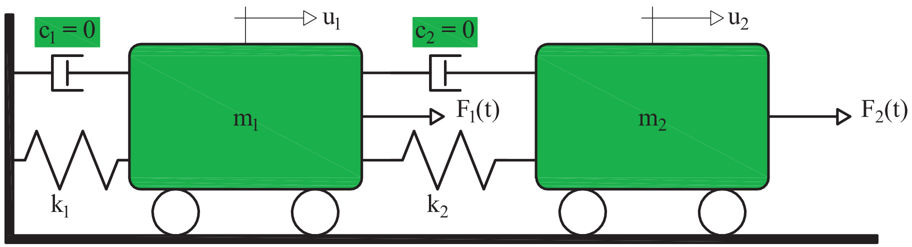
6.6 Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung

6.6.1 Einleitung



Gesucht ist die Antwort des 2-Massenschwingers (2-MS) infolge der Anregungskraft $\mathbf{F}(t)$ wobei:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.139}$$

Die Bewegungsgleichung des Systems ist:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{6.140}$$

Die Verschiebung $\mathbf{u}(t)$ kann anhand der Eigenvektoren des 2-MS als $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$ ausgedrückt werden, und Gleichung (6.140) wird:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \tag{6.141}$$

Gleichung (6.141) kann mit $\boldsymbol{\Phi}^T$ multipliziert werden:

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}(t) \tag{6.142}$$

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{F}^*(t) \tag{6.143}$$

Wobei:

- $\mathbf{M}^*$: Diagonale Matrix der modalen Massen m_n^*
- $\mathbf{K}^*$: Diagonale Matrix der modalen Steifigkeiten k_n^*
- $\mathbf{F}^*$: Vektor der modalen Kräfte F_n^*

Für unseren 2-MS kann Gleichung (6.143) wie folgt umgeformt werden:

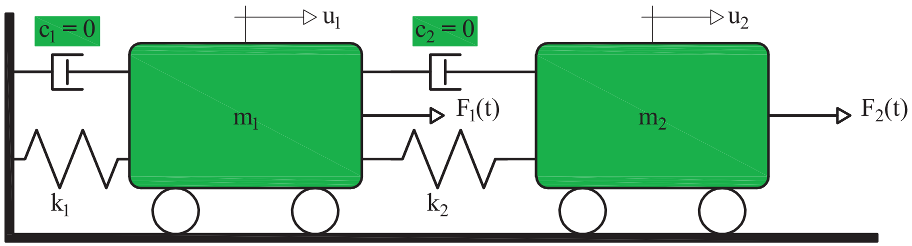
$$\begin{cases} m_1^*\ddot{q}_1 + k_1^*q_1 = F_1^* \\ m_2^*\ddot{q}_2 + k_2^*q_2 = F_2^* \end{cases} \tag{6.144}$$

Oder als Alternative:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \dfrac{F_1^*}{m_1^*} \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \dfrac{F_2^*}{m_2^*} \end{cases} \tag{6.145}$$

Die zwei Gleichungen vom Gleichungssystem (6.145) sind entkoppelt und können separat gelöst werden. Zur Bestimmung der vorhandenen Konstanten werden die Anfangsbedingungen $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u_o}$ und $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v_o}$ beigezogen.

6.6.2 Beispiel 1: Zweimassenschwinger



Die Eigenschaften des 2-Massenschwingers (2-MS) sind:

$$m_1 = 2m \quad , \quad m_2 = m \tag{6.146}$$

$$k_1 = 2k \quad , \quad k_2 = k \tag{6.147}$$

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = 0 \tag{6.148}$$

Die Anregungskraft ist:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.149}$$

Und die modale Anregungskraft wird anhand der Modalmatrix berechnet:

$$\mathbf{F}^*(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_0 \sin(\omega t)}{2} \\ -F_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix} \tag{6.150}$$

Das Gleichungssystem wird:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \dfrac{F_0 \sin(\omega t)}{2 \cdot (3/2)m} = \dfrac{F_0 \sin(\omega t)}{3m} = f_1 \sin(\omega t) \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \dfrac{-F_0 \sin(\omega t)}{3m} = \dfrac{-F_0 \sin(\omega t)}{3m} = f_2 \sin(\omega t) \end{cases} \tag{6.151}$$

mit

$$f_1 = \frac{F_0}{3m} \qquad \text{und} \qquad f_2 = -\frac{F_0}{3m} \tag{6.152}$$

Jede Gleichung des Gleichungssystems (6.151) entspricht der Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers (EMS) ohne Dämpfung mit einer harmonischen “Sinusanregung”. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung wurde im entsprechenden Kapitel über EMS hergeleitet. Sie lautet:

$$q_n = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) + \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \tag{6.153}$$

Die zwei Gleichungen haben folgende Lösungen

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_1 t) + \dfrac{f_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \\ q_2 = A_3 \cos(\omega_2 t) + A_4 \sin(\omega_2 t) + \dfrac{f_2}{\omega_2^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \end{cases} \tag{6.154}$$

Die 4 Konstanten A_1 bis A_4 werden jetzt anhand des Mathematikprogramms “Maple” für die Anfangsbedingungen $\mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ bestimmt. Sie betragen:

$$A_1 = 0 \quad (6.155)$$

$$A_2 = -\frac{\omega/\omega_1}{\omega_1^2-\omega^2}\cdot\frac{F_0}{3m} = -\frac{\omega/\omega_1}{\omega_1^2-\omega^2}\cdot f_1 \quad (6.156)$$

$$A_3 = 0 \quad (6.157)$$

$$A_4 = \frac{\omega/\omega_2}{\omega_2^2-\omega^2}\cdot\frac{F_0}{3m} = -\frac{\omega/\omega_2}{\omega_2^2-\omega^2}\cdot f_2 \quad (6.158)$$

Die Verschiebungen q_n werden:

$$\begin{cases} q_1 = \left(-\dfrac{\omega/\omega_1}{\omega_1^2-\omega^2}\cdot f_1\right)\sin(\omega_1 t) + \dfrac{f_1}{\omega_1^2-\omega^2}\sin(\omega t) \\ q_2 = \left(-\dfrac{\omega/\omega_2}{\omega_2^2-\omega^2}\cdot f_2\right)\sin(\omega_2 t) + \dfrac{f_2}{\omega_2^2-\omega^2}\sin(\omega t) \end{cases} \quad (6.159)$$

oder

$$\begin{cases} q_1 = f_1\left[\dfrac{\sin(\omega t)-(\omega/\omega_1)\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}\right] \\ q_2 = f_2\left[\dfrac{\sin(\omega t)-(\omega/\omega_2)\sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \end{cases} \quad (6.160)$$

Die Verschiebung $\mathbf{u}(t)$ wird damit:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi q}(t) = \sum_n \phi_n q_n(t) = \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t) \quad (6.161)$$

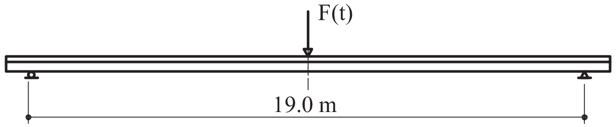
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\left(f_1\left[\frac{\sin(\omega t)-(\omega/\omega_1)\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}\right]\right) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(f_2\left[\frac{\sin(\omega t)-(\omega/\omega_2)\sin(\omega_1 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right]\right) \quad (6.162)$$

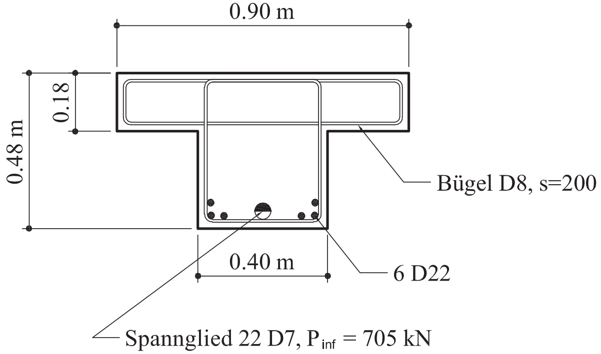
wobei:

$$f_1 = \frac{F_0}{3m},\ f_2 = -\frac{F_0}{3m},\ \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (6.163)$$

6.6.3 Beispiel 2: Stahlbetonbalken mit Tilger ohne Dämpfung

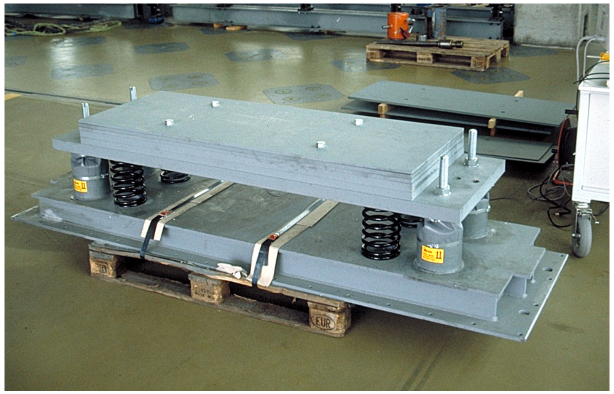
- Stahlbetonbalken





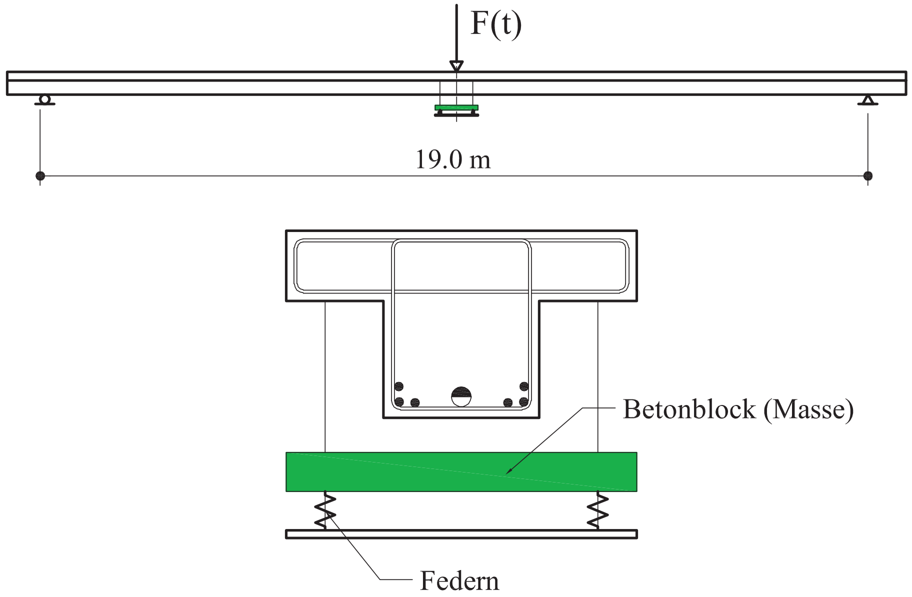
- Dämpfungsrate
  $\zeta_n = 0.0$
- Modale Masse
  $M_n = 5.626\text{t}$
- Modale Steifigkeit
  $K_n = 886\text{kN/m}$
- Eigenfrequenz
  $f_n = 2\text{Hz}$

- Tilger (In diesem Fall wird die Dämpfung vernachlässigt)



- Dämpfungsrate
  $\zeta_T = 0.0$
- Masse
  $M_T = 0.310\text{t}$
- Steifigkeit
  $K_T = 44\text{kN/m}$
- Eigenfrequenz
  $f_T = 1.90\text{Hz}$

- Stahlbetonbalken mit Tilger



- Anregung

Als Anregung wird eine vertikale harmonische “Sinuskraft” angenommen, die nur auf den Balken wirkt.

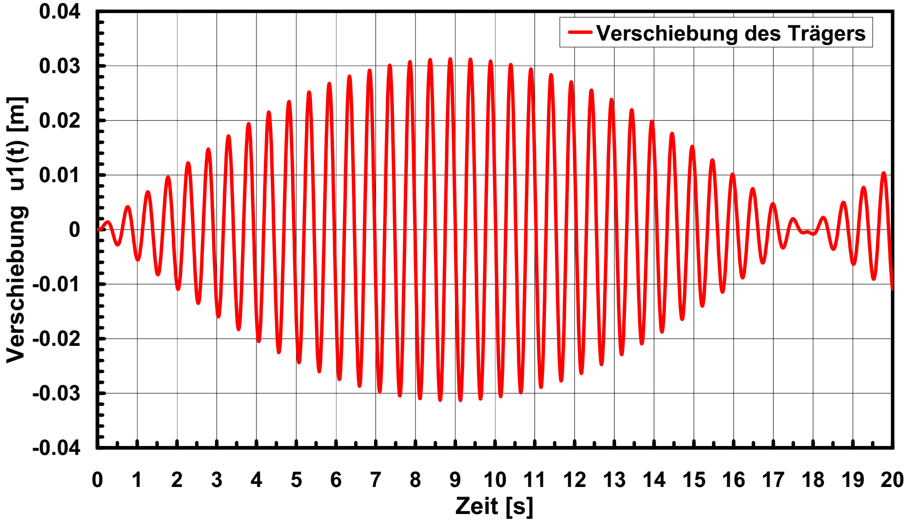
$$F(t) = F_o \sin(\omega t) \qquad (6.164)$$

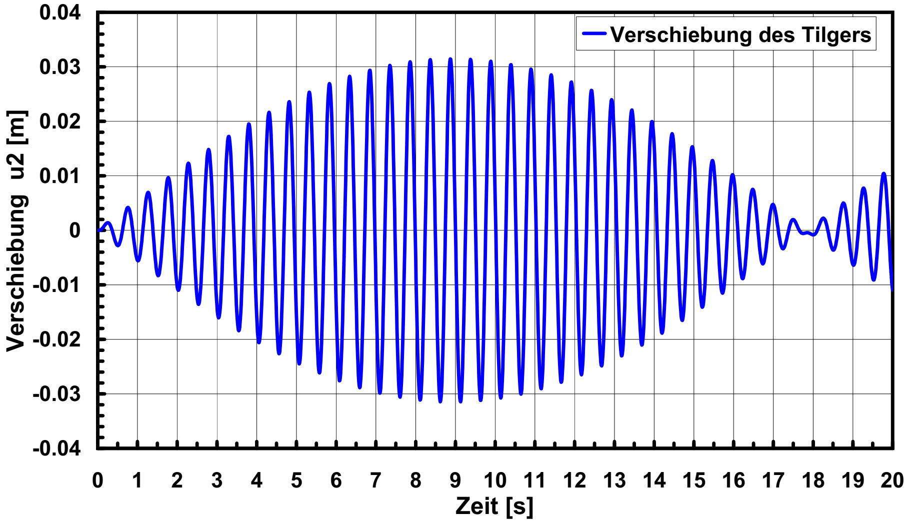
mit: ω: Anregungsfrequenz
F_o: Statische Anregungskraft: $F_o = 0.8\text{kN}$

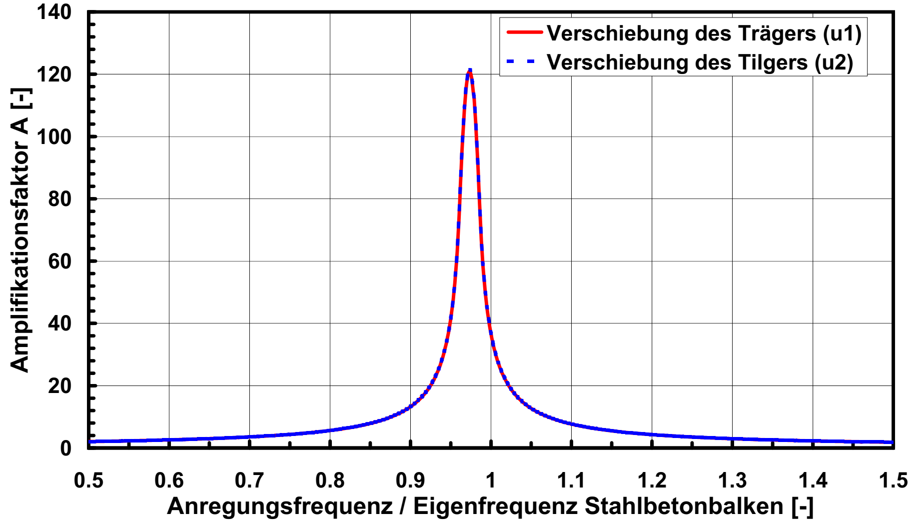
- Lösung

Es wird sowohl den transienten als auch den stationären Anteil der Lösung berücksichtigt.

- Fall 1: $K_T = 10000\mathrm{kN/m}$, Anregungsfrequenz $f = 2\mathrm{Hz}$





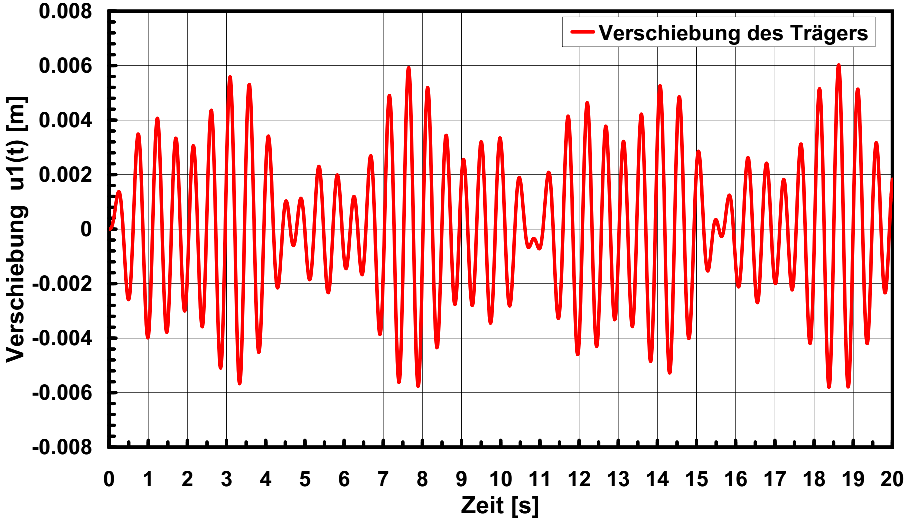


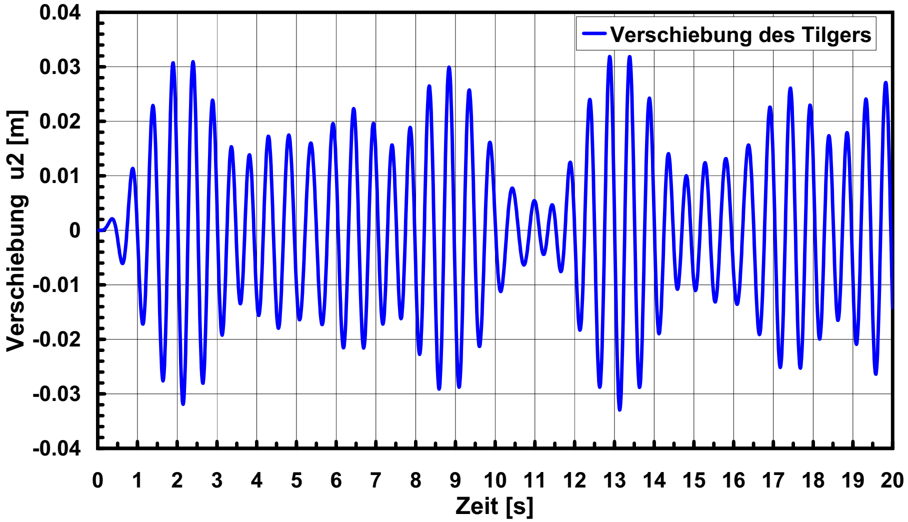
- Bemerkungen
  - Der Amplifikationsfaktor A ist definiert als:

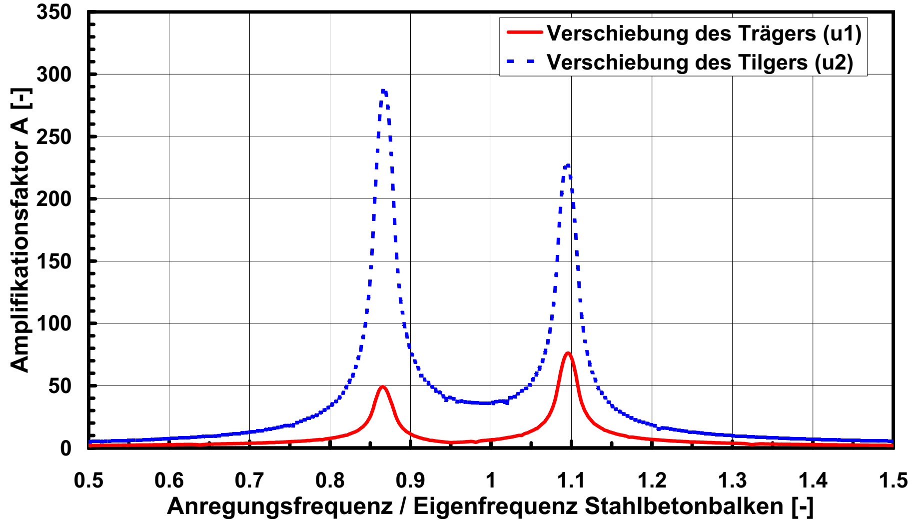
    $A_{Tilger} = u_2/u_{st}$, $A_{Träger} = u_1/u_{st}$

    wobei $u_{st} = F_o/K_n$
  - Berechnung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads
  - Tilger blockiert
  - Eigenfrequenz des Balkens mit Tilger: $f_n = 1.94\mathrm{Hz}$
  - Bei $f = f_n$ tritt Resonanz auf. Im Bild ist der Amplifikationsfaktor begrenzt, weil die Antwort des Systems nur während 60s berechnet wurde.

- Fall 2: $K_T = 44\text{kN/m}$, Anregungsfrequenz $f = 2\text{Hz}$







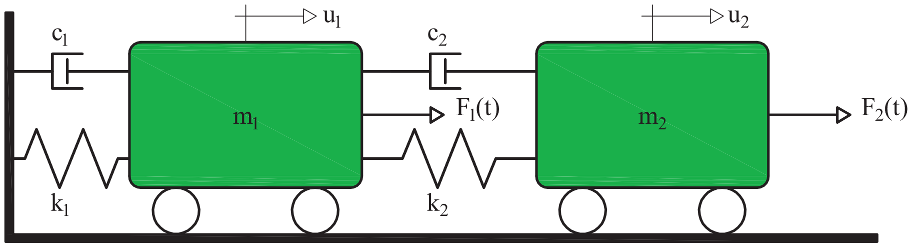
- Bemerkungen
  - Der Amplifikationsfaktor A ist definiert als:

    $A_{Tilger} = u_2/u_{st}$, $A_{Träger} = u_1/u_{st}$

    wobei $u_{st} = F_o/K_n$
  - Berechnung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads
  - Tilger frei beweglich
  - Es tritt keine Resonanz bei $f = f_n$ auf. Resonanz tritt bei der ersten und bei der zweiten Eigenfrequenz des Zweimassenschwingers.
    Im Bild ist der Amplifikationsfaktor begrenzt, weil die Antwort des Systems nur während 60s berechnet wurde.

6.7 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

6.7.1 Einleitung



Gesucht ist die Antwort des 2-Massenschwinger (2-MS) infolge der Anregungskraft $\mathbf{F}(t)$ wobei:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.165}$$

Die Bewegungsgleichung des Systems ist:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{6.166}$$

Die Verschiebung $\mathbf{u}(t)$ kann anhand der Eigenvektoren des 2-MS als $\mathbf{u}(t) = \Phi\mathbf{q}(t)$ ausgedrückt werden, und Gleichung (6.166) wird:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \tag{6.167}$$

Gleichung (6.167) kann mit Φ^T multipliziert werden:

$$\Phi^T\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T\mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \Phi^T\mathbf{K}\Phi\mathbf{q} = \Phi^T\mathbf{F}(t) \tag{6.168}$$

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{F}^*(t) \tag{6.169}$$

Wobei:

- $\mathbf{M}^*$: Diagonale Matrix der modalen Massen m_n^*
- $\mathbf{K}^*$: Diagonale Matrix der modalen Steifigkeiten k_n^*
- $\mathbf{F}^*$: Vektor der modalen Kräfte F_n^*
- $\mathbf{C}^*$: Matrix der modalen Dämpfungen. Ist diagonal nur wenn das System klassisch gedämpft ist.

Für unseren klassisch gedämpften 2-MS kann Gleichung (6.169) wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{cases} m_1^*\ddot{q}_1 + c_1^*\dot{q}_1 + k_1^*q_1 = F_1^* \\ m_2^*\ddot{q}_2 + c_2^*\dot{q}_2 + k_2^*q_2 = F_2^* \end{cases} \tag{6.170}$$

Oder als Alternative:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \dfrac{F_1^*}{m_1^*} \\ \ddot{q}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \dfrac{F_2^*}{m_2^*} \end{cases} \tag{6.171}$$

Die zwei Gleichungen vom Gleichungssystem (6.171) sind entkoppelt und können separat gelöst werden. Zur Bestimmung der vorhandenen Konstanten werden die Anfangsbedingungen $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u_o}$ und $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v_o}$ beigezogen.

6.8 Modalanalyse: Zusammenfassung

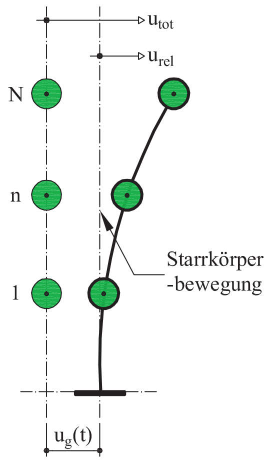
Die dynamische Antwort eines Mehrmassenschwingers (MMS) infolge einer externen Kraft $\mathbf{F}(t)$ kann anhand der Modalanalyse berechnet werden. Die dabei notwendige Schritte sind:

1) Eigenschaften des MMS bestimmen
   - Massenmatrix $\mathbf{M}$ und Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ bestimmen.
   - Modale Dämpfungsraten ζ_n^* schätzen
2) Eigenkreisfrequenzen ω_n und Eigenvektoren ϕ_n bestimmen
   - Berechnung der modalen Eigenschaften des MMS ($\mathbf{M}^*$, $\mathbf{K}^*$)
3) Antwort von jeder Eigenschwingung bestimmen
   - Bewegungsgleichung des modalen EMS aufstellen

     $\ddot{q}_n + 2\zeta_n^*\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \dfrac{F_n^*}{m_n^*}$, und für q_n lösen.
   - Berechnung der modalen Verschiebungen $\mathbf{u_n}(t) = \phi_\mathbf{n} q_n$
   - Berechnung der Schnittkräfte aus der äquivalenten statischen Kräfte $\mathbf{F_n}(t) = \mathbf{K}\mathbf{u_n}(t) = \mathbf{K}\phi_\mathbf{n} q_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\phi_\mathbf{n} q_n(t)$
4) Die Beiträge alle Eigenschwingungen aufsummieren (bzw. kombinieren), um die gesamte Antwort der System zu bekommen.

6.9 Fusspunktanregung

6.9.1 Zeitverlauf der Antwort



Die Bewegungsgleichung eines MMS unter Fusspunktanregung ist:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{tot} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{rel} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{0} \tag{6.172}$$

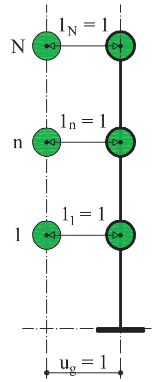
$$\mathbf{u}_{tot} = \mathbf{u}_{rel} + \mathbf{u}_g = \mathbf{u}_{rel} + \mathbf{1}u_g \tag{6.173}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{tot} = \ddot{\mathbf{u}}_{rel} + \mathbf{1}\ddot{u}_g \tag{6.174}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{rel} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{rel} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{rel} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \tag{6.175}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \tag{6.176}$$

wobei $\mathbf{1}$ der Vektor der Starrkörperverschiebungen infolge einer Fusspunktverschiebung $u_g = 1$ in Richtung der Anregung ist.



$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Verschiebung $\mathbf{u}(t)$ kann anhand der Eigenvektoren des MMS als $\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t)$ ausgedrückt werden, und die Gleichung (6.176) wird:

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \tag{6.177}$$

Diese Gleichung kann mit $\Phi^\mathbf{T}$ multipliziert werden:

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q} = -\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \qquad (6.178)$$

Unter Annahme klassischer Dämpfung kann das Gleichungssystem entkoppelt werden und jede modale Gleichung wird:

$$m_n^*\ddot{q}_n + c_n^*\dot{q}_n + k_n^*q_n = -\phi_n^T\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \qquad (6.179)$$

Oder nach Division durch die modale Masse m_n^*:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n^*\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{\phi_n^T\mathbf{M}\mathbf{1}}{\phi_n^T\mathbf{M}\phi_n}\ddot{u}_g \qquad (6.180)$$

wobei die skalare Grösse

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T\mathbf{M}\mathbf{1}}{\phi_n^T\mathbf{M}\phi_n} \qquad (6.181)$$

modale Partizipationsfaktor genannt wird. Der Vektor der modalen Partizipationsfaktoren ist:

$$\Gamma = (\mathbf{M}^*)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{1} \qquad (6.182)$$

Es wird zusätzlich die sogenannte “effektive modale Masse” definiert. Sie beträgt:

$$m_{n,\,eff}^* = \Gamma_n^2 \cdot m_n^* \qquad (6.183)$$

Im Gegensatz zur modalen Masse m_n^*, ist die effektive modale Masse $m_{n,\,eff}^*$ unabhängig von der Normierung der Eigenvektoren und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} m_{n,\,eff}^* = \sum_{n=1}^{N} m_n = m_{tot} \qquad (6.184)$$

Wobei m_{tot} die gesamte Masse des dynamischen Systems ist.

Die modale Höhe h_n^* der n-ten Eigenschwingung wir als

$$h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n} \qquad (6.185)$$

definiert wobei

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^{N} h_j \cdot m_j \cdot \phi_{jn} \qquad (6.186)$$

und der Partizipationsfaktor L_n beträgt:

$$L_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{M}\mathbf{1} \qquad (6.187)$$

- Interpretation der effektiven modalen Masse $m_{n,\,eff}^*$

Die effektive modale Masse $m_{n,\,eff}^*$ ist die konzentrierte Masse eines ein-stöckigen Ersatzsystems, das durch eine Querkraft V_{bn} belastet ist, welche gleich wie die n-te modale Querkraft am Fuss eines mehrstöckigen Systems ist. Wenn die Höhe des einstöckigen Ersatzsystems zusätzlich der modalen Höhe h_n^* entspricht, dann erfährt das ein-stöckige Ersatzsystem ein Fussmoment M_{bn}, welches dem n-ten modalen Fussmoment eines mehrstöckigen Systems entspricht.

Es gelten dabei folgende Gleichungen:

$$V_{bn} = m^*_{n,\,eff} \cdot S_{a,\,n} = \sum_{j=1}^{N} f_{jn} \tag{6.188}$$

$$M_{bn} = m^*_{n,\,eff} \cdot S_{a,\,n} \cdot h^*_n = \sum_{j=1}^{N} f_{jn} \cdot h_j \tag{6.189}$$

$S_{a,\,n}$: Pseudo-Beschleunigung der n-ten Eigenschwingung

- Verteilung der Schnittkräfte

Die Schnittkräfte am Gesamtsystem (MMS) werden berechnet indem zuerst die äquivalente modale statische Ersatzkräfte f_{jn} bestimmt werden:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n \cdot S_{a,\,n} \tag{6.190}$$

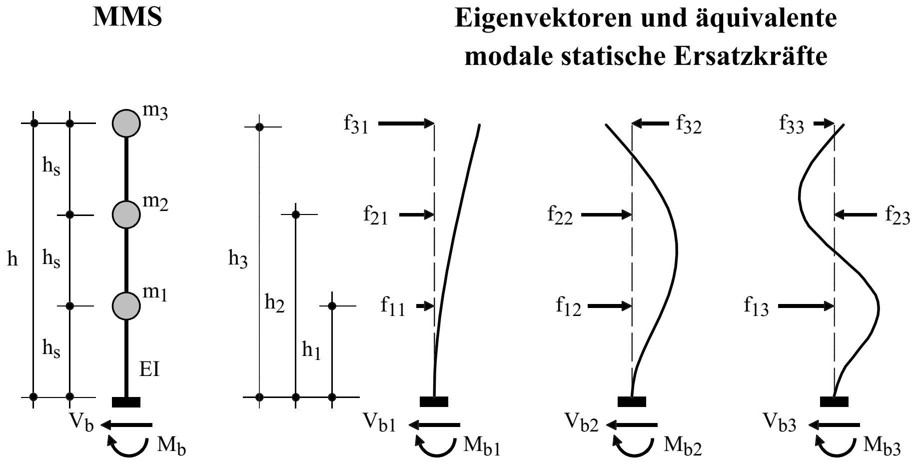
wobei

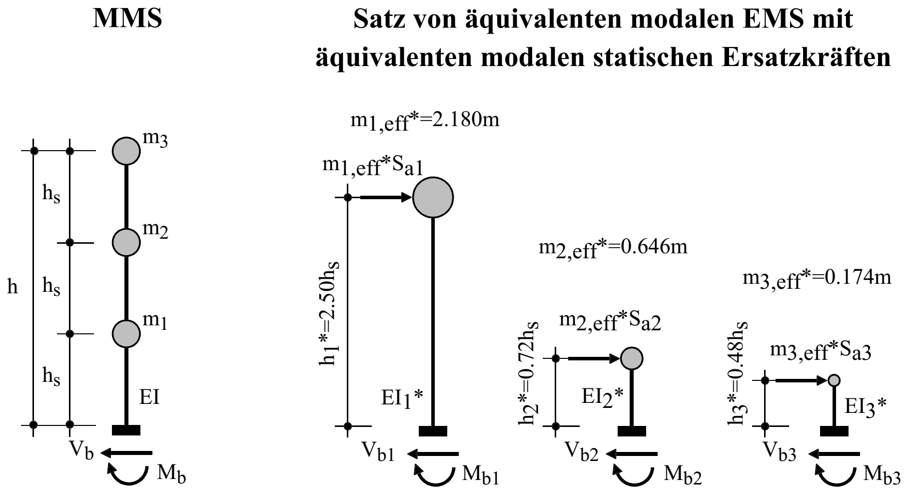
$$\mathbf{f}_n = \left[f_{1n}\ f_{2n}\ \dots\ f_{nn} \right] \tag{6.191}$$

Der Anregungsvektor $\mathbf{s}_n$ ist gemäss Gleichung (6.192) definiert und beschreibt die Verteilung der Trägheitskräften infolge der Anregung der n-ten Eigenschwingung:

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} \tag{6.192}$$

- MMS mit Eigenvektoren und äquivalenten modalen EMS





6.9.2 Maximale Antwort ("Antwortspektrenverfahren")

Wenn nur die maximale Antwort und nicht der ganze Zeitverlauf der Antwort von Interesse ist, kann das sogenannte Antwortspektrumverfahren zur Anwendung kommen. Aus dem Antwortspektrum eines Erdbebens kann der Maximalwert jeder modalen Koordinate $q_{n,\,max}$ einfach bestimmt werden und zwar wie folgt:

$$q_{n,\,max} = \Gamma_n \cdot S_d(\omega_n, \zeta_n^*) = \Gamma_n \cdot \frac{1}{\omega_n^2} \cdot S_a(\omega_n, \zeta_n^*) \qquad (6.193)$$

wobei:

- Γ_n: modaler Partizipationsfaktor der n-ten Eigenschwingung
- $S_d(\omega_n, \zeta_n^*)$: Spektralwert der **Verschiebung** für die Eigenkreisfrequenz ω_n und die modale Dämpfungsrate ζ_n^*.
- $S_a(\omega_n, \zeta_n^*)$: Spektralwert der **Beschleunigung** für die Eigenkreisfrequenz ω_n und die modale Dämpfungsrate ζ_n^*.

Der Beitrag der n-ten Eigenschwingung an die Gesamtverschiebung ist:

$$\mathbf{u}_{n,\,max} = \phi_{\mathbf{n}} \cdot q_{n,\,max} \qquad (6.194)$$

Die Maxima der verschiedenen Eigenschwingungen treten nicht zum gleichen Zeitpunkt auf. Die Beiträge der einzelnen Eigenschwingungen müssen dann möglichst sinnvoll kombiniert werden. Es gibt dabei verschiedene mögliche Verfahren, um das tat-

sächlich vorhandene Maximum zu schätzen. Eine exakte Bestimmung des Maximums ist aber nicht möglich.

- "Absolute Sum (ABSSUM)" Regel

$$u_{i,\,max} \le \sum_{n=1}^{N} \left|\phi_{in} \cdot q_{n,\,max}\right| \qquad (6.195)$$

Die Annahme, dass alle Maxima zum gleichen Zeitpunkt auftreten und die Vernachlässigung deren Vorzeichen liefert eine obere Grenze der Gesamtantwort. Diese Annahme ist normalerweise zu konservativ.

- "Square-Root-of Sum-of-Squares (SRSS)" Regel

$$u_{i,\,max} \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (\phi_{in} \cdot q_{n,\,max})^2} \qquad (6.196)$$

Diese sehr verbreitete Regel liefert sehr gute Resultate bei schwingenden Systemen mit klar getrennten Eigenschwingungen. Bei Systemen mit mehreren ähnlichen Eigenschwingungen kann diese Regel zu einer grobe Unterschätzung der maximalen Antwort führen. Raffiniertere Kombinationsregeln sollen dann angewendet werden. Ein Beispiel dafür ist die sogenannte "Complete Quadratic Combination (CQC)"-Regel. Weiterführende Details können in [Cho07] Kapitel 13.7 gefunden werden.

- Schnittkräfte

Die Regel zur Kombination der modalen Maxima gelten nicht nur für die Verformungen sondern auch für die Schnittkräften.

Die maximalen modalen Schnittkräfte können entweder aus den äquivalenten statischen Kräfte

$$\mathbf{F}_{n,\,max} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_{n,\,max}, \tag{6.197}$$

die aus der äquivalenten statischen Verschiebung entstehen, berechnet werden. Als Alternative können die äquivalenten statischen Kräfte aus der Trägheitskräften bestimmt werden:

$$\mathbf{F}_{n,\,max} = \mathbf{s}_n \cdot S_a(\omega_n, \zeta_n^*) = \Gamma_n \mathbf{M} \phi_n \cdot S_a(\omega_n, \zeta_n^*) \tag{6.198}$$

wobei der Anregungsvektor $\mathbf{s}_n$ die Verteilung der Trägheitskräfte der n-ten Eigenschwingungsform ist. $\mathbf{s}_n$ ist unabhängig von der Normalisierung des Eigenvektors ϕ_n. Es gilt:

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \phi_n \text{ wobei } \sum_{n=1}^{N} \mathbf{s}_n = \mathbf{M1} \tag{6.199}$$

- Anzahl Eigenschwingungen zu berücksichtigen.

Es müssen alle Eigenschwingungen berücksichtigt werden, die an der dynamischen Antwort des Systems beteiligt sind. Es ist dabei zu bemerken, dass um die gleiche Genauigkeit bei unterschiedlichen Antwortgrössen (z.B. Verschiebungen, Querkräfte, Biegemomente, usw.) zu erhalten, vielleicht eine unterschiedliche Anzahl Eigenschwingungen notwendig ist.

Bei einem regelmässigen Gebäude können die Verschiebungen in der Regel unter Berücksichtigung von nur der Grundschwingung recht gut geschätzt werden. Um hingegen die Schnittkräfte

schätzen zu können, sollen auch einige obere Eigenschwingungen berücksichtigt werden.

Gemäss Eurocode 8 “Design of Structures for Earthquake Resistance” sollen so viele Eigenschwingungen berücksichtigt werden, bis die Summe der effektiven modalen Masse $m_{n,\,eff}^*$ alle mitgenommen Eigenschwingungen 90% der Gesamtmasse m_{tot} beträgt. Als Alternative dazu kann nachgewiesen werden, dass alle Eigenschwingungen mit $m_{n,\,eff}^* > 0.05 m_{tot}$ berücksichtigt wurden.

6.9.3 Vorgehen bei mehrgeschossigen Bauten

Die maximale dynamische Antwort eines N-geschossigen Gebäudes kann folgendermassen berechnet werden:

1) Eigenschaften des MMS bestimmen
   - Massenmatrix $\mathbf{M}$ und Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ bestimmen.
   - Modale Dämpfungsraten ζ_n^* schätzen
2) Eigenkreisfrequenzen ω_n und Eigenvektoren ϕ_n bestimmen
   - Berechnung der modalen Eigenschaften des MMS ($\mathbf{M}^*$, $\mathbf{K}^*$)
3) Die maximale Antwort der n-ten Eigenschwingung soll gemäss folgender Punkte bestimmt werden. Dabei sollen alle notwendigen Eigenschwingungen $n = 1, 2, \ldots, \bar{N}$ berücksichtigt werden.

- Für alle Perioden T_n und für die entsprechende Dämpfungsrate ζ_n^*, die spektrale Antwort $S_a(\omega_n,\zeta_n^*)$ aus dem Antwortspektrum der Pseudo-beschleunigung bestimmen. (Analoges Vorgehen für die spektrale Verschiebung $S_d(\omega_n,\zeta_n^*)$)
- Berechnung der maximalen Verschiebungen
  $\mathbf{u}_{n,\,max} = \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{n}} \cdot \Gamma_n \cdot S_d(\omega_n,\zeta_n^*)$
- Berechnung der maximalen äquivalenten statischen Kräfte
  $\mathbf{F}_{n,\,max} = \mathbf{s}_n \cdot S_a(\omega_n,\zeta_n^*) = \Gamma_n \mathbf{M} \phi_n \cdot S_a(\omega_n,\zeta_n^*)$
- Berechnung der maximalen Schnittkräfte anhand der Kräfte $\mathbf{F}_{n,\,max}$

4) Bestimmen der Gesamtantwort der Verschiebungen und der Schnittkräfte durch geeignete Kombination der modalen Beiträge. Dabei können verschiedene Kombinationsregeln zur Anwendung kommen (ABSSUM, SRSS, CQC).

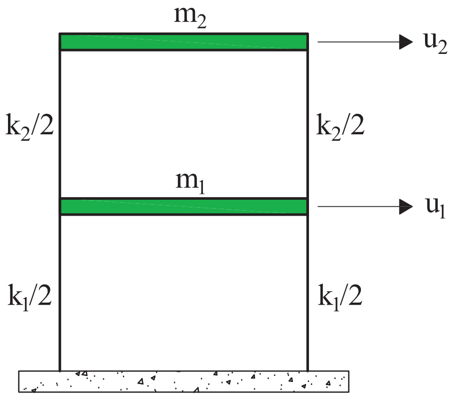
• Bemerkung

Um das nichtlineare Verhalten des Tragwerks zu berücksichtigen, können die maximale äquivalente statische Kräfte anhand der spektralen Antwort $S_a(\omega_n, \zeta_n^*, q)$ aus dem **Bemessungsspektrum** der Pseudobeschleunigung unter Berücksichtigung des Vehaltensbeiwerts q berechnet werden:

$$\mathbf{F}_{n,\,max} = \mathbf{s}_n \cdot S_a(\omega_n, \zeta_n^*, q) = \Gamma_n \mathbf{M} \phi_n \cdot S_a(\omega_n, \zeta_n^*, q) \qquad (6.200)$$

6.9.4 Beispiel “Antwortspektrenverfahren”

Zur Erläuterung des Antwortspektrenverfahrens wird die dynamische Antwort des unterstehenden Zweimassenschwingers (2-MS) infolge des “El Centro” Erdbebens untersucht.



$$m_1 = m_2 = 1t$$

$$k_1 = k_2 = 100 kN/m$$

(Die dynamischen Eigenschaften des 2-MS wurden bereits im Abschnitt 6.2.2 ausgerechnet)

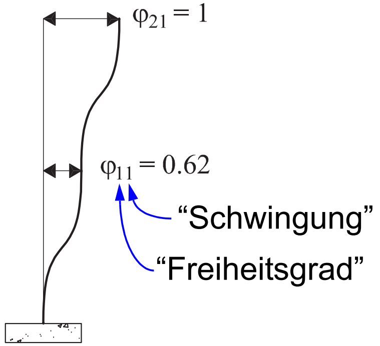
6.9.4.1 Dynamische Eigenschaften

Massenmatrix: $$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t \qquad (6.201)$$

Steifigkeitsmatrix: $$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \qquad (6.202)$$

Modale Dämpfungsraten: $$\zeta_1^* = \zeta_2^* = 0.05 \qquad (6.203)$$

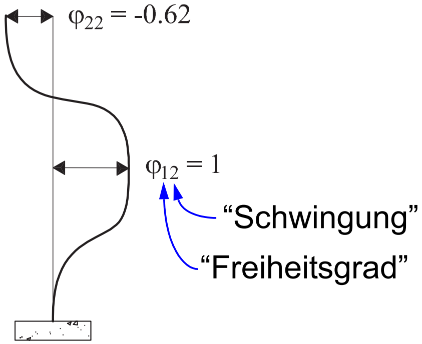
6.9.4.2 Eigenschwingungen



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 6.18\mathrm{Hz}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1.02\mathrm{s}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{1+\sqrt{5}}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.618\\ 1\end{bmatrix}$$



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 16.18\mathrm{Hz}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.39\mathrm{s}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -0.618\end{bmatrix}$$

Modalmatrix: $$\Phi = \begin{bmatrix}\frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1\\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0.618 & 1\\ 1 & -0.618\end{bmatrix} \qquad (6.204)$$

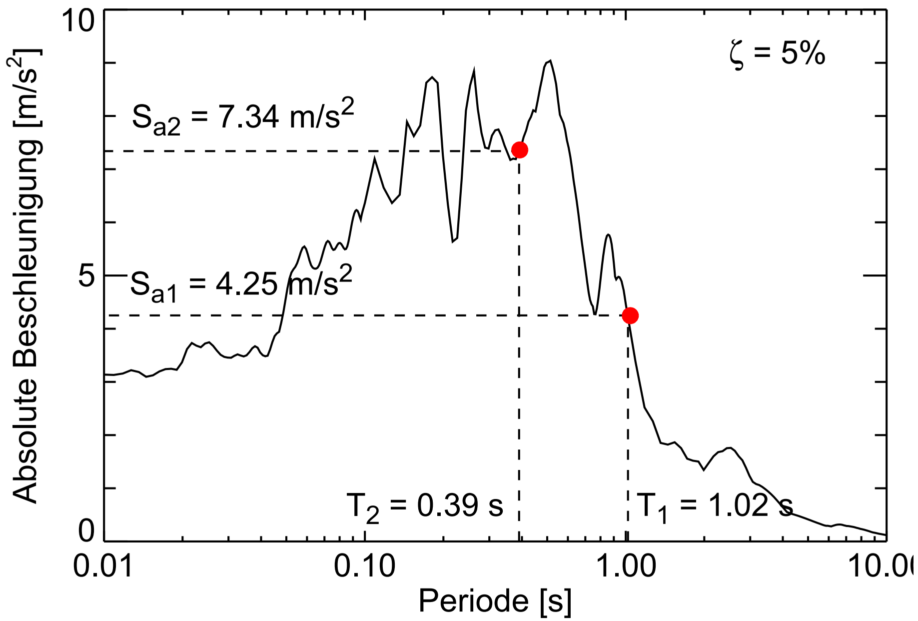
$$\mathbf{M}^* = \Phi^T\mathbf{M}\Phi \approx \begin{bmatrix}1.382 & 0\\ 0 & 1.382\end{bmatrix}\mathrm{t}\ ,\ \mathbf{K}^* = \Phi^T\mathbf{K}\Phi \approx \begin{bmatrix}52.8 & 0\\ 0 & 361.8\end{bmatrix}\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \qquad (6.205)$$

$$\Gamma = (\mathbf{M}^*)^{-1}\Phi^T\mathbf{M1} \approx \begin{bmatrix}\frac{1}{1.382} & 0\\ 0 & \frac{1}{1.382}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0.618 & 1\\ 1 & -0.618\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1.171\\ 0.276\end{bmatrix} \qquad (6.206)$$

6.9.4.3 Antwort jeder Eigenschwingung

EMS 1: $$\ddot{q}_1 + 2\zeta_1^*\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -\Gamma_1\ddot{u}_g \qquad (6.207)$$

EMS 2: $$\ddot{q}_2 + 2\zeta_2^*\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\Gamma_2\ddot{u}_g \qquad (6.208)$$



Die modalen Maximalantworten der beiden Eigenformen erhält man analog zum Einmassenschwinger mit Hilfe des entsprechenden Spektralwertes aus dem Antwortspektrum. Das Maximum der modalen Koordinate q_1 ist gleich:

$$q_{1,\,max} = \Gamma_1 \cdot S_d(T_1,\zeta_1^*) \tag{6.209}$$

$S_d(T_1,\zeta_1^*)$: Spektralwert der Verschiebung für Periode T_1 und Dämpfung ζ_1^* (hier $\zeta_1^* = 5\%$)

Bei Verwendung eines Antwortspektrums der Beschleunigung wird das Maximum der modalen Koordinate q_1:

$$q_{1,\,max} = \Gamma_1 \cdot \frac{1}{\omega_1^2} \cdot S_a(T_1,\zeta_1^*) \tag{6.210}$$

$S_a(T_1,\zeta_1^*)$: Spektralwert der Beschleunigung für Periode T_1 und Dämpfung ζ_1^* (hier $\zeta_1^* = 5\%$)

$$q_{1,\,max} = 1.171 \cdot \frac{1}{6.18^2} \cdot 4.25 = 0.130\text{m} \tag{6.211}$$

$$q_{2,\,max} = 0.276 \cdot \frac{1}{16.18^2} \cdot 7.34 = 0.008\text{m} \tag{6.212}$$

Die maximalen Deformationen und Federkräfte jeder Eigenschwingungsform in den ursprünglichen Koordinaten erhält man, indem der Eigenvektor mit dem entsprechenden Maximum der modalen Koordinate multipliziert wird.

Grundschwingungsform:

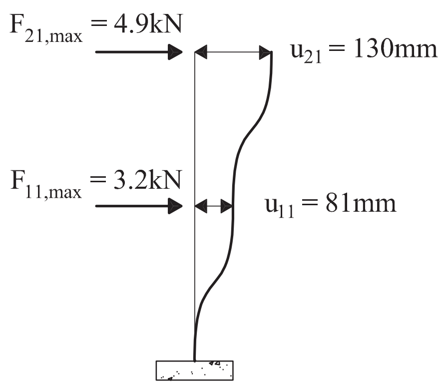
$$\mathbf{u}_{1,\,max} = q_{1,\,max} \cdot \boldsymbol{\phi}_1 = 0.130\text{m} \cdot \begin{bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 130 \end{bmatrix}\text{mm} \tag{6.213}$$

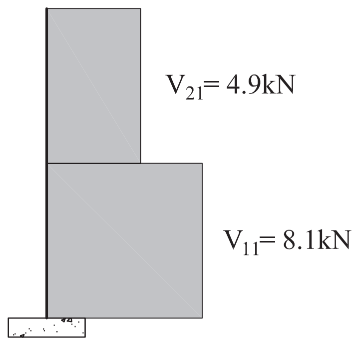
$$\mathbf{F}_{1,\,max} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_{1,\,max} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 4.9 \end{bmatrix}\text{kN} \tag{6.214}$$

Oder als Berechnungsalternative:

$$\mathbf{s}_1 = \Gamma_1 \mathbf{M} \phi_1 = 1.171 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.725 \\ 1.171 \end{bmatrix}\text{t} \tag{6.215}$$

$$\mathbf{F}_{1,\,max} = \mathbf{s}_1 \cdot S_{a1} = 4.25 \begin{bmatrix} 0.725 \\ 1.171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 4.9 \end{bmatrix}\text{kN} \tag{6.216}$$





Höhere Eigenschwingungsform:

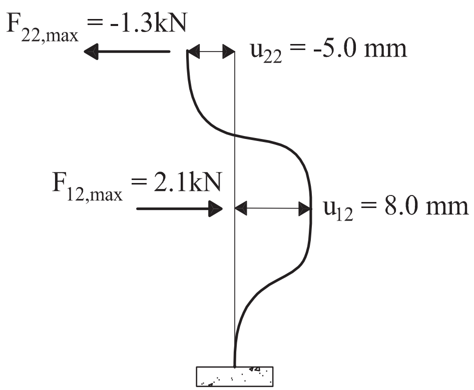
$$\mathbf{u}_{2,\,\max} = q_{2,\,\max} \cdot \phi_2 = 0.008\mathrm{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ -5.0 \end{bmatrix} \mathrm{mm} \tag{6.217}$$

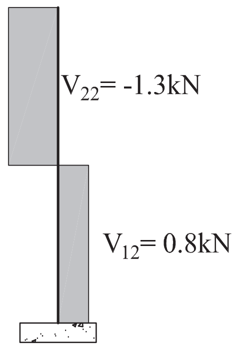
$$\mathbf{F}_{2,\,\max} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_{2,\,\max} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.008 \\ -0.005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ -1.3 \end{bmatrix} \mathrm{kN} \tag{6.218}$$

Oder als Berechnungsalternative:

$$\mathbf{s_2} = \Gamma_2 \mathbf{M} \phi_2 = 0.276 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.276 \\ -0.171 \end{bmatrix} \mathrm{t} \tag{6.219}$$

$$\mathbf{F}_{2,\,\max} = \mathbf{s_2} \cdot S_{a2} = 7.34 \begin{bmatrix} 0.276 \\ -0.171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ -1.3 \end{bmatrix} \mathrm{kN} \tag{6.220}$$





6.9.4.4 Kombination der modalen Beiträge

Die Gesamtantwort wird aus den Maximalantworten der beiden Eigenschwingungsformen nach der SRSS-Kombinationsregel (Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate) bestimmt.

Maximale Verschiebungen:

$$\mathbf{u}[1]_{\max} = \sqrt{\sum_{n=1}^{2} (u_{1,\,n})^2} = \sqrt{(81)^2 + (8)^2} = 81\mathrm{mm} \tag{6.221}$$

$$\mathbf{u}[2]_{\max} = \sqrt{\sum_{n=1}^{2} (u_{2,\,n})^2} = \sqrt{(130)^2 + (-5)^2} = 130\mathrm{mm} \tag{6.222}$$

Die erhaltenen Verschiebungen der Gesamtantwort sind (auf zwei Stellen genau) gleich gross wie die Verschiebungen der Grundschwingungsform. Die relativ kleinen Anteile aus der höheren Schwingungsform gehen in den Berechnungen der SRSS-Kombinationsregel quasi verloren.

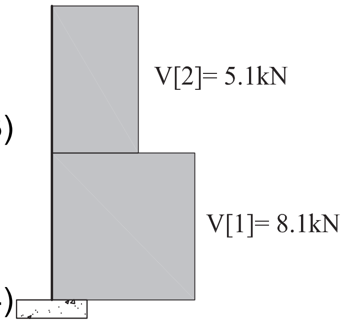
Maximale Schnittkräfte (Querkräfte V)

Obere Querkraft:

$$\mathbf{V}[2]_{\max} = \sqrt{(4.9)^2 + (-1.3)^2} = 5.1\mathrm{kN} \tag{6.223}$$

Untere Querkraft:

$$\mathbf{V}[1]_{\max} = \sqrt{(8.1)^2 + (0.8)^2} = 8.1\mathrm{kN} \tag{6.224}$$



Gegenüber den Schnittkräften der Grundschwingungsform allein stellt man bei den Schnittkräften der Gesamtantwort eine leichte Zunahme im oberen Teil des 2-MS fest.

Falsch wäre es, die maximalen Schnittkräfte direkt aus den maximalen Verschiebungen zu bestimmen:

$$V[1]_{max} \neq 100\text{kN/m} \cdot 0.081\text{m} = 8.1\text{kN} \quad (6.225)$$

$$V[2]_{max} \neq 100\text{kN/m} \cdot (0.130\text{m} - 0.081\text{m}) = 4.9\text{kN} \quad (6.226)$$

Man würde so zu kleine Schnittkräfte erhalten.

6.9.4.5 Antwortspektrumverfahren im Vergleich zu Zeitverlaufsberechnungen

Es werden zwei Fälle untersucht. Fall 1 entspricht dem bereits untersuchten 2-MS. Fall 2 stellt hingegen ein dynamisches System dar, bei welchem die zweite Eigenform eine wesentliche Rolle spielt.

Fall 1		**Fall 2**	
Massen:	$m_1 = 1.0\text{t}$ $m_2 = 1.0\text{t}$	Massen:	$m_1 = 1.0\text{t}$ $m_2 = 0.1\text{t}$
Steifigkeiten:	$k_1 = 100\text{kN/m}$ $k_2 = 100\text{kN/m}$	Steifigkeiten:	$k_1 = 100\text{kN/m}$ $k_2 = 10\text{kN/m}$

Dynamische Eigenschaften

Fall 1	**Fall 2**
Perioden: $T_1 = 1.02\text{s}$ $T_2 = 0.39\text{s}$	Perioden: $T_1 = 0.74\text{s}$ $T_2 = 0.54\text{s}$
Eigenvektoren: 1: $\phi_{11} = 0.618$, $\phi_{21} = 1$ 2: $\phi_{12} = -1.618$, $\phi_{22} = 1$	Eigenvektoren: 1: $\phi_{11} = 0.27$, $\phi_{21} = 1$ 2: $\phi_{12} = -0.37$, $\phi_{22} = 1$
Part. Faktoren: $\Gamma_1 = 1.17$ $\Gamma_2 = -0.17$	Part. Faktoren: $\Gamma_1 = 2.14$ $\Gamma_2 = -1.14$

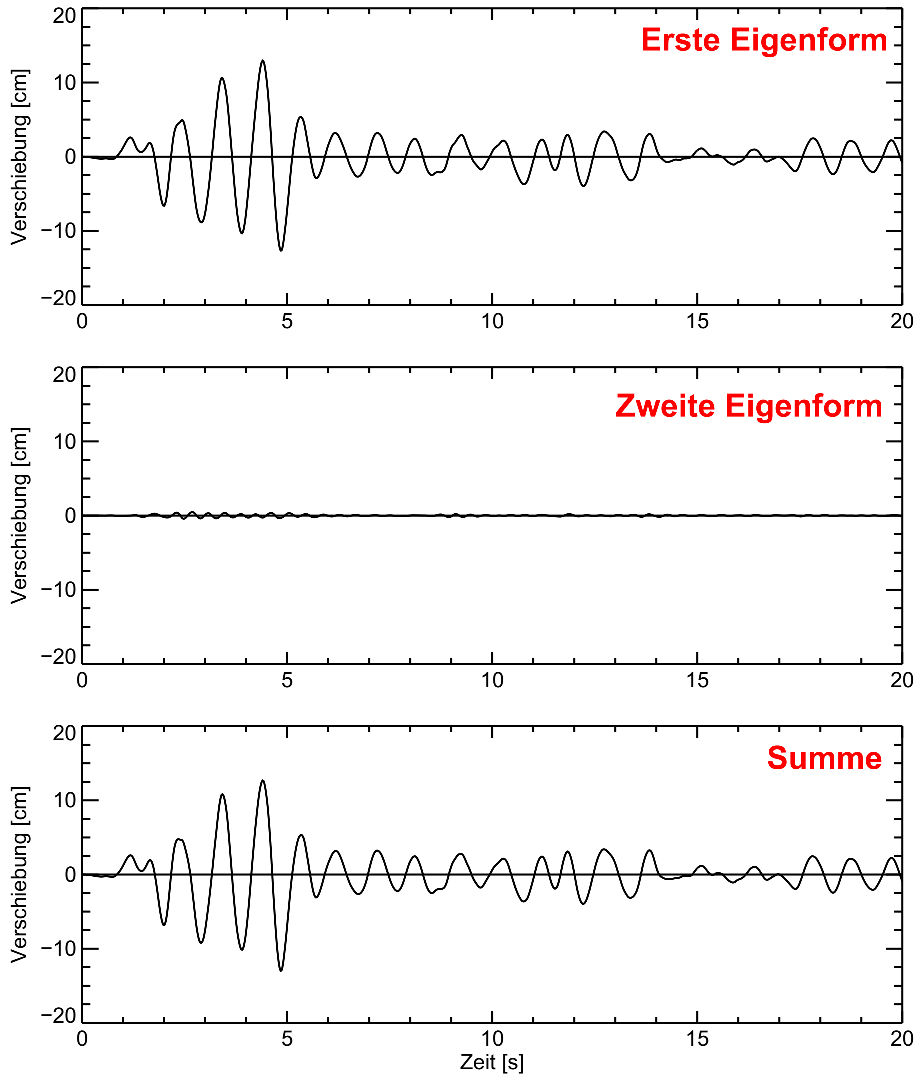
Die Eigenvektoren sind so normiert, dass sie im zweiten Stockwerk gleich Eins sind. Im Fall 1 sind deshalb Eigenvektoren und Partizipationsfaktoren anders als in den vorherigen Abschnitten.

Beanspruchungen

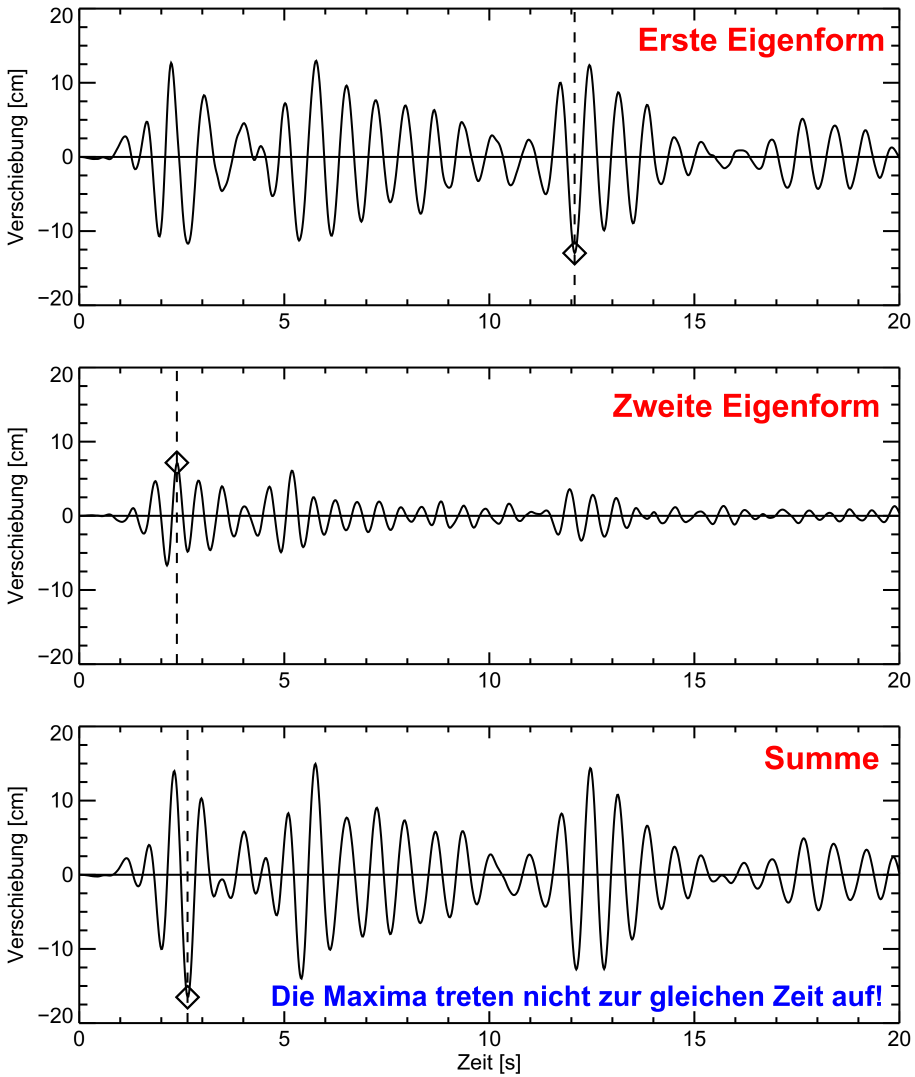
Fall 1		Fall 2	
Verschiebungen:		Verschiebungen:	
1:	$\Delta = 0.129\text{m}$	1:	$\Delta = 0.130\text{m}$
2:	$\Delta = 0.005\text{m}$	2:	$\Delta = 0.072\text{m}$
Summe:	$\Delta = 0.134\text{m}$	Summe:	$\Delta = 0.202\text{m}$
SRSS:	$\Delta = 0.130\text{m}$	SRSS:	$\Delta = 0.148\text{m}$
Zeitverlauf:	$\Delta = 0.130\text{m}$	Zeitverlauf:	$\Delta = 0.165\text{m}$
Querkraft oben:		Querkraft oben:	
SRSS:	$V = 5.10\text{kN}$	SRSS:	$V = 1.36\text{kN}$
Zeitverlauf:	$V = 5.69\text{kN}$	Zeitverlauf:	$V = 1.51\text{kN}$
Querkraft unten:		Querkraft unten:	
SRSS:	$V = 8.05\text{kN}$	SRSS:	$V = 4.40\text{kN}$
Zeitverlauf:	$V = 8.44\text{kN}$	Zeitverlauf:	$V = 4.92\text{kN}$

- Berechnung der Lösung (Zeitverlaufsberechnung) anhand der Excel Datei auf: http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

Zeitverläufe: Fall 1



Zeitverläufe: Fall 2



6.9.4.6 Zeitverläufe