6.5 Dämpfung

6.5.1 Freie Schwingungen mit Dämpfung

Die Differentialgleichung zur Bestimmung der freien Schwingungen eines Mehrmassenschwingers (MMS) ist:

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{C\dot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{0} \tag{6.104}$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u_o} \quad \text{und} \quad \mathbf{\dot{u}}(0) = \mathbf{v_o} \tag{6.105}$$

Die Verschiebung $\mathbf{u}(t)$ kann anhand der Eigenvektoren des MMS als $\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi q}(t)$ ausgedrückt werden, und Gleichung (6.104) wird:

$$\mathbf{M\Phi\ddot{q}} + \mathbf{C\Phi\dot{q}} + \mathbf{K\Phi q} = \mathbf{0} \tag{6.106}$$

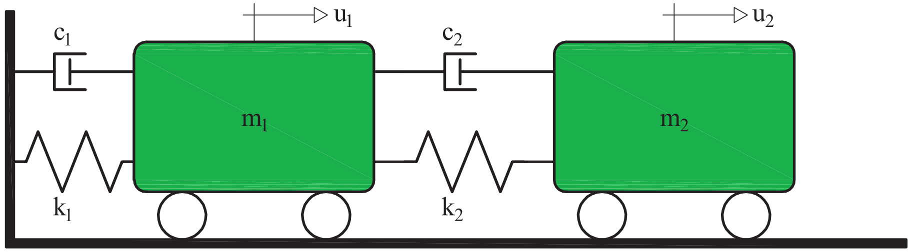
Gleichung (6.106) kann mit $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}$ multipliziert werden:

$$\mathbf{\Phi^T M\Phi\ddot{q}} + \mathbf{\Phi^T C\Phi\dot{q}} + \mathbf{\Phi^T K\Phi q} = \mathbf{0} \tag{6.107}$$

$$\mathbf{M^*\ddot{q}} + \mathbf{C^*\dot{q}} + \mathbf{K^*q} = \mathbf{0} \tag{6.108}$$

- Bemerkungen:
  - Nicht-klassische Dämpfung wenn $\mathbf{C}^*$ nicht diagonal ist
  - Klassische Dämpfung wenn $\mathbf{C}^*$ diagonal ist

6.5.2 Beispiel



Die Eigenschaften des 2-Massenschwingers (2-MS) sind:

$$m_1 = 2m \quad , \quad m_2 = m \tag{6.109}$$

$$k_1 = 2k \quad , \quad k_2 = k \tag{6.110}$$

Die Dämpfungseigenschaften werden noch später definiert.

- **Eigenkreisfrequenzen und Eigenvektoren**

Es kann einfach berechnet werden, dass die Eigenkreisfrequenzen und die Eigenvektoren des 2-MS sind:

$$\text{Eigenkreisfrequenzen:} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{6.111}$$

$$\text{Eigenvektoren:} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.112}$$

- **Nicht-klassische Dämpfung**

Die Dämpfungseigenschaften des 2-MS werden als

$$c_1 = c \quad , \quad c_2 = 4c \tag{6.113}$$

gewählt. Die Bewegungsgleichung des Systems kann anhand der Gleichgewichtformulierung (siehe entsprechendes Kapitel) bestimmt werden:

$$m\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}5 & -4\\-4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{6.114}$$

Es wird jetzt versucht, die Gleichungen zu entkoppeln, indem die modalen Grössen des 2-MS berechnet werden:

$$\mathbf{M}^* = \Phi^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\Phi = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2m & 0\\0 & m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}m & 0\\0 & 3m\end{bmatrix} \tag{6.115}$$

$$\mathbf{K}^* = \Phi^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\Phi = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3k & -k\\-k & k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4}k & 0\\0 & 6k\end{bmatrix} \tag{6.116}$$

$$\mathbf{C}^* = \Phi^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\Phi = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5c & -4c\\-4c & 4c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{4}c & \frac{7}{2}c\\\frac{7}{2}c & 17c\end{bmatrix} \tag{6.117}$$

Die Matrix $\mathbf{C}^*$ ist nicht diagonal, deshalb ist es unmöglich, die Gleichungen zu entkoppeln!

- **Klassische Dämpfung**

Die Dämpfungseigenschaften des 2-MS werden als

$$c_1 = 4c \quad , \quad c_2 = 2c \tag{6.118}$$

gewählt. Die Bewegungsgleichung des Systems kann anhand der Gleichgewichtformulierung (siehe entsprechendes Kapitel) bestimmt werden:

$$m\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}6 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{6.119}$$

Es wird jetzt versucht, die Gleichungen zu entkoppeln, indem die modalen Grössen des 2-MS berechnet werden:

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}m & 0\\0 & 3m\end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}^* = \begin{bmatrix}\frac{3k}{4} & 0\\0 & 6k\end{bmatrix} \tag{6.120}$$

$$\mathbf{C}^* = \Phi^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\Phi = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6c & -2c\\-2c & 2c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}c & 0\\0 & 12c\end{bmatrix} \tag{6.121}$$

Die Matrix $\mathbf{C}^*$ ist diagonal, deshalb ist es möglich, die Gleichungen zu entkoppeln!

6.5.3 Klassische Dämpfungsmatrizen

- **Massenproportionale Dämpfung (MpD)**

$$\mathbf{C} = a_o\mathbf{M} \tag{6.122}$$

Die Dämpfungskonstante jeder Schwingung ist deshalb:

$$c_n^* = a_o m_n^* \tag{6.123}$$

und die Dämpfungsrate ζ_n wird (Siehe Abschnitt über gedämpfte Schwingungen von Einmassenschwingern):

$$\zeta_n = \frac{c_n^*}{2\omega_n m_n^*} = \frac{a_o m_n^*}{2\omega_n m_n^*} = \frac{a_o}{2\omega_n} \tag{6.124}$$

- **Steifigkeitsproportionale Dämpfung (SpD)**

$$\mathbf{C} = a_1\mathbf{K} \tag{6.125}$$

Die Dämpfungskonstante jeder Schwingung ist deshalb:

$$c_n^* = a_1 k_n^* = a_1\omega_n^2 m_n^* \tag{6.126}$$

und die Dämpfungsrate ζ_n wird:

$$\zeta_n = \frac{c_n^*}{2\omega_n m_n^*} = \frac{a_1\omega_n^2 m_n^*}{2\omega_n m_n^*} = \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{6.127}$$

- Bemerkung

Sowohl **MpD** als auch **SpD** sind, allein betrachtet, keine gute Approximation des Verhaltens von wirklichen Strukturen, weil Ver-

suche gezeigt haben, dass verschiedene Eigenschwingungen, ähnliche Dämpfungsraten aufweisen.

- **Rayleigh Dämpfung**

$$\mathbf{C} = a_o\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \tag{6.128}$$

Die Dämpfungskonstante jeder Schwingung ist deshalb:

$$c_n^* = a_o m_n^* + a_1 k_n^* = (a_o + a_1\omega_n^2)m_n^* \tag{6.129}$$

und mit den Resultaten aus **MpD** und **SpD** wird die Dämpfungsrate ζ_n zu:

$$\zeta_n = \frac{a_o}{2\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{6.130}$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 können für die Eigenschwingungen i und j anhand von Gleichung (6.131) bestimmt werden.

$$\begin{cases} \dfrac{a_o}{2}\cdot\dfrac{1}{\omega_i} + \dfrac{a_1}{2}\cdot\omega_i = \zeta_i \\[2ex] \dfrac{a_o}{2}\cdot\dfrac{1}{\omega_j} + \dfrac{a_1}{2}\cdot\omega_j = \zeta_j \end{cases} \tag{6.131}$$

Falls $\zeta_i = \zeta_j = \zeta$, werden die Bestimmungsausdrücke für a_o und a_1:

$$a_o = \zeta\cdot\frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \qquad a_1 = \zeta\cdot\frac{2}{\omega_i + \omega_j} \tag{6.132}$$

6.5.4 Beispiel

Für den 2-MS aus Seite 158 soll eine Dämpfungsmatrix zusammengestellt werden, sodass beide Eigenschwingungen eine Dämpfungsrate ζ aufweisen:

Die Eigenkreisfrequenzen betragen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{6.133}$$

Somit werden die Koeffizienten a_0 und a_1 zu:

$$a_0 = \frac{4\zeta}{3} \cdot \sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot \frac{k}{m}, \qquad a_1 = \frac{4\zeta}{3} \cdot \sqrt{\frac{m}{2k}} \tag{6.134}$$

und die Dämpfungsmatrix $\mathbf{C} = a_o\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$ wird zu:

$$C = \frac{4\zeta}{3} \cdot \sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \cdot 2m + 3k & 0 - k \\ 0 - k & \frac{k}{m} \cdot m + k \end{bmatrix} = \frac{4\zeta}{3} \cdot \sqrt{\frac{mk}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.135}$$

Zur Kontrolle:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{4\zeta}{3} \cdot \sqrt{\frac{mk}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \zeta \cdot \sqrt{\frac{mk}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \tag{6.136}$$

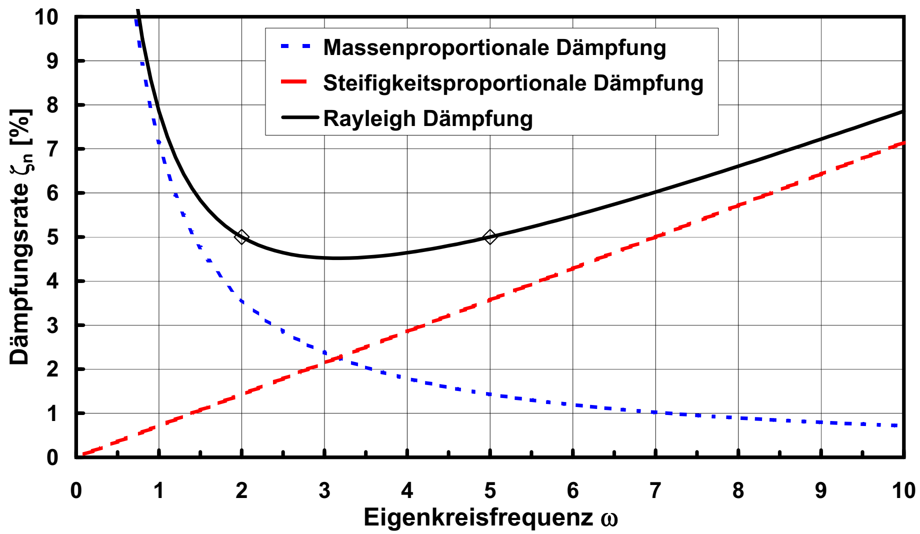
Die Dämpfungsmatrix ist diagonal. Es können jetzt Werte für m, k und ζ gewählt werden, sodass:

$$\omega_1 = 2\text{rad/s}, \ \omega_2 = 5\text{rad/s}, \ \zeta = 5\% \tag{6.137}$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 werden:

$$a_0 = 14.287, \qquad a_1 = 1.429 \tag{6.138}$$

Und die Darstellung der Dämpfungsrate in Funktion der Eigenkreisfrequenz ist:



- Bemerkungen
  - Falls mehr als 2 Eigenschwingungen vorhanden sind, dann haben nicht alle die gleiche Dämpfungsrate.
  - Falls bei mehr als 2 Eigenschwingungen die gleiche Dämpfungsrate vorhanden sein soll, dann soll ein anderes Dämpfungsmodell verwerdet werden. Siehe diesbezüglich zum Beispiel die “Caughey-Dämpfung” in [Cho07].