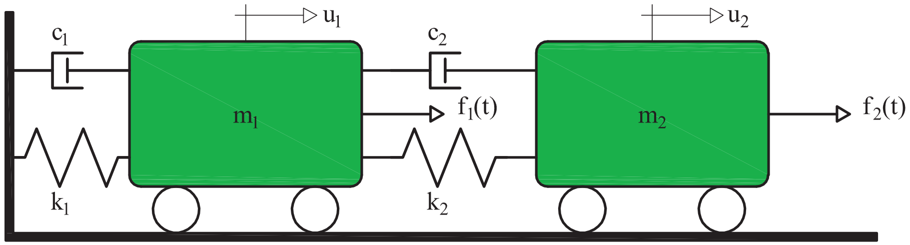
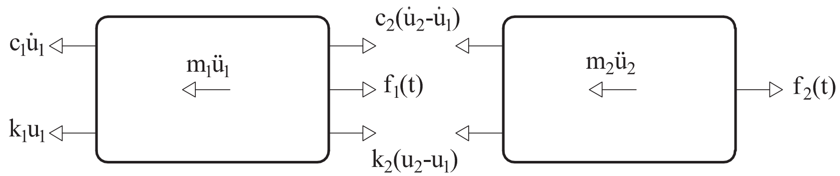
6 Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

6.1 Formulierung der Bewegungsgleichung

6.1.1 Gleichgewichtsformulierung





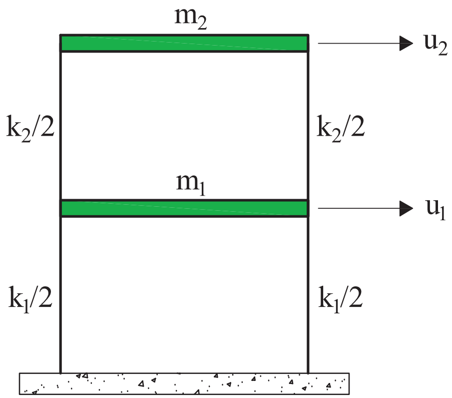
$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 = f_1(t) + c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) + k_2(u_2-u_1) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) + k_2(u_2-u_1) = f_2(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + (c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 = f_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + c_2\dot{u}_2 - k_2u_1 + k_2u_2 = f_2(t) \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{C\dot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{f}(t) \tag{6.4}$$

6.1.2 Steifigkeitsformulierung

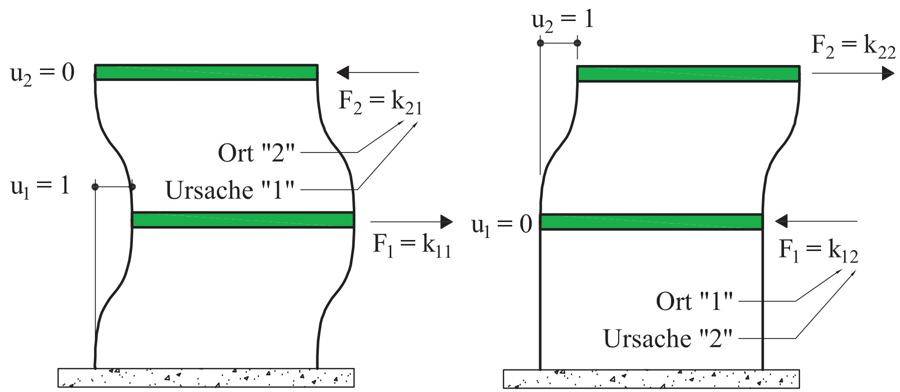


Die Freiheitsgrade sind die horizontalen Verschiebungen u_1 und u_2 auf Höhe der Massen m_1 und m_2

- Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Einheitsverschiebung $u_1 = 1$ Einheitsverschiebung $u_2 = 1$



- Massenmatrix $\mathbf{M}$

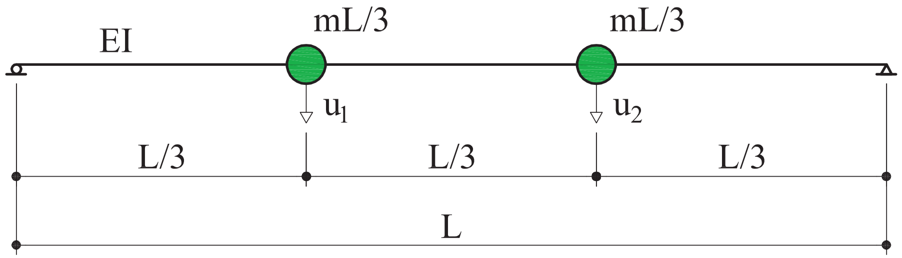
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

- Bewegungsgleichung

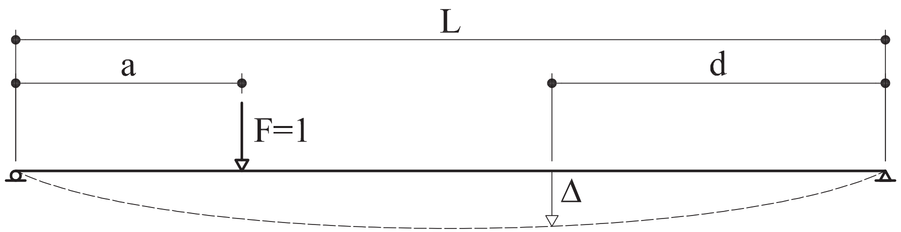
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6.8}$$

6.1.3 Nachgiebigkeitsformulierung



- Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D}$



Anhand der Arbeitsgleichung kann die Einsenkung Δ die am Ort d infolge einer Einheitskraft $F = 1$ am Ort a entsteht, berechnet werden.

$$\Delta(\alpha,\delta) = -\alpha\delta(\alpha^2+\delta^2-1)\cdot\frac{FL^3}{6EI} \text{ mit } \alpha = \frac{a}{L} \text{ und } \delta = \frac{d}{L} \tag{6.9}$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix besteht aus folgenden Elementen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{F} \tag{6.10}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Anhand von Gleichung (6.9) können die Faktoren d_{ij} berechnet werden:

$$d_{11} = \Delta(1/3, 2/3) = \frac{4}{243}\cdot\frac{L^3}{EI} \tag{6.12}$$

$$d_{12} = \Delta(2/3, 2/3) = \frac{7}{486}\cdot\frac{L^3}{EI} \tag{6.13}$$

$$d_{21} = \Delta(1/3, 1/3) = \frac{7}{486}\cdot\frac{L^3}{EI} \tag{6.14}$$

$$d_{22} = \Delta(2/3, 1/3) = \frac{4}{243}\cdot\frac{L^3}{EI} \tag{6.15}$$

Und die Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D}$ wird

$$\mathbf{D} = \frac{L^3}{486EI}\cdot\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

- Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{162}{5} \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

- Massenmatrix $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

- Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \frac{162}{5} \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6.20}$$

6.1.4 Prinzip der virtuellen Arbeit

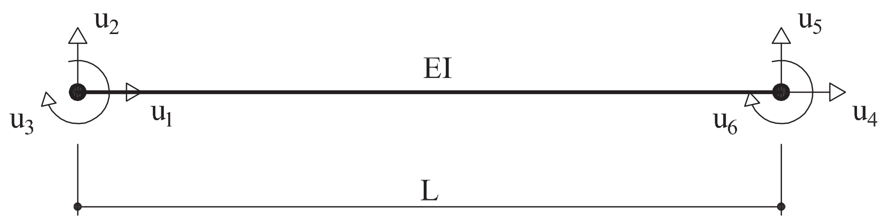
- Siehe [Web02]

6.1.5 Energieformulierung

- Siehe [Web02]

6.1.6 "Direct Stiffness Method"

- Steifigkeitsmatrix eines Balkenelements

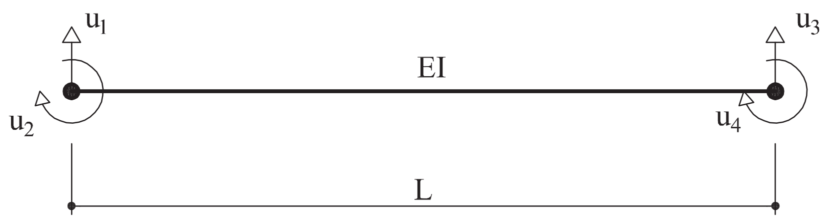


Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ eines Balkenelements mit konstanter Biege- und Dehnsteifigkeit ist bekanntlich:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} \tag{6.21}$$

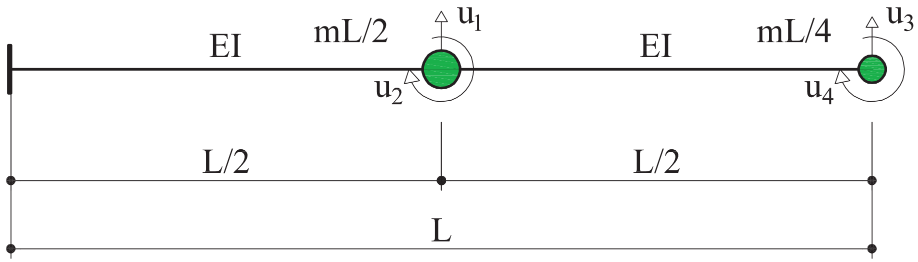
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Wenn die axiale Dehnung des Stabs nicht berücksichtigt wird, vereinfacht sich die Matrix wie folgt:



$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (6.23)$$

- Beispiel Kragarm



Zusammenstellen der Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{\bar{L}^3} \cdot \begin{bmatrix} 12+12 & -6\bar{L}+6\bar{L} & -12 & 6\bar{L} \\ -6\bar{L}+6\bar{L} & 4\bar{L}^2+4\bar{L}^2 & -6\bar{L} & 2\bar{L}^2 \\ -12 & -6\bar{L} & 12 & -6\bar{L} \\ 6\bar{L} & 2\bar{L}^2 & -6\bar{L} & 4\bar{L}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \qquad (6.24)$$

mit $\bar{L} = L/2$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} m\bar{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\bar{L}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{\bar{L}^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6\bar{L} \\ 0 & 8\bar{L}^2 & -6\bar{L} & 2\bar{L}^2 \\ -12 & -6\bar{L} & 12 & -6\bar{L} \\ 6\bar{L} & 2\bar{L}^2 & -6\bar{L} & 4\bar{L}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} m\bar{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\bar{L}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{\bar{L}^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 6\bar{L} \\ -12 & 12 & -6\bar{L} & -6\bar{L} \\ 0 & -6\bar{L} & 8\bar{L}^2 & 2\bar{L}^2 \\ 6\bar{L} & -6\bar{L} & 2\bar{L}^2 & 4\bar{L}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.26)$$

Statische Kondensierung:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} m\bar{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\bar{L}}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_3 \\ \hline \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_4 \end{array}\right] + \frac{EI}{\bar{L}^3} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 24 & -12 & 0 & 6\bar{L} \\ -12 & 12 & -6\bar{L} & -6\bar{L} \\ \hline 0 & -6\bar{L} & 8\bar{L}^2 & 2\bar{L}^2 \\ 6\bar{L} & -6\bar{L} & 2\bar{L}^2 & 4\bar{L}^2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_3 \\ \hline u_2 \\ u_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] \qquad (6.27)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (6.28)$$

$$\begin{cases} \mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{t0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{00}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.29}$$

Aus der zweiten Zeile von Gleichung (6.29) kann folgender Ausdruck hergeleitet werden:

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t \tag{6.30}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (6.30) in der ersten Zeile von Gleichung (6.29) bekommt man:

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t - \mathbf{k}_{t0}\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t = \mathbf{0} \tag{6.31}$$

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + (\mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{t0}\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t})\mathbf{u}_t = \mathbf{0} \tag{6.32}$$

und mit $\mathbf{k}_{t0} = \mathbf{k}_{0t}^T$:

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + (\mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t})\mathbf{u}_t = \mathbf{0} \tag{6.33}$$

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{0} \text{ mit } \hat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t} \tag{6.34}$$

Wobei $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ die kondensierte Steifigkeitsmatrix ist, und in unserem Fall beträgt sie:

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{\bar{L}^3}\cdot\left(\begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6\bar{L} \\ -6\bar{L} & -6\bar{L} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{7\bar{L}^2} & -\frac{1}{14\bar{L}^2} \\ -\frac{1}{14\bar{L}^2} & \frac{2}{7\bar{L}^2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -6\bar{L} \\ 6\bar{L} & -6\bar{L} \end{bmatrix}\right) \tag{6.35}$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{\bar{L}^3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Durch Einsetzen von $\bar{L} = L/2$:

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{L^3}\cdot\frac{48}{7}\cdot\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

Die endgültige Bewegungsgleichung des Kragarms ist deshalb:

$$\begin{bmatrix} \frac{mL}{2} & 0 \\ 0 & \frac{mL}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\cdot\frac{48}{7}\cdot\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

- Bemerkungen
  - Die “Direct Stiffness Method” wird bei der Finiten Elemente Methode verwenden.
  - Die Herleitung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ eines Balkenelements und Hinweise zur Zusammenstellung der Steifigkeitsmatrix von Tragwerken sind in folgender Literatur zu finden:

[Prz85] Przemieniecki J.S.: “Theory of Matrix Structural Analysis”. Dover Publications, New York 1985.

[Bat96] Bathe K-J.: “Finite Element Procedures”. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.

6.2 Freie Schwingungen

6.2.1 Eigenschwingungen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6.39}$$

Lösungsansatz:

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} \text{ wobei } q_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t) \tag{6.40}$$

Durch zweimal Ableiten:

$$\ddot{q}_n(t) = -\omega_n^2[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)] = -\omega_n^2 q_n(t) \tag{6.41}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega_n^2 q_n(t)\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} \tag{6.42}$$

Durch Einsetzen von Gleichungen (6.40) und (6.42) in (6.39):

$$[-\omega_n^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n}]q_n(t) = \mathbf{0} \tag{6.43}$$

Gleichung (6.43) ist erfüllt wenn $q_n(t) = 0$. Es handelt sich dabei um eine triviale Lösung. Dies bedeutet, dass keine Bewegung stattfindet, da $\mathbf{u}(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} = 0$. Um keine triviale Lösung zu bekommen muss deshalb der Klammerausdruck in Gleichung (6.43) Null sein:

$$[-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{6.44}$$

Oder:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{A} = -\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K} \tag{6.45}$$

Auch im Fall von Gleichung (6.45) gibt es immer die triviale Lösung $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} = \mathbf{0}$, die eine Absenz von Bewegung bedeutet. Falls die Matrix $\mathbf{A}$ eine Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ besitzt, kann Gleichung (6.45) wie folgt umgeformt werden:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} \tag{6.46}$$

und deshalb:

$$\boldsymbol{\phi}_\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{6.47}$$

Das bedeutet, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ eine Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ besitzt, hat Gleichung (6.45), bzw. Gleichung (6.44), nur die triviale Lösung von Gleichung (6.47).

Die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$ hat die Form:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\hat{\mathbf{A}} \tag{6.48}$$

Wenn die Determinante $|\mathbf{A}|$ gleich Null ist, dann ist die Matrix singulär und besitzt keine Inverse.

Gleichung (6.44) hat deshalb nur eine nicht-triviale Lösung wenn:

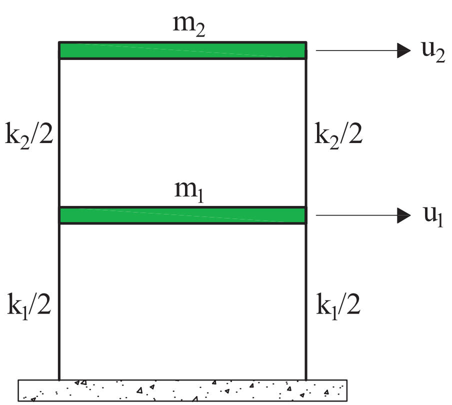
$$\left|-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right| = 0 \tag{6.49}$$

Die Determinante ergibt ein Polynom N-tes Grads in ω_n^2, die **charakteristische Gleichung** genannt wird. Die N Nullstellen der charakteristischen Gleichung werden **Eigenwerte** genannt und daraus können die N **Eigenkreisfrequenzen** ω_n des Systems berechnet werden.

Wenn die Eigenkreisfrequenzen ω_n bekannt sind, können bis auf einer multiplikativen Konstante die Vektoren $\phi_{\mathbf{n}}$ aus Gleichung (6.44) bestimmt werden. Es gibt N unabhängige Vektoren die auch als Eigenvektoren bezeichnet werden.

- Zusammenfassung
  - Ein Mehrmassenschwinger mit N-Freiheitsgrade hat N Eigenkreisfrequenzen ω_n $(n = 1, 2, 3, \ldots, N)$ und N Eigenvektoren. Jeder Eigenvektor hat N Elementen. Die Eigenkreisfrequenzen sind steigend angeordnet $(\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n)$
  - Eigenkreisfrequenzen und Eigenvektoren sind Eigenschaften des Mehrmassenschwingers und sind nur von seinen Masse- Steifigkeitseigenschaften abhängig.
  - Der Index n bezeichnet die Numerierung der Eigenschwingung und die erste Eigenschwingung $(n = 1)$ wird als Grundschwingung bezeichnet.

6.2.2 Beispiel "Zweimassenschwinger"



Es wird jetzt ein regelmässiges Zweimassenschwinger berücksichtigt mit

$$m_1 = m_2 = m$$

und

$$k_1 = k_2 = k$$

Die Bewegungsgleichung geht Gleichung (6.7) hervor:

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

6.6.2.1 Eigenwerte

Die Eigenwerte werden aus der Determinante berechnet:

$$\left|\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M}\right| = \left|\begin{bmatrix} 2k - \omega_n^2 m & -k \\ -k & k - \omega_n^2 m \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{6.51}$$

Man erhält eine quadratische Gleichung in ω_n^2

$$(2k - \omega_n^2 m) \cdot (k - \omega_n^2 m) - (-k) \cdot (-k) = m^2\omega_n^4 - 3km\omega_n^2 + k^2 = 0 \tag{6.52}$$

und die beide Lösungen ergeben die Eigenwerte

$$\omega_n^2 = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \tag{6.53}$$

Zu jedem der beiden Eigenwerte ω_n^2 lässt sich ein Eigenvektor und eine Eigenkreisfrequenz bestimmen.

6.6.2.2 Grundschwingung

Mit dem kleineren Eigenwert $\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$ erhält man die

$$\text{1. Eigenkreisfrequenz } \omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.54}$$

Indem man den Eigenwert ω_1^2 in das Gleichungssystem

$$[\mathbf{K}-\omega_1^2\mathbf{M}]\phi_1 = \begin{bmatrix} 2k-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)m & -k \\ -k & k-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

einsetzt, erhält man zwei voneinander abhängige Gleichungen, mit denen die Form des 1. Eigenvektors ϕ_1 bestimmt werden kann. Die erste Zeile ergibt die Gleichung:

$$\frac{(1+\sqrt{5})k}{2}\phi_{11}-k\phi_{21} = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{21} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}\phi_{11} \tag{6.56}$$

Durch Einsetzen in der zweiten Zeile:

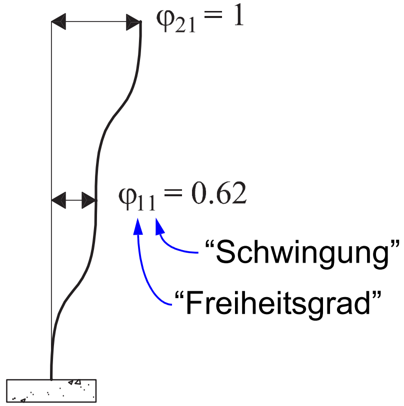
$$-k\phi_{11}+\frac{(-1+\sqrt{5})k}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\phi_{11}\right) = 0 \tag{6.57}$$

$$-k\phi_{11}+k\phi_{11} = 0$$

$$\phi_{11} = \phi_{11}$$

Wie erwartet ist der Eigenvektor bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt und kann deshalb beliebig normiert werden und zwar:

- dass das grösste Element des Eigenvektors gleich Eins ist
- dass ein gegebenes Element des Eigenvektors gleich Eins ist
- ...



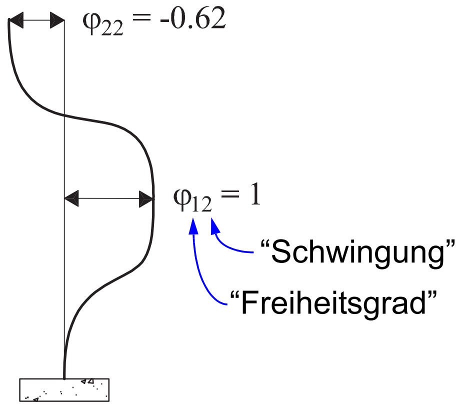
Grundschwingung:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.6.2.3 Höhere Schwingung

Es kann wie bei der Grundschwingung vorgegangen werden und es ergeben sich folgende Resultate:



Höhere Schwingung

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{bmatrix}$$

6.6.2.4 Freie Schwingung des Zweimassenschwingers

Gemäss Gleichung (6.40) ist die freie Schwingung des Zweimassenschwingers:

$$\mathbf{u} = [C_1\cos(\omega_1 t) + C_2\sin(\omega_1 t)]\boldsymbol{\phi}_1 + [C_3\cos(\omega_2 t) + C_4\sin(\omega_2 t)]\boldsymbol{\phi}_2 \tag{6.58}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [C_1\cos(\omega_1 t) + C_2\sin(\omega_1 t)]\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} + [C_3\cos(\omega_2 t) + C_4\sin(\omega_2 t)]\begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

Noch unbekannt sind die Konstanten C_1 bis C_4, die anhand der Anfangsbedingungen von Gleichung (6.60) bestimmt werden können:

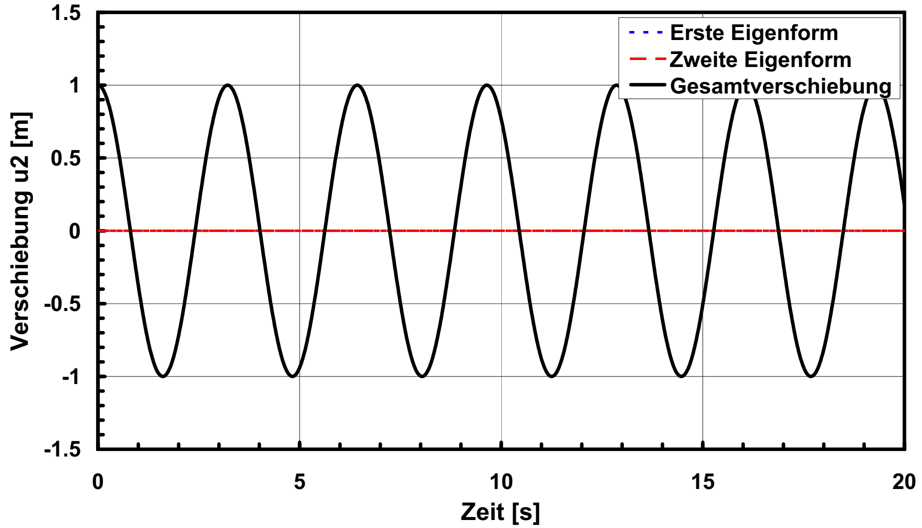
$$\text{Anfangsbedingungen:} \begin{cases} u_1(0) = u1 \\ u_2(0) = u2 \\ \dot{u}_1(0) = v1 \\ \dot{u}_2(0) = v2 \end{cases} \tag{6.60}$$

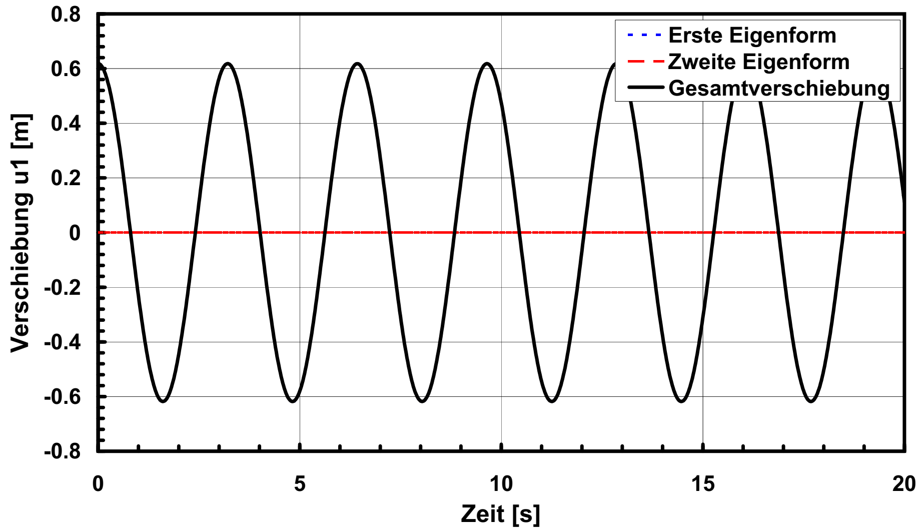
Die Konstanten werden zu:

$$C_1 = \frac{\phi_{22}u1 - \phi_{12}u2}{\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{21}\phi_{12}} \quad , \quad C_2 = \frac{\phi_{22}v1 - \phi_{12}v2}{(\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{21}\phi_{12})\omega_1} \tag{6.61}$$

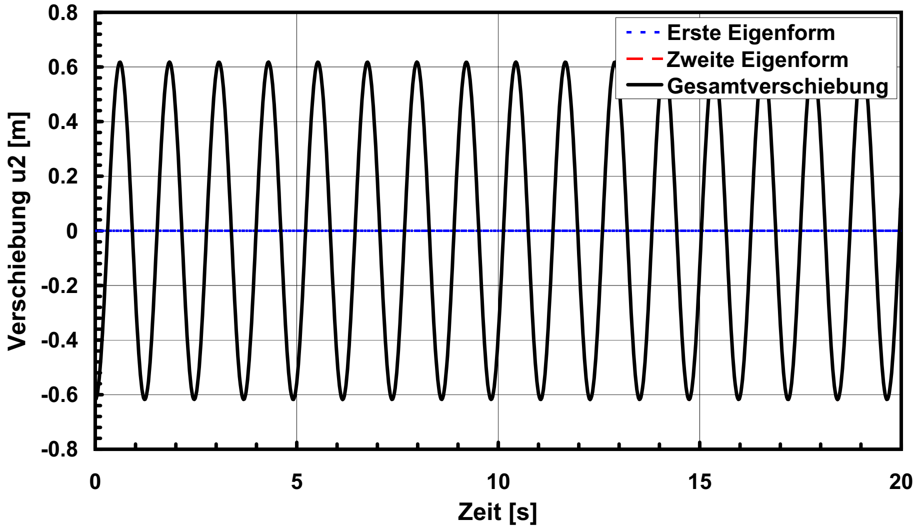
$$C_3 = \frac{\phi_{11}u2 - \phi_{21}u1}{\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{21}\phi_{12}} \quad , \quad C_4 = \frac{\phi_{11}v2 - \phi_{21}v1}{(\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{21}\phi_{12})\omega_2} \tag{6.62}$$

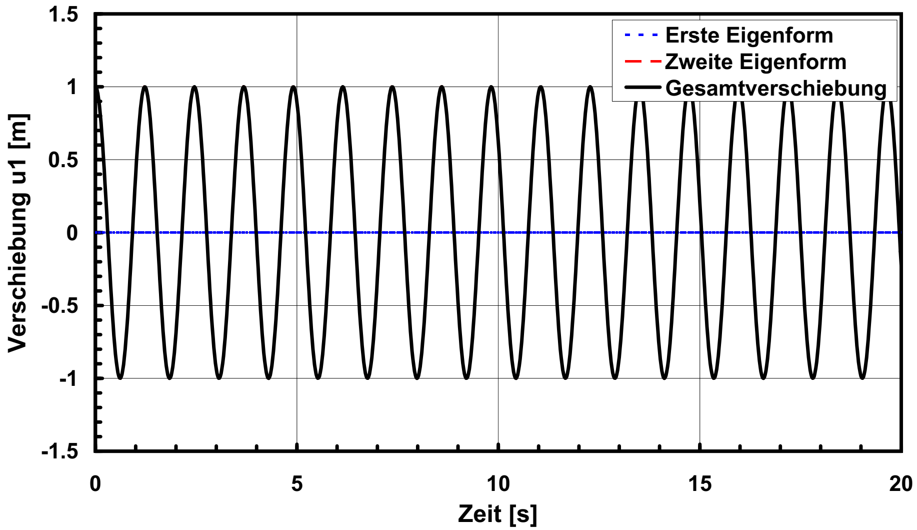
- Fall 1: $u1 = 0.618$, $u2 = 1.000$, $v1 = v2 = 0$



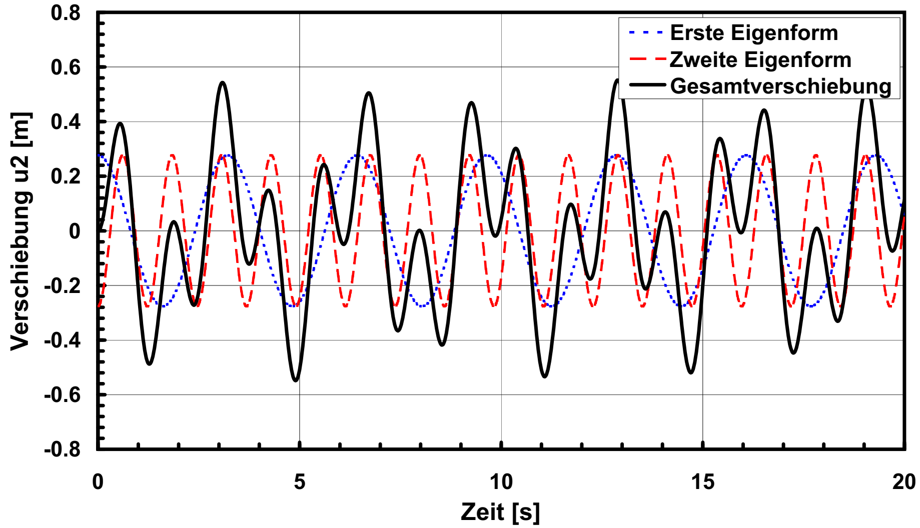


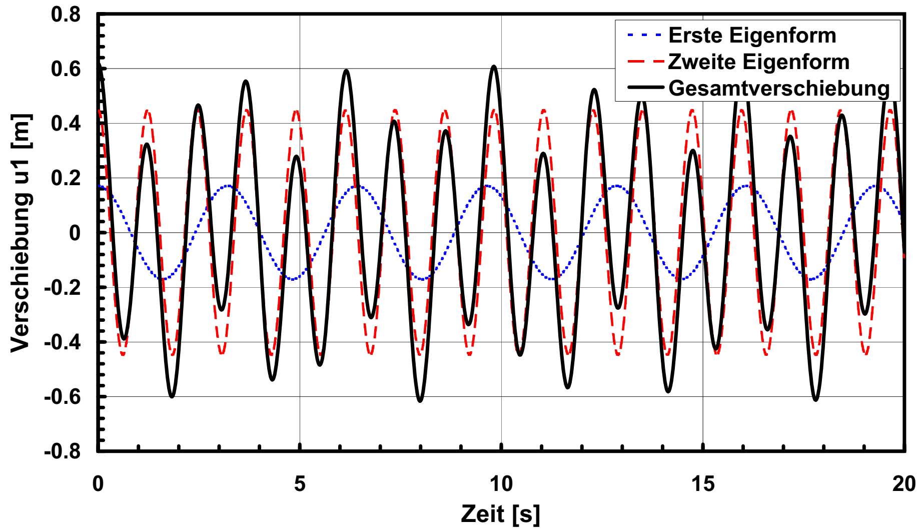
- Fall 2: $u1 = 1.000,\ u2 = -0.618,\ v1 = v2 = 0$





- Fall 3: $u1 = 0.618,\ u2 = 0.000,\ v1 = v2 = 0$





6.3 Modalmatrix und Spektralmatrix

Alle N-Eigenwerte und alle N-Eigenvektoren können kompakt mit Matrizen ausgedrückt werden:

- Modalmatrix

$$\Phi = [\phi_{jn}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

- Spektralmatrix

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

Gleichung (6.44) kann wie folgt umgeformt werden:

$$\mathbf{K}\phi_{\mathbf{n}} = \mathbf{M}\phi_{\mathbf{n}}\omega_n^2 \tag{6.65}$$

Und es wird sofort ersichtlich, dass die Bestimmungsgleichung für alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren anhand der Modal- und der Spektralmatrix ausgedrückt werden kann und zwar wie folgt:

$$\mathbf{K\Phi} = \mathbf{M\Phi\Omega^2} \tag{6.66}$$

6.4 Eigenschaften der Eigenvektoren

6.4.1 Orthogonalität der Eigenvektoren

Die Orthogonalitätsbedingungen der Eigenvektoren lauten:

$$\phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\phi_{\mathbf{r}} = 0 \text{ und } \phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_{\mathbf{r}} = 0 \text{ für } n \neq r \tag{6.67}$$

und können anhand von Gleichung (6.65) nachgewiesen werden. Gleichung (6.65) soll zuerst für den Vektor n aufgestellt und auf beiden Seiten mit $\phi_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}$ vormultipliziert werden:

$$\phi_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\phi_{\mathbf{n}} = \omega_n^2\phi_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_{\mathbf{n}} \tag{6.68}$$

Gleichung (6.68) soll transponiert werden und dabei sollen die Eigenschaften der symmetrischen Matrizen $\mathbf{K}^{\mathbf{T}} = \mathbf{K}$ und $\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{M}$ verwendet werden:

$$\phi_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\phi_{\mathbf{r}} = \omega_n^2\phi_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\phi_{\mathbf{r}} \tag{6.69}$$

Gleichung (6.65) soll jetzt für den Vektor r aufgestellt und auf beiden Seiten mit $\phi_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}$ vormultipliziert werden :

$$\phi_n^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\phi_r = \omega_r^2\phi_n^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_r \tag{6.70}$$

Gleichung (6.70) kann jetzt von Gleichung (6.69) abgezählt werden zu:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2)\phi_n^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_r = 0 \tag{6.71}$$

Falls die Eigenwerte verschieden sind, ist $(\omega_n^2 - \omega_r^2) \neq 0$ für $n \neq r$ und der Ausdruck $\phi_n^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \phi_r$ muss verschwinden. Falls ein Eigenwert mehrfach vorkommt, sind die entsprechenden Eigenvektoren linear unabhängig und können so gewählt werden, dass sie orthogonal sind (Beweis kompliziert).

Somit wird gezeigt, dass für $n \neq r$ $\phi_\mathbf{n}^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \phi_\mathbf{r} = 0$ ist. Der Nachweis, dass für $n \neq r$ $\phi_\mathbf{n}^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \phi_\mathbf{r} = 0$ wird, wird unter Berücksichtigung von Gleichung (6.70) erbracht. Wir haben bereits gesehen, dass für $n \neq r$ die rechte Seite von Gleichung (6.70) gleich Null ist, dann soll auch die linke Seite von Gleichung (6.70) Null sein, was den gesuchten Nachweis erbringt.

Beispiel “Zweimassenschwinger”

Die Orthogonalität der Eigenvektoren des Zweimassenschwingers von Abschnitt 6.2.2 wird überprüft:

- Bezüglich der Massenmatrix

$$\phi_1^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2m(5+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2} \cong 1.382m \tag{6.72}$$

$$\phi_1^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = 0 \tag{6.73}$$

$$\phi_2^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{6.74}$$

$$\phi_2^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{m}{2}(5-\sqrt{5}) \approx 1.382m \tag{6.75}$$

- Bezüglich der Steifigkeitsmatrix

$$\phi_1^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2k(5-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2} \cong 0.528k \tag{6.76}$$

$$\phi_1^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = 0 \tag{6.77}$$

$$\phi_2^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{6.78}$$

$$\phi_2^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{k}{2}(5+\sqrt{5}) \approx 3.618k \tag{6.79}$$

6.4.2 Lineare Unabhängigkeit der Eigenvektoren

Die Eigenvektoren sind linear unabhängig. Um dies zu beweisen, muss gezeigt werden, dass wenn

$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \ldots + \alpha_n\phi_n = 0 \tag{6.80}$$

alle α_i müssen null sein. Wir multiplizieren von links mit $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\mathbf{M}$ und erhalten

$$\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\mathbf{M}(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \ldots + \alpha_n\phi_n) = \boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}\alpha_i = 0 \tag{6.81}$$

Da $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i} \neq 0$, muss $\alpha_i = 0$, deshalb sind die Eigenvektoren linear unabhängig.

Die Eigenschaft, dass die Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist deshalb wichtig, da sie erlaubt einen beliebigen Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ als Linearkombination aus den Eigenvektoren zu bilden.

6.4.3 Entkoppelung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für freie Schwingungen ist

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6.82}$$

und als Lösungsansatz kann der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}(t) = \sum_i q_i(t)\phi_i \tag{6.83}$$

angenommen werden. Wobei:

ϕ_i: linear unabhängige Eingenvektoren des Systems
q_i: modale Koordinaten

Der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(t)$ und seine zweifache Ableitung

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \sum_i \ddot{q}_i(t)\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i} \tag{6.84}$$

können in Gleichung (6.82) eingesetzt werden und diese soll links mit $\phi_n^\mathbf{T}$ multipliziert werden:

$$\phi_n^\mathbf{T}\mathbf{M}\left(\sum_i \ddot{q}_i(t)\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}\right) + \phi_n^\mathbf{T}\mathbf{K}\left(\sum_i q_i(t)\boldsymbol{\phi}_\mathbf{i}\right) = \mathbf{0} \tag{6.85}$$

Wegen der Orthogonalitätsrelationen bleibt von der Summe nur ein Term:

$$\phi_n^\mathbf{T}\mathbf{M}\phi_n\ddot{q}_n(t) + \phi_n^\mathbf{T}\mathbf{K}\phi_n q_n(t) = 0 \tag{6.86}$$

wobei:

Modale Masse: $$m_n^* = \phi_n^\mathbf{T}\mathbf{M}\phi_n \tag{6.87}$$

Modale Steifigkeit: $$k_n^* = \phi_n^\mathbf{T}\mathbf{K}\phi_n \tag{6.88}$$

und Gleichung (6.86) kann wie folgt geschrieben werden:

$$m_n^*\ddot{q}_n(t) + k_n^* q_n(t) = 0 \tag{6.89}$$

Wir können für jedes n eine solche Gleichung aufstellen, was zu N entkoppelten Einmassenschwingern führt und die tatsächliche Verschiebung wird zusammengesetzt aus:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} q_i(t)\phi_i \qquad (6.90)$$

In Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{u}(t) = \Phi\mathbf{q}(t) \text{ mit } q = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \dots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \qquad (6.91)$$

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad (6.92)$$

mit

$$\mathbf{M}^* = \Phi^T\mathbf{M}\Phi = \begin{bmatrix} m_1^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & m_n^* \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{K}^* = \Phi^T\mathbf{K}\Phi = \begin{bmatrix} k_1^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & k_n^* \end{bmatrix} \qquad (6.93)$$

Beispiel “Zweimassenschwinger”

Die modalen Massen und die modalen Steifigkeiten des Zweimassenschwingers von Abschnitt 6.2.2 wurden bereits während der Kontrolle der Orthogonalität der Eigenvektoren überprüft (siehe Gleichungen (6.72), (6.75), (6.76) und (6.79)) und betragen:

$$m_1^* = \phi_1^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_1 = \frac{2m(5+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})^2} \approx 1.382m \qquad (6.94)$$

$$m_2^* = \phi_2^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\phi_2 = \frac{m}{2}(5-\sqrt{5}) \approx 1.382m \qquad (6.95)$$

$$k_1^* = \phi_1^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\phi_1 = \frac{2k(5-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})^2} \cong 0.528k \qquad (6.96)$$

$$k_2^* = \phi_2^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\phi_2 = \frac{k}{2}(5+\sqrt{5}) \approx 3.618k \qquad (6.97)$$

Erster modaler Einmassenschwinger:

$$m_1^*\ddot{q}_1(t) + k_1^*q_1(t) = 0 \qquad (6.98)$$

$$1.382m\ddot{q}_1(t) + 0.528kq_1(t) = 0 \qquad (6.99)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1^*}{m_1^*}} = \sqrt{\frac{0.528k}{1.382m}} = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (6.100)$$

Die Eigenkreisfrequenz entspricht Gleichung (6.54) dieses Kapitels

Zweiter modaler Einmassenschwinger:

$$m_2^*\ddot{q}_2(t) + k_2^*q_2(t) = 0 \qquad (6.101)$$

$$1.382m\ddot{q}_2(t) + 3.618kq_2(t) = 0 \qquad (6.102)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2^*}{m_2^*}} = \sqrt{\frac{3.618k}{1.382m}} = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (6.103)$$

Die Eigenkreisfrequenz entspricht das Resultat auf Seite 144.