptstruktur allein
$\beta = \omega_T / \omega_H$:	Verhältnis der Eigenkreisfrequenzen
$\Omega = \omega / \omega_H$:	Verhältnis der Anregungs- zur Eigenfrequenz
ζ_T:	Dämpfungsrate des Tilgers
ζ_H:	Dämpfungsrate der Hauptstruktur
$U_{H0} = F_H / k_H$:	Statische Verformung der Hauptstruktur

Durch Einsetzen von diesen dimensionslosen Parametern in Gleichung (7.36) bekommt man:

$$\begin{cases} [-\Omega^2 + 2i\Omega(\zeta_H + \beta\gamma\zeta_T) + (1 + \beta^2\gamma)]U_H + [-2i\Omega\beta\gamma\zeta_T - \beta^2\gamma]U_T = U_{H0} \\ [-2i\Omega\beta\gamma\zeta_T - \beta^2\gamma]U_H + [-\Omega^2\gamma + 2i\Omega\beta\gamma\zeta_T + \beta^2\gamma]U_T = 0 \end{cases} \qquad (7.37)$$

Anhand von “Maple” kann das Gleichungssystem einfach gelöst und die Vergrösserungsfunktion U_H / U_{H0} bestimmt werden:

$$\frac{U_H}{U_{H0}} = \frac{(\beta^2 - \Omega^2) + 2i\Omega\beta\zeta_T}{[(\beta^2 - \Omega^2) - \Omega^2\beta^2(1-\gamma) + \Omega^2(\Omega^2 - 4\beta\zeta_H\zeta_T)] + 2i[(\beta^2 - \Omega^2)\zeta_H + (1 - \Omega^2 - \Omega^2\gamma)\beta\zeta_T]} \qquad (7.38)$$

Der komplexe Ausdruck, der in Gleichung (7.38) angegeben ist, soll in die Form

$$z = x + iy \qquad \text{oder} \qquad U_H = U_{H0}(x + iy) \qquad (7.39)$$

umgewandelt werden. Die Verschiebung U_H besteht somit aus zwei Komponenten: 1) Eine in Phase mit der Verschiebung U_{H0} und eine andere 2) die eine Phasenverschiebung von $\pi / 4$ aufweist. Diese zwei Komponenten können vektoriell aufsummiert werden und der Betrag von U_H beträgt:

$$|U_H| = U_{H0}\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (7.40)$$

Gleichung (7.38) hat aber die Form

$$U_H = U_{H0}\frac{(A + iB)}{(C + iD)} \qquad (7.41)$$

und muss zuerst wie folgt umgewandelt werden:

$$U_H = U_{H0}\frac{(A + iB) \cdot (C - iD)}{(C + iD) \cdot (C - iD)} = U_{H0}\frac{(AC + BD) + i(BC - AD)}{C^2 + D^2} \qquad (7.42)$$

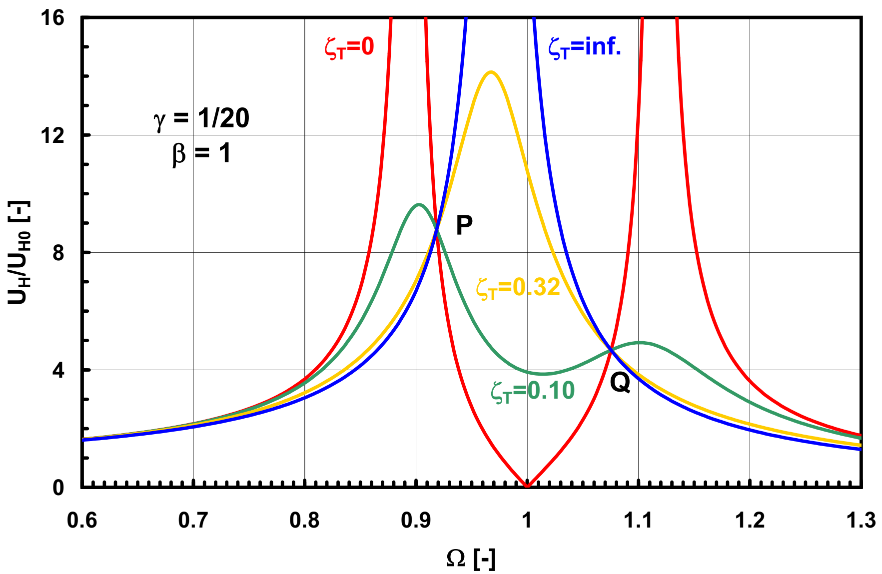
$$|U_H| = U_{H0}\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \qquad (7.43)$$

Somit kann der Betrag der dynamischen Vergrösserungsfunktion einfach berechnet werden:

$$\left|\frac{U_H}{U_{H0}}\right| = \sqrt{\frac{(\beta^2-\Omega^2)^2+(2\Omega\beta\zeta_T)^2}{[(\beta^2-\Omega^2)-\Omega^2\beta^2(1-\gamma)+\Omega^2(\Omega^2-4\beta\zeta_H\zeta_T)]^2+4[(\beta^2-\Omega^2)\zeta_H+(1-\Omega^2-\Omega^2\gamma)\beta\zeta_T]^2}} \qquad (7.44)$$

Ein ähnliches Vorgehen kann angewendet werden, um die dynamische Vergrösserungsfunktion U_T/U_{H0} zu bestimmen.

Gleichung (7.44) wird für eine ungedämpfe Struktur $\zeta_H = 0$ in Funktion von Ω im nächsten Bild dargestellt. Dabei werden verschiedenen Werte für β, γ und ζ_T angenommen.



7.6.3 Optimale Tilgerparameter

Anhand von Betrachtungen am vorherigen Bild hat Den Hartog optimale Tilgerparameter für eine ungedämpfte Struktur gefunden:

$$f_{T,\,opt} = \frac{f_H}{1+m_T/m_H} = \frac{f_H}{1+\gamma} \quad \text{oder} \quad \beta_{opt} = \frac{1}{1+\gamma} \qquad (7.45)$$

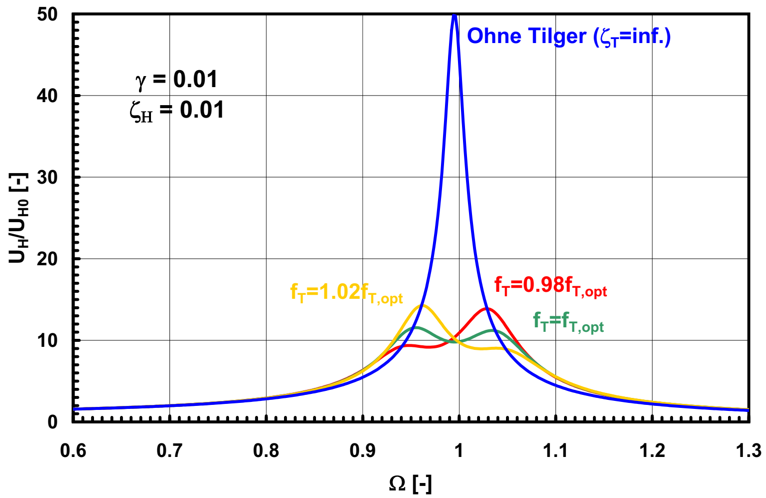
$$\zeta_{T,\,opt} = \sqrt{\frac{3m_T/m_H}{8(1+m_T/m_H)^3}} = \sqrt{\frac{3\gamma}{8(1+\gamma)^3}} \qquad (7.46)$$

Diese optimalen Tilgerparameter sind auch für schwach gedämpfte Strukturen eine gute Annahme und liefern gute Resultate.

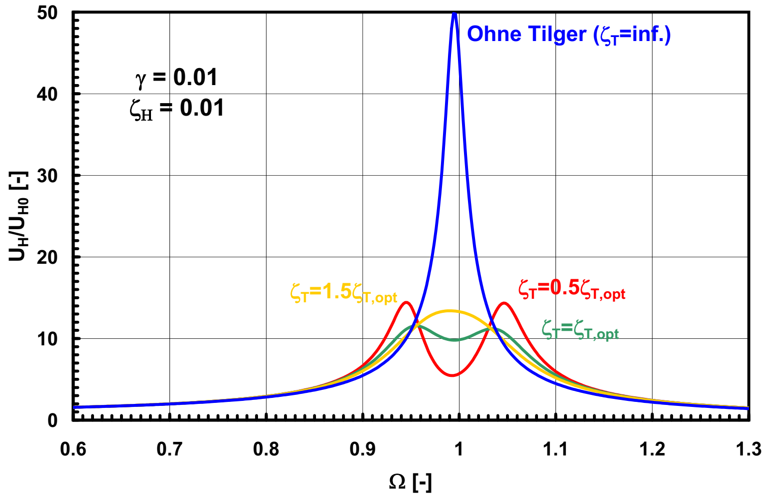
7.6.4 Bemerkungen “Schwingungstilger”

- Die Frequenzabstimmung muss relativ genau sein
- Die Einhaltung der Dämpfung ist weniger wichtig
- Die Bemessungskurven von Tilgern müssen numerisch berechnet werden
- Der Tilger wirkt am meisten wenn die Strukturdämpfung klein ist.
- Es lohnt sich nicht das Massenverhältnis beliebig zu erhöhen
- Bei grossen Massenverhältnissen werden die Schwingungsamplituden des Tilgers kleiner
- Sinnvolle Massenverhältnisse γ betragen 3-5%
- Die genaue Abstimmung erfolgt experimentell (Konstruktive Details!)

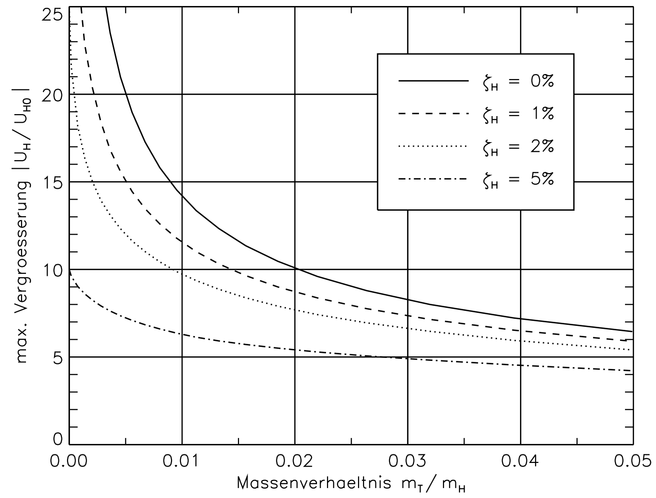
- Vergrösserungsfaktor mit Tilger: Variation der Tilgerfrequenz



- Vergrösserungsfaktor mit Tilger: Variation der Tilgerdämpfung



- Bemessungskurven: Bauwerksverschiebung (aus [BW95])



- Bemessungskurven: relativer Tilgerweg (aus [BW95])