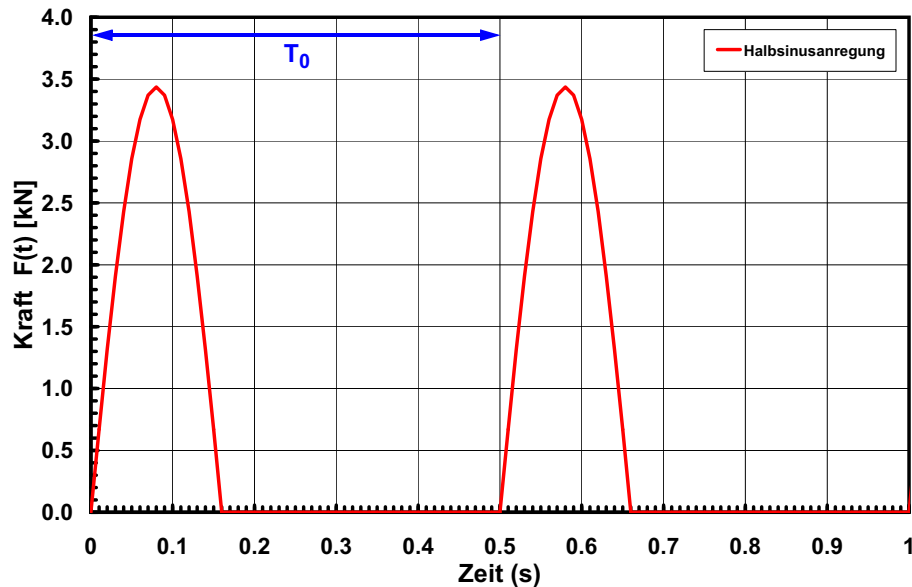


5 Erzwungene Schwingungen

5.1 Periodische Anregung



Eine Anregung ist periodisch wenn:

$$F(t + nT_0) = F(t) \quad \text{für} \quad n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty \quad (5.1)$$

Die Funktion $F(t)$ kann dann als Summe von mehreren harmonischen Funktionen in Form einer Fourier-Reihe dargestellt werden, und zwar:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (5.2)$$

Mit der Grundfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.3)$$

Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t) \sin(j\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq j \\ T_0/2 & \text{für } n = j \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t) \cos(j\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq j \\ T_0/2 & \text{für } n = j \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t) \sin(j\omega_0 t) dt = 0 \quad (5.6)$$

können die Fourier-Koeffizienten a_n berechnet werden indem Gleichung (5.2) zuerst mit $\cos(j\omega_0 t)$ multipliziert wird und anschließend über die Periode T_0 integriert wird.

• $j = 0$

$$\int_0^{T_0} F(t) \cos(j\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \cos(j\omega_0 t) dt \quad (5.7)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(j\omega_0 t) dt + \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(j\omega_0 t) dt \right]$$

$$\int_0^{T_0} F(t) dt = \int_0^{T_0} a_0 dt = a_0 T_0 \quad (5.8)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} F(t) dt \quad (5.9)$$

• $j = n$

$$\int_0^{T_0} F(t) \cos(j\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \cos(j\omega_0 t) dt \quad (5.10)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(j\omega_0 t) dt + \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(j\omega_0 t) dt \right]$$

$$\int_0^{T_0} F(t) \cos(n\omega_0 t) dt = a_n \cdot \frac{T_0}{2} \quad (5.11)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} F(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (5.12)$$

Die Fourier-Koeffizienten b_n können ähnlich berechnet werden indem Gleichung (5.2) zuerst mit $\sin(j\omega_0 t)$ multipliziert wird und anschliessend über die Periode T_0 integriert wird.

$$b_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} F(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (5.13)$$

• Bemerkungen

- a_0 ist der Mittelwert der Funktion $F(t)$
- Die Integrale können ebenfalls über das Intervall $[-T_0/2, T_0/2]$ berechnet werden.
- Für $j = 0$ gibt es keinen b-Koeffizient

5.1.1 Stationäre Antwort infolge periodischer Anregung

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (5.14)$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{F(t)}{m} \quad (5.15)$$

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (5.16)$$

• Statischer Teil (a_0)

$$u_0(t) = \frac{a_0}{k} \quad (5.17)$$

• Harmonischer Teil "Cosinus" (siehe harmonische Anregung)

$$u_n^{\text{Cosinus}}(t) = \frac{a_n}{k} \cdot \frac{2\zeta\beta_n \sin(n\omega_0 t) + (1 - \beta_n^2) \cos(n\omega_0 t)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta\beta_n)^2}, \quad \beta_n = \frac{n\omega_0}{\omega_n} \quad (5.18)$$

• Harmonischer Teil "Sinus" (Ähnlich wie "Cosinus")

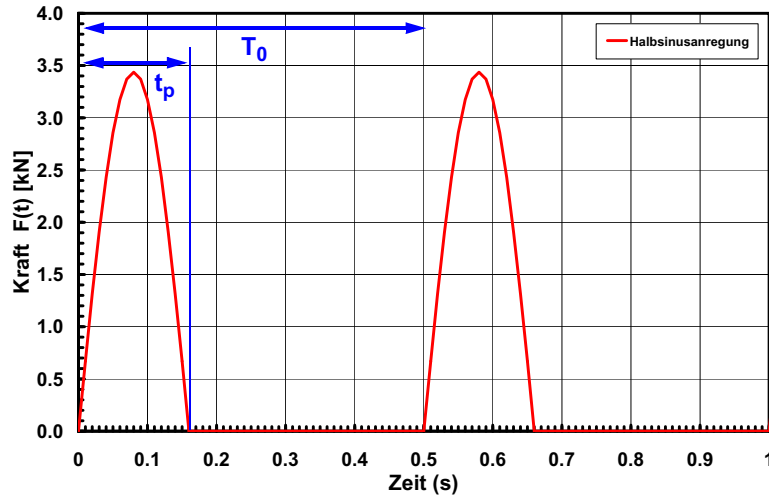
$$u_n^{\text{Sinus}}(t) = \frac{b_n}{k} \cdot \frac{(1 - \beta_n^2) \sin(n\omega_0 t) - 2\zeta\beta_n \cos(n\omega_0 t)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta\beta_n)^2}, \quad \beta_n = \frac{n\omega_0}{\omega_n} \quad (5.19)$$

• Die stationäre Antwort $u(t)$ eines gedämpften EMS unter der periodischen Anregungskraft $F(t)$ ist gleich der Summe der Terme der Fourier-Reihe.

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\text{Cosinus}}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\text{Sinus}}(t) \quad (5.20)$$

5.1.2 Halbsinus

Eine Folge von Halbsinus-Funktionen ist ein gutes Modell für die Kraft, die durch eine hüpfende Person erzeugt wird.



$$F(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) & \text{für } 0 \leq t < t_p \\ 0 & \text{für } t_p \leq t < T_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

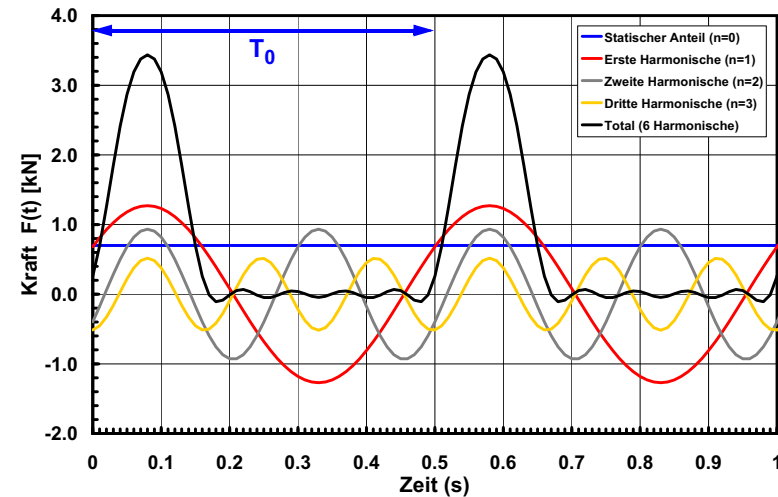
Die Fourier-Koeffizienten können am Besten mit einem Mathematikprogramm berechnet werden und betragen:

$$a_0 = \frac{A}{T_0} \cdot \int_0^{t_p} \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) dt = \frac{2A\tau}{\pi} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{t_p}{T_0} \quad (5.22)$$

$$a_n = \frac{2A}{T_0} \cdot \int_0^{t_p} \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4A\tau \cos(n\pi\tau)^2}{\pi(1 - 4n^2\tau^2)} \quad (5.23)$$

$$b_n = \frac{2A}{T_0} \cdot \int_0^{t_p} \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{4A\tau \sin(n\pi\tau) \cos(n\pi\tau)}{\pi(1 - 4n^2\tau^2)} \quad (5.24)$$

Die Approximation des Halbsinusmodelles für $T_0 = 0.5s$ und $t_p = 0.16s$ durch 6 Fourier-Terme sieht folgendermassen aus:

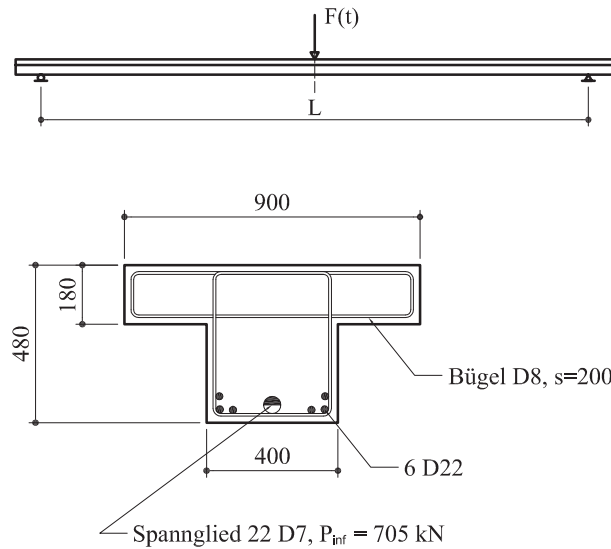


• Bemerkung

Der statische Term $a_0 = 2A\tau/\pi = G$ entspricht dem Gewicht G der hüpfenden Person.

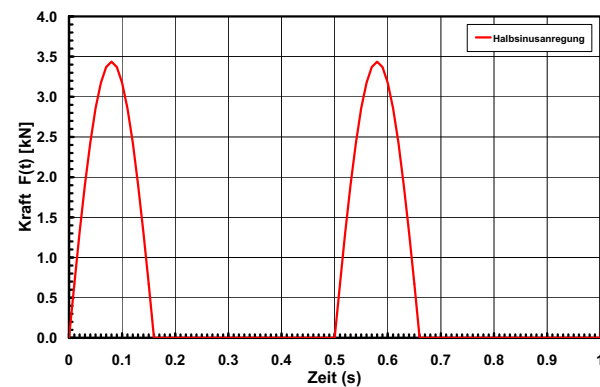
5.1.3 Beispiel: "Hüpfen auf Stahlbetonbalken"

• Balken



- Elastizitätsmodul:
 $E = 23500 \text{ MPa}$
- Dichte:
 $\rho = 20.6 \text{ kN/m}^3$
- Biegesteifigkeit:
 $EI = 124741 \text{ kNm}^2$
- Dämpfungsrate
 $\zeta = 0.017$
- Modale Masse
 $M_n = 0.5 M_{\text{tot}}$
- Modale Steifigkeit
 $K_n = \frac{\pi^4}{2} \cdot \frac{EI}{L^3}$

• Anregung (Ähnlich wie Seite 186 von [Bac+97])



- Hüpf Frequenz:
 $f_0 = 2 \text{ Hz}$
- Periode: $T_0 = 0.5 \text{ s}$
- Kontaktzeit:
 $t_p = 0.16 \text{ s}$
- Gewicht der Person:
 $G = 0.70 \text{ kN}$
- Amplitude:
 $A = 3.44 \text{ kN}$

• Maximale Durchbiegungen

Statisch: $u_{\text{st}} = \frac{G}{K_n}$

Dynamisch: $u_{\text{max}} = \max(u(t))$ mit $u(t)$ aus Gleichung (5.20)

Verhältnis: $V = \frac{u_{\text{max}}}{u_{\text{st}}}$

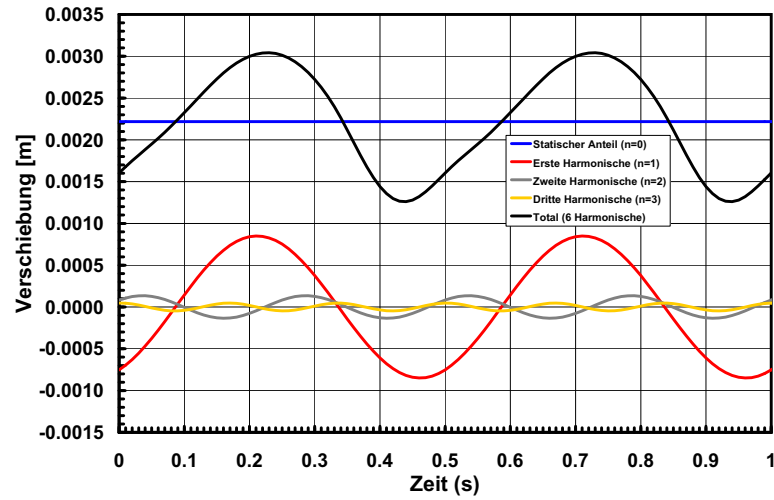
• Untersuchte Fälle

Länge [m]	Frequenz f_n [Hz]	u_{max} [m]	V [-]
26.80	1	0.003	1.37
19.00	2	0.044	55.94
15.50	3	0.002	3.62
13.42	4	0.012	41.61
12.01	5	0.001	4.20
10.96	6	0.004	25.02

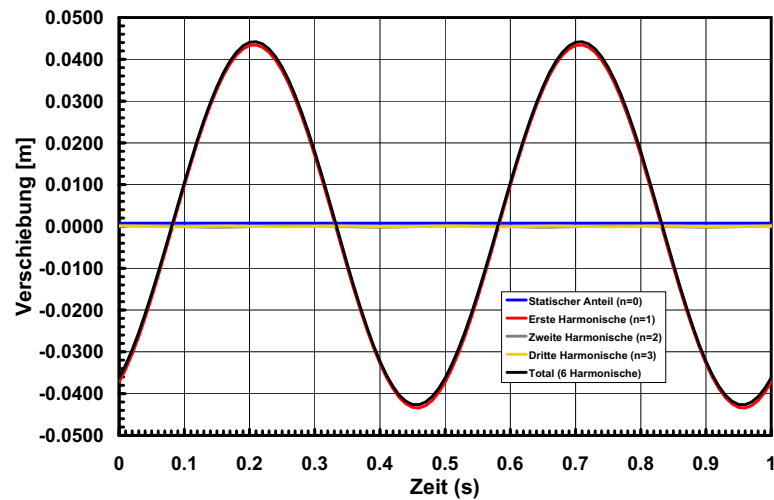
• Bemerkungen

- Wenn die Anregungsfrequenz f_0 doppelt so gross ist im Vergleich zur Eigenfrequenz des Balkens f_n , ist der Vergrößerungsfaktor V klein.
- Berücksichtigung der höheren Harmonischen kann wichtig sein!

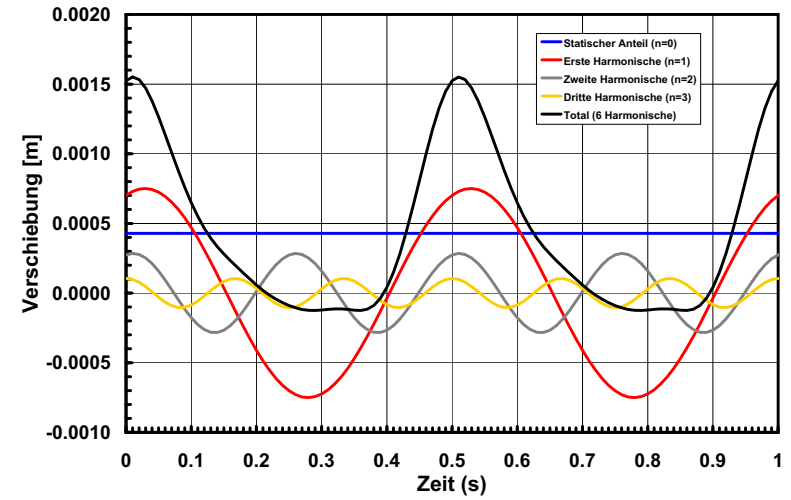
- Fall 1: $f_0 = 2\text{Hz}$, $f_n = 1\text{Hz}$



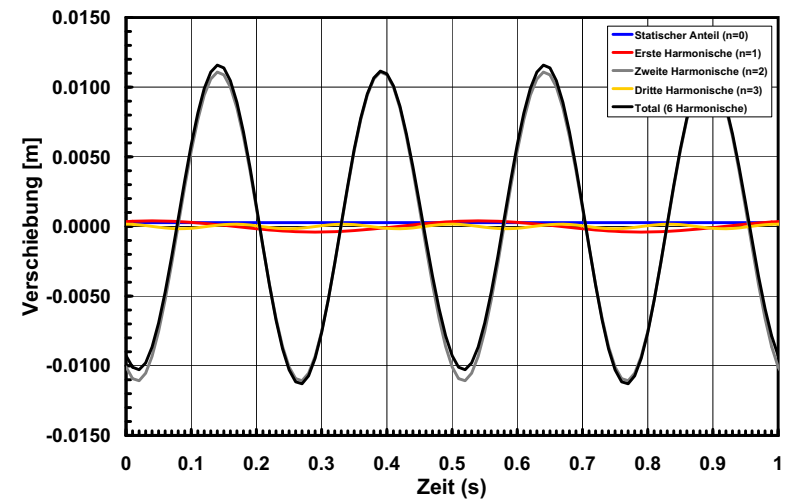
- Fall 2: $f_0 = 2\text{Hz}$, $f_n = 2\text{Hz}$



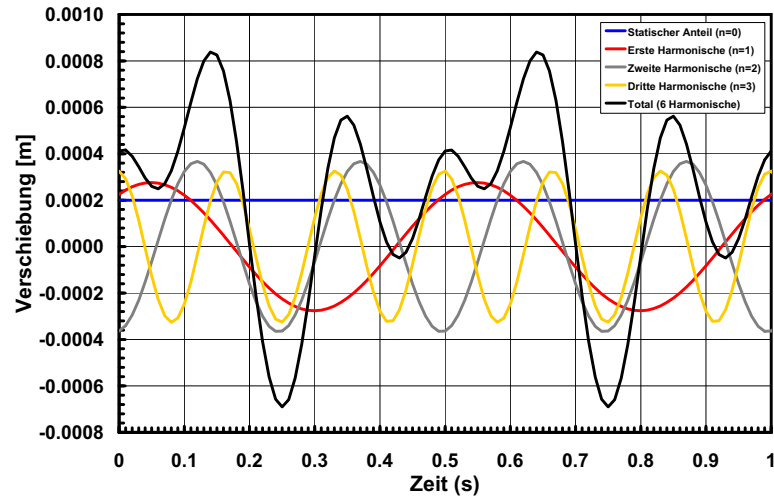
- Fall 3: $f_0 = 2\text{Hz}$, $f_n = 3\text{Hz}$



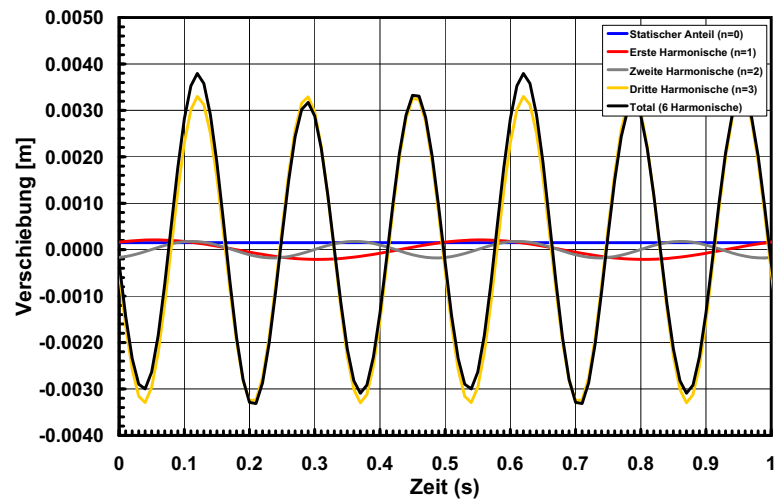
- Fall 4: $f_0 = 2\text{Hz}$, $f_n = 4\text{Hz}$



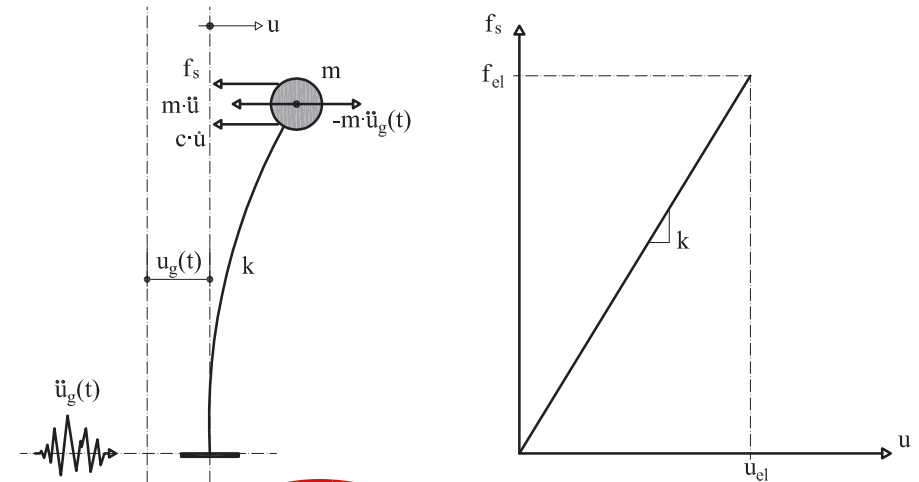
- Fall 5: $f_0 = 2\text{Hz}$, $f_n = 5\text{Hz}$



- Fall 6: $f_0 = 2\text{Hz}$, $f_n = 6\text{Hz}$



5.2 Zeitschrittverfahren



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g \quad f_s \quad (5.25)$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g \quad (5.26)$$

Wobei: $\zeta = c/(2m\omega_n)$, $\omega_n^2 = k/m$, $f_s = ku = m\omega_n^2u$ (5.27)

- Die vollständige Berechnung der dynamischen Antwort erfolgt durch:
 - Faltungsintegral ([Ba02] Abschnitte 5.2.1c und 5.4.2a)
 - Numerische Integration der DGL ([Cho07] Abschnitt 5)

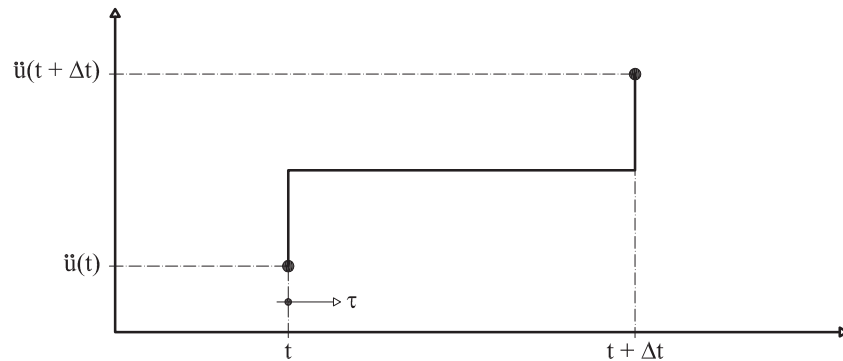
5.2.1 Integrationsverfahren nach Newmark

- Inkrementelle Formulierung der Differentialgleichung

$$m\Delta\ddot{u} + c\Delta\dot{u} + k\Delta u = -m\Delta\ddot{u}_g \quad (5.28)$$

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + \Delta u, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t \dot{u} + \Delta\dot{u}, \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{u} = {}^t \ddot{u} + \Delta\ddot{u} \quad (5.29)$$

- Annahme des Verlaufs der Beschleunigung im Zeitschritt



$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}({}^t \ddot{u} + {}^{t+\Delta t} \ddot{u}) = {}^t \ddot{u} + \frac{\Delta\ddot{u}}{2} \quad (5.30)$$

$$\dot{u}(\tau) = {}^t \dot{u} + \int_t^\tau \ddot{u}(\tau) d\tau = {}^t \dot{u} + \left({}^t \ddot{u} + \frac{\Delta\ddot{u}}{2}\right)(\tau - t) \quad (5.31)$$

$$u(\tau) = {}^t u + \int_t^\tau \dot{u}(\tau) d\tau = {}^t u + \int_t^\tau \left[{}^t \dot{u} + \left({}^t \ddot{u} + \frac{\Delta\ddot{u}}{2}\right)(\tau - t)\right] d\tau \quad (5.32)$$

$$u(\tau) = {}^t u + {}^t \dot{u}(\tau - t) + \left({}^t \ddot{u} + \frac{\Delta\ddot{u}}{2}\right) \frac{(\tau - t)^2}{2} \quad (5.33)$$

Die Inkremente der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Verschiebung im Zeitschritt betragen somit:

$$\Delta\ddot{u} = {}^{t+\Delta t}\ddot{u} - {}^t \ddot{u} = \Delta\ddot{u} \quad (5.34)$$

$$\Delta\dot{u} = {}^{t+\Delta t}\dot{u} - {}^t \dot{u} = \left({}^t \ddot{u} + \frac{\Delta\ddot{u}}{2}\right)\Delta t \quad (5.35)$$

$$\Delta u = {}^t \dot{u}\Delta t + \left({}^t \ddot{u} + \frac{\Delta\ddot{u}}{2}\right) \frac{\Delta t^2}{2} \quad (5.36)$$

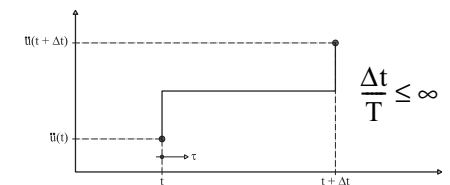
Die Gleichungen für $\Delta\dot{u}$ und Δu können generalisiert werden als:

$$\Delta\dot{u} = ({}^t \ddot{u} + \gamma\Delta\ddot{u})\Delta t, \quad \Delta u = {}^t \dot{u}\Delta t + ({}^t \ddot{u} + 2\beta\Delta\ddot{u}) \frac{\Delta t^2}{2} \quad (5.37)$$

mit:

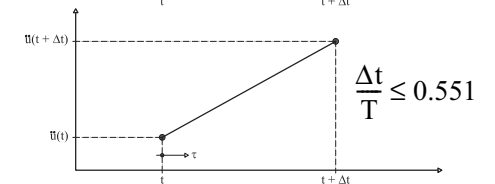
Konstante Beschleunigung:

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$



Lineare Beschleunigung:

$$\beta = \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$



- Lösung der DGL

Die Ausdrücke von Gleichung (5.37) werden in Gleichung (5.28) eingesetzt, die jetzt für die einzige verbleibende Unbekannte $\Delta\ddot{u}$ gelöst werden kann

$$(m + c\gamma\Delta t + k\beta\Delta t^2)\Delta\ddot{u} = -m\Delta\ddot{u}_g - c\dot{u}\Delta t - k\left(\dot{u}\Delta t + \ddot{u}\frac{\Delta t^2}{2}\right) \quad (5.38)$$

oder in kompakter Form

$$\tilde{m}\Delta\ddot{u} = \tilde{\Delta p} \quad (5.39)$$

Durch Rückwärtseinsetzen von $\Delta\ddot{u}$ können die gesuchten Bewegungsgrößen zur Zeit $t + \Delta t$ berechnet werden.

Lineare Systeme

- m , c und k bleiben konstant während des Erdbebens.
- Die Grösse \tilde{m} ist ebenfalls konstant und kann im Voraus bestimmt werden.

Nicht-lineare Systeme (siehe Vorlesung Erdbeben)

- Die Masse m und die Dämpfung c bleiben typischerweise konstant während des ganzen Erdbebens.
- Die Steifigkeit k variiert während des Erdbebens und \tilde{m} ist somit nicht mehr konstant.
- Falls sich die Steifigkeit innerhalb des Zeitschrittes ändert, muss sie iteriert werden.

5.2.2 Implementierung des Integrationsverfahrens nach Newmark in der Excel-Tabelle "TD_Einmassenschwinger_HS09.xls"

Gleichung (5.38), hier nochmals geschrieben, wird in der Excel-Tabelle wie folgt implementiert:

$$\underbrace{(m + c\gamma\Delta t + k\beta\Delta t^2)}_{\text{meq}} \underbrace{\Delta\ddot{x}}_{\text{da}} = \underbrace{-m\Delta\ddot{x}_g}_{\Delta F(t)} - c \underbrace{\dot{x}\Delta t}_{\text{dv}} - k \underbrace{\left(\dot{x}\Delta t + \ddot{x}\frac{\Delta t^2}{2}\right)}_{\text{dd}}$$

- In den Spalten **C** bis **E** werden zuerst die sogenannten "**Prädiktoren**" **dd**, **dv** und **da** bestimmt:

$$\text{dd} = \dot{x}\Delta t + \ddot{x}\frac{\Delta t^2}{2} \quad (\text{"delta-displacement"})$$

$$\text{dv} = \ddot{x}\Delta t \quad (\text{"delta-velocity"})$$

$$\text{da} = \frac{-m\Delta\ddot{x}_g - c \cdot \text{dv} - k \cdot \text{dd}}{\text{meq}} = \Delta\ddot{x} \quad (\text{"delta-acceleration"})$$

- In den Spalten **F** bis **H** werden anhand von sogenannten "**Korrektoren**" die Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmt:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{x} = \ddot{x} + \text{da}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{x} = \dot{x} + \underbrace{\text{dv} + (\text{da} \cdot \gamma \cdot \Delta t)}_{\Delta\dot{x}}$$

$${}^{t+\Delta t}x = {}^t x + \underbrace{dd + (da \cdot \beta \cdot \Delta t^2)}_{\Delta x}$$

- In der Spalte **I** wird schlussendlich die absolute Beschleunigung \ddot{x}_{abs} zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmt:

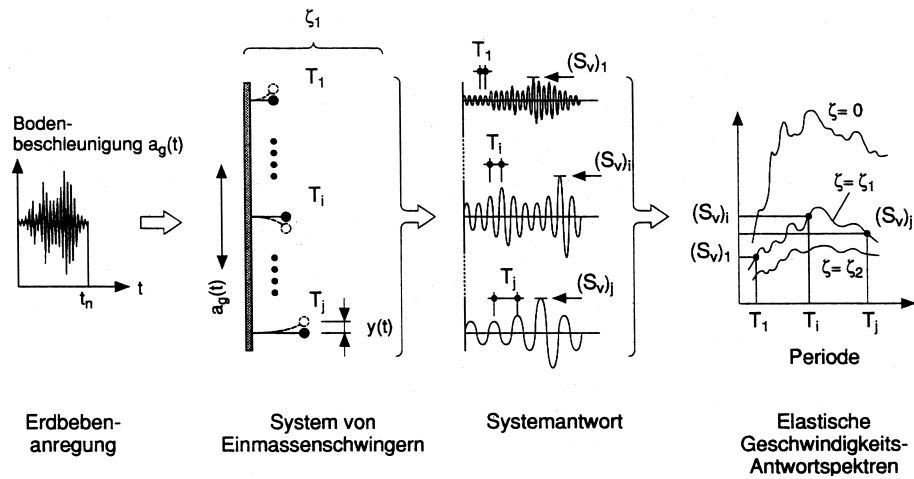
$${}^{t+\Delta t}\ddot{x}_{abs} = {}^{t+\Delta t}\ddot{x} + {}^{t+\Delta t}\ddot{x}_g$$

Bemerkungen zur Anwendung der Excel-Tabelle

- Die gelb-unterlegten Felder können geändert werden:
 - Die Spalten **A** und **B** enthalten die Stützwerte im Abstand Δt , die den Zeitverlauf der Bodenbewegung $\ddot{x}_g(t)$ beschreiben, für welche die Antwort des Einmassenschwingers (EMS) zu bestimmen ist. Um die Antwort des EMS infolge einer anderen Bodenbewegung $\ddot{x}_g(t)$ zu berechnen, müssen diese zwei Spalten mit den Stützwerten des neuen Erdbebenzeitverlaufs gefüllt werden.
 - Das Bewegungsverhalten eines linearen EMS ist für einen gegebenen Erdbebenzeitverlauf $\ddot{x}_g(t)$, nur von seiner Periode $T = 2\pi/\omega_n$ und seiner Dämpfung ζ abhängig. Aus diesem Grund können T und ζ in der Excel-Tabelle ebenfalls frei gewählt werden.
 - Die Masse m ist lediglich benötigt, um die tatsächliche Steifigkeit des EMS $k = m \cdot \omega_n^2$ zu definieren und daraus die korrekte Federkraft $f_s = k \cdot x$ zu berechnen.

- Im Feld “Anzahl Perioden” (Zelle **V19**) wird angegeben für wievielen Perioden T_i des EMS dessen dynamische Antwort berechnet werden soll, um damit die entsprechenden Antwortspektren zeichnen zu können.
- Die Antwortspektren werden mit dem Makro “**antwortspektrum**” berechnet. Das Makro fügt lediglich die verschiedene Perioden T_i in der Zelle **S3** ein; dann liest sie die Maxima der Antwortgrößen aus der Zellen **F6**, **G6**, **H6** und **I6** heraus und schreibt sie in den entsprechenden Zellen der Spalten **L** bis **P**.

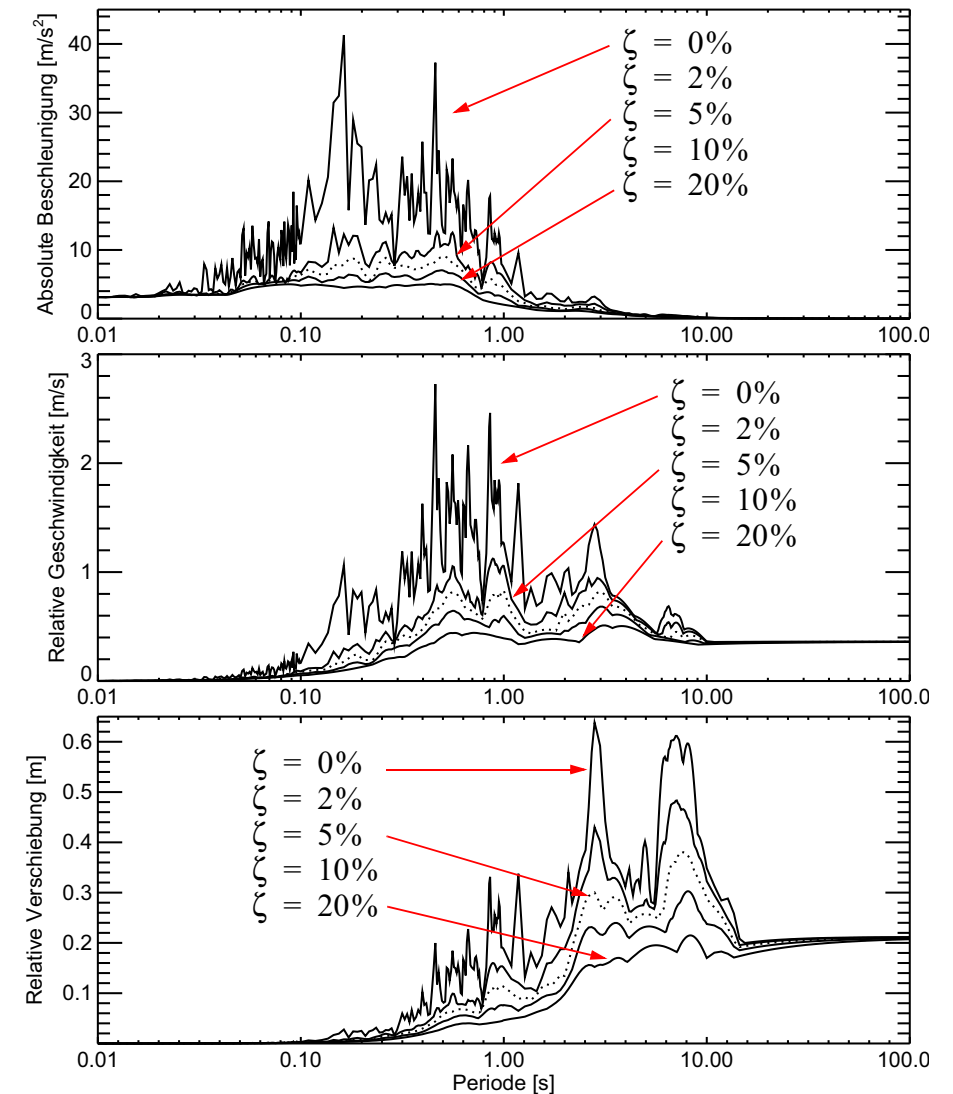
5.3 Antwortspektren



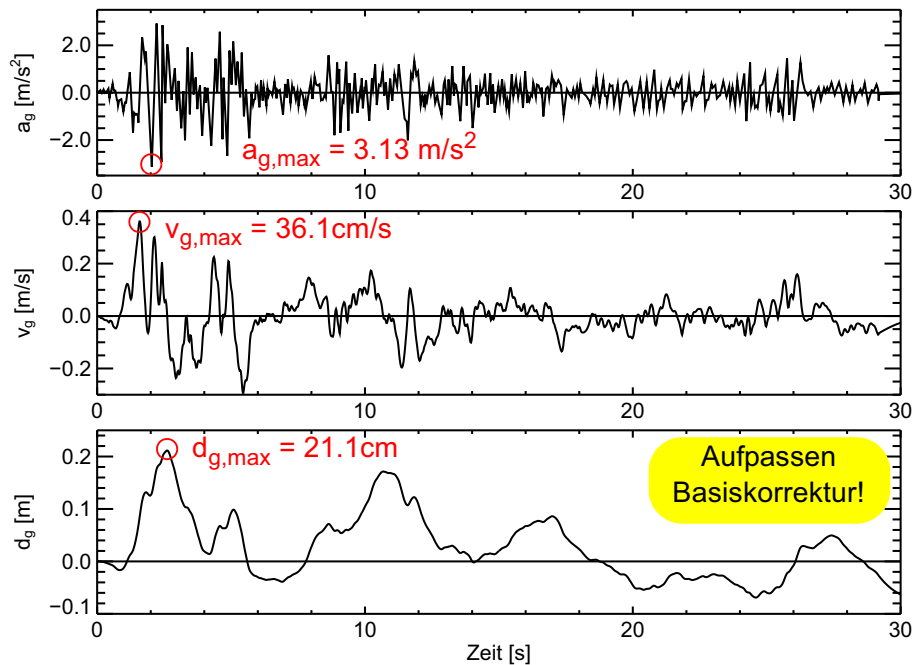
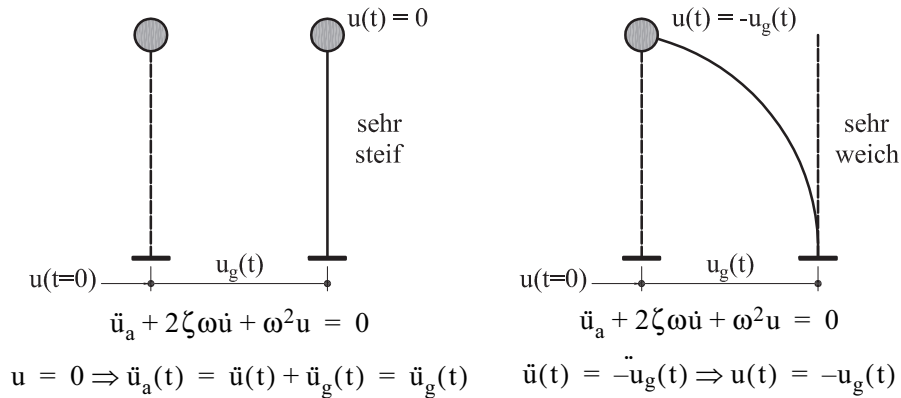
[Ba02] Bild 2.25

- Antwortspektren dienen zur Auswertung von Erdbebenaufzeichnungen aber vor allem, in Form von Bemessungsspektren, zur Erdbebenbemessung von Bauwerken
- Antwortspektren sollen für alle Perioden und Dämpfungen, die bei Bauwerken vorkommen, berechnet werden.
- Wo nichts anderes angegeben, beziehen sich die nächsten Antwortspektren auf die Nord-Süd Komponente des El Centro Erdbebens vom 18. Mai 1940 ([Cho07]).
- Weitere Zeitverläufe auf:
<http://db.cosmos-eq.org/scripts/default.plx>
<http://peer.berkeley.edu/nga/>

• "El Centro": Lineare Antwortspektren



• Grenzwerte von Antwortspektren



5.3.1 Pseudo- Bewegungsgröße

• Pseudo-Geschwindigkeit S_{pv}

$$S_{pv} = \omega S_d \tag{5.40}$$

- S_{pv} hat die Einheiten einer Geschwindigkeit

- S_{pv} ist ein Mass für die maximale Verformungsenergie

$$E_s = \frac{kS_d^2}{2} = \frac{k(S_{pv}/\omega)^2}{2} = \frac{mS_{pv}^2}{2} \tag{5.41}$$

• Pseudo-Beschleunigung

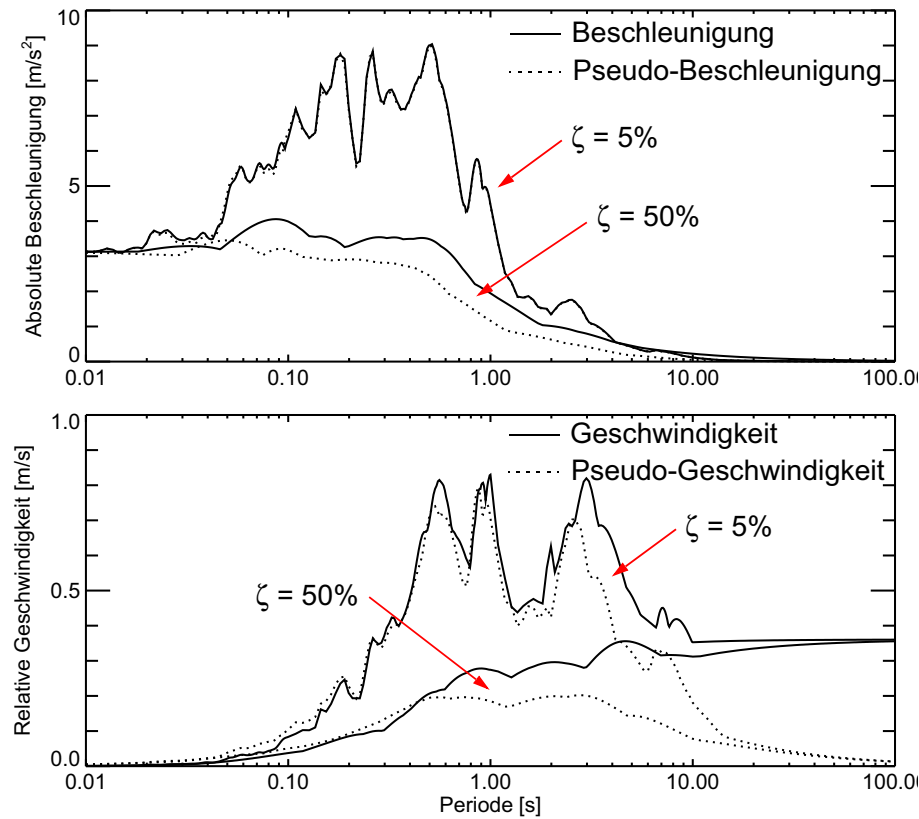
$$S_{pa} = \omega^2 S_d \tag{5.42}$$

- S_{pa} hat die Einheiten einer Beschleunigung

- S_{pa} ist ein Mass für die maximale Querkraft

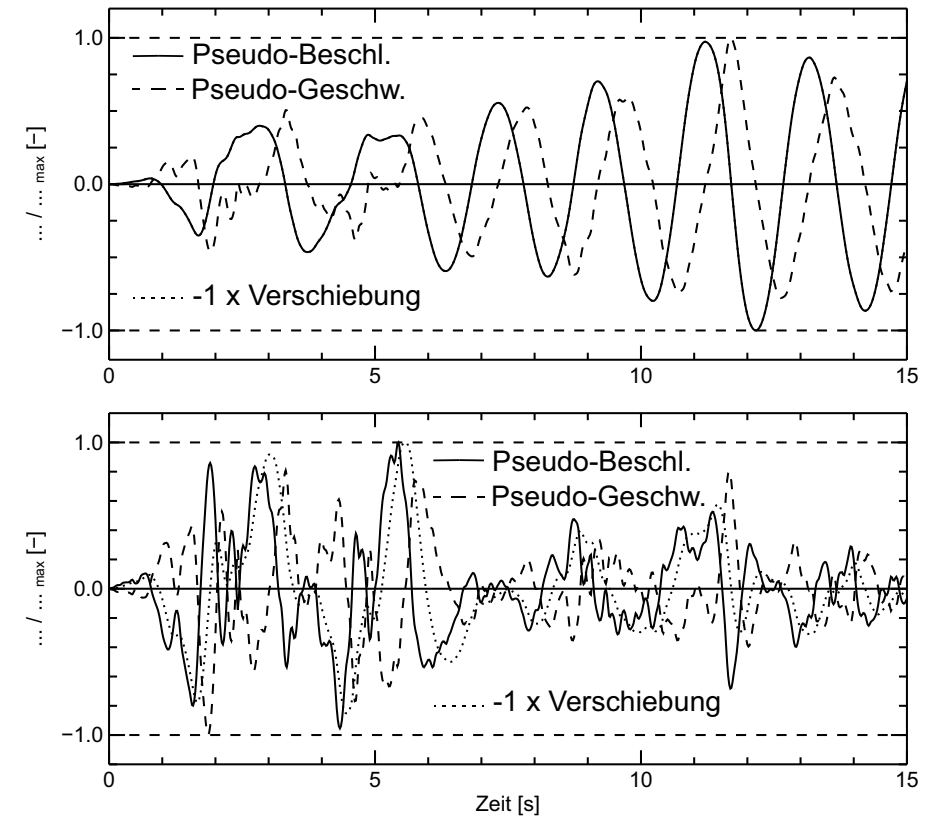
$$V = kS_d = k(S_{pa}/\omega^2) = mS_{pa} \tag{5.43}$$

• Wirkliche vs. Pseudo-Bewegungsgrösse



- Für $\zeta = 0$ sind Beschleunigung und Pseudo-Beschleunigung gleich.
- Für $T \Rightarrow \infty$ verschwindet die Pseudo-Geschwindigkeit
- Pseudo-Geschwindigkeit und Pseudo-Beschleunigung entsprechen in etwa den wirklichen Bewegungsgrößen bei EMS mit $\zeta < 20\%$ und $T < 1s$

• Bemerkungen über die Pseudo-Beschleunigung



$$\ddot{u}_a(t) = -\omega^2 u(t) - 2\zeta \omega \dot{u}(t) \quad (5.44)$$

Zeitverlauf der Pseudo-Beschleunigung $A(t)$

- Für $\zeta = 0$: $u(t) = A(t)$
- Für $\zeta > 0$: bei u_{\max} : $u_a = A$ aber $A < A_{\max}$

Verschiebung der Maxima durch die Dämpfung

• Kombinierte doppelt-logarithmische Darstellung

$$S_{pv} = \omega S_d \quad \log(S_{pv}) = \log(\omega) + \log(S_d)$$

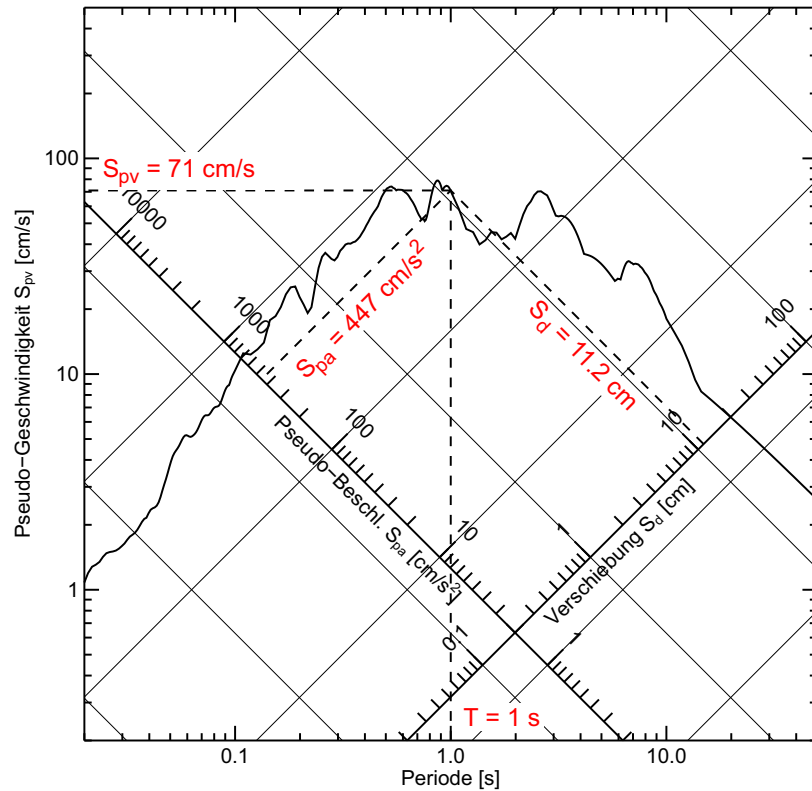
$$\log(S_{pv}) = \log(f) + \log(2\pi) + \log(S_d)$$

$$\log(S_{pv}) = -\log(T) + \log(2\pi) + \log(S_d)$$

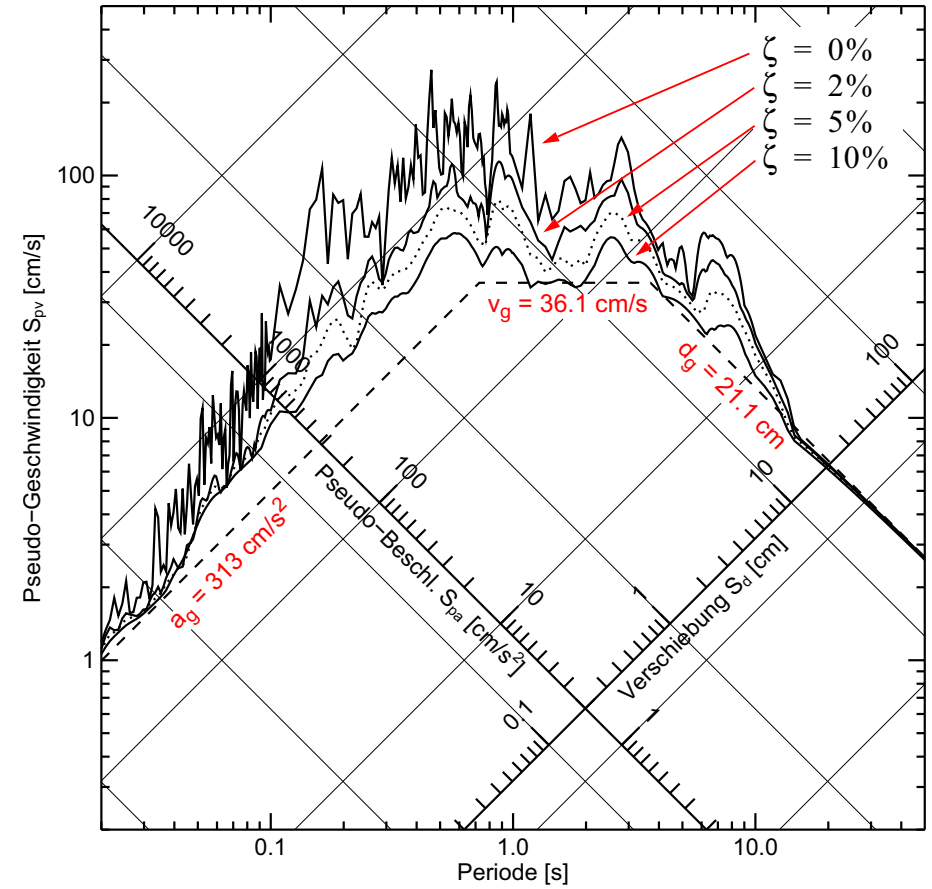
$$S_{pv} = \frac{S_{pa}}{\omega} \quad \log(S_{pv}) = -\log(\omega) + \log(S_{pa})$$

$$\log(S_{pv}) = -\log(f) - \log(2\pi) + \log(S_{pa})$$

$$\log(S_{pv}) = \log(T) - \log(2\pi) + \log(S_{pa})$$

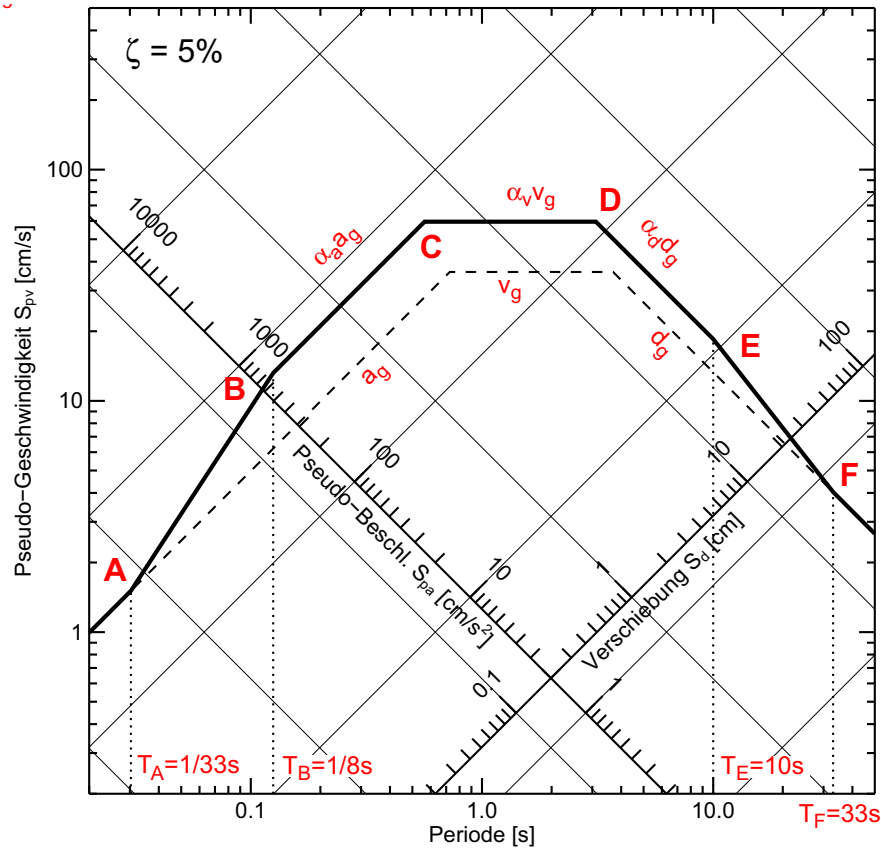


• Eigenschaften von linearen Antwortspektren



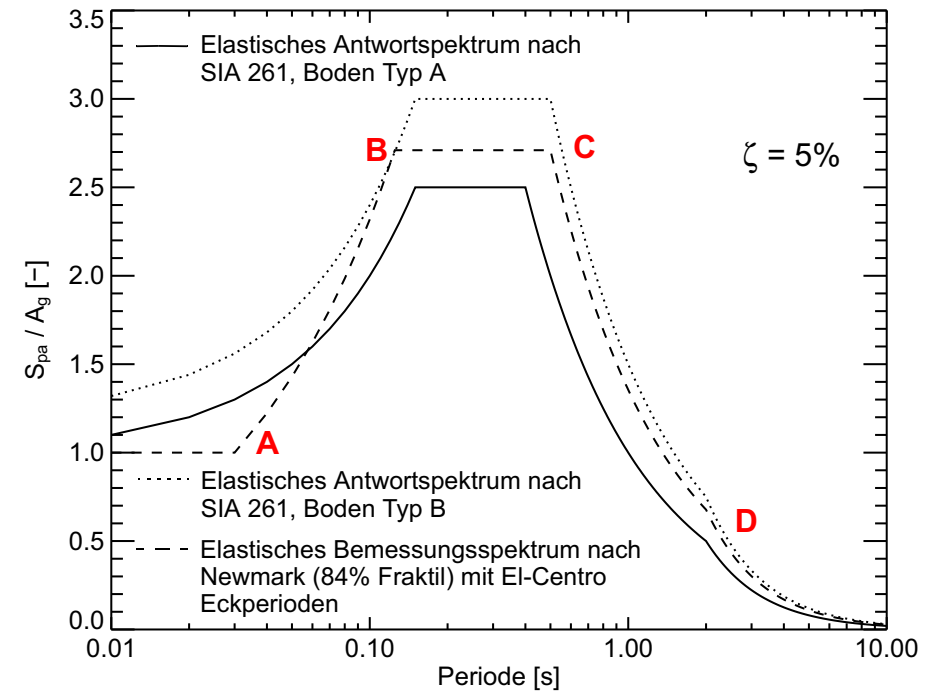
- Antwortspektren weisen Bereiche auf, die entweder mehr von der Bodenbeschleunigung oder von der Bodengeschwindigkeit oder von der Bodenverschiebung beeinflusst sind.

• Bemessungs-Antwortspektren nach Newmark



Dämpfung ζ	Median(50%)			Eine Stdabw. (84%)		
	α_a	α_v	α_d	α_a	α_v	α_d
2%	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5%	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10%	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20%	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

• Elastisches Bemessungsspektrum nach Newmark vs. Elastisches Bemessungsspektrum nach Norm SIA 261



- Die Spektren für die Norm SIA 261 und für EC8 wurden anhand ähnlicher Prinzipien wie bei den Newmark-Spektren konstruiert.
- Es wurden dabei andere Erdbeben ausgewertet.
- Nebenbei: Die Figur zeigt warum in der Norm SIA 261 und im EC8 keine Periode T_A definiert ist.

5.4 Kurze Anregung

5.4.1 Sprungfunktion

Die Differentialgleichung eines ungedämpften EMS belastet mit einer Kraft F_0 , die zur Zeit $t = 0$ plötzlich aufgebracht wird, ist:

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \quad (5.45)$$

Es gibt eine homogene und eine partikuläre Lösung

$$u_h = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \quad (\text{siehe freie Schwingungen}) \quad (5.46)$$

$$u_p = F_0/k \quad (5.47)$$

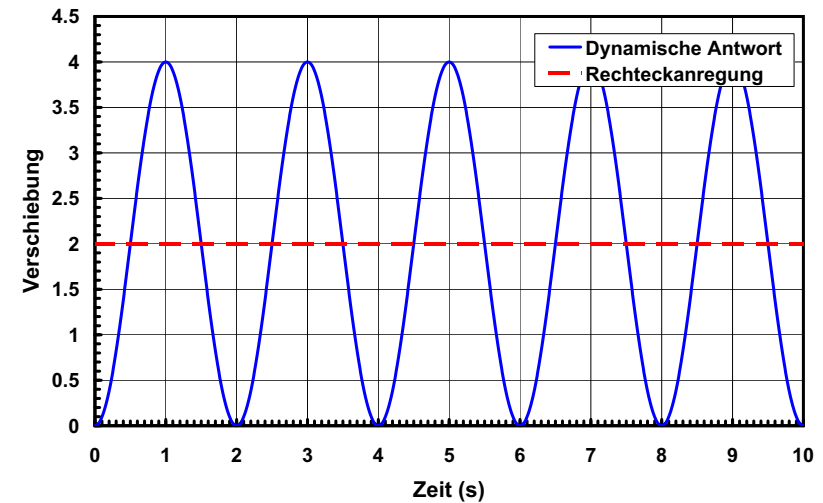
Die Gesamtlösung ist $u(t) = u_h + u_p$ wird durch die Anfangsbedingungen $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ vollständig definiert und sie ist:

$$u(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega_n t)] \quad (5.48)$$

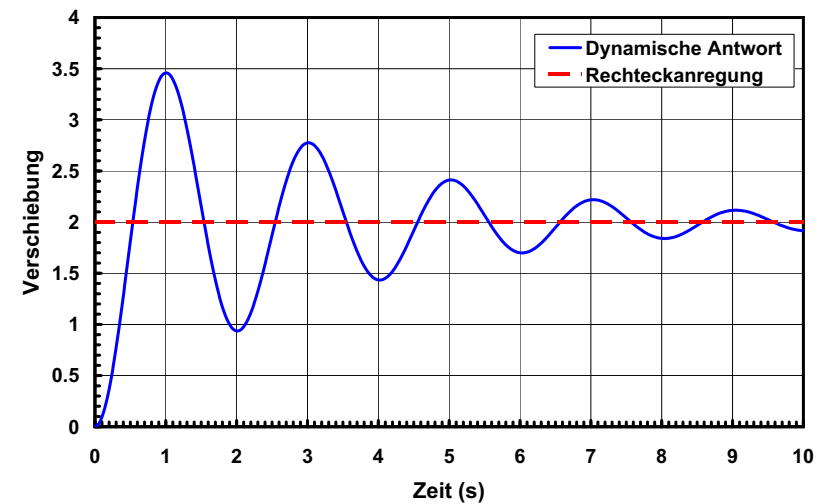
• Bemerkungen

- Der gedämpfte Fall kann genau gleich gelöst werden. Auf der Web Seite der Vorlesung gibt es eine Excel Datei zur Veranschaulichung dieser Anregung.
- Die maximale Auslenkung eines ungedämpften EMS unter einer Sprungbelastung beträgt zwei Mal die statische Auslenkung $u_{st} = F_0/k$
- Die Auslenkung zur Zeit $t = \infty$ eines gedämpften EMS unter einer Sprungbelastung ist gleich der statischen Auslenkung $u_{st} = F_0/k$

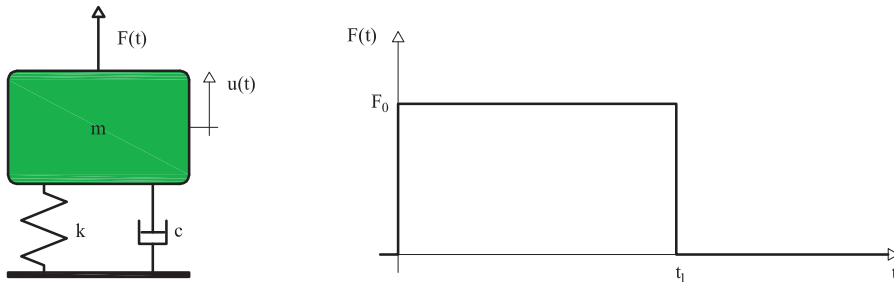
- Sprungfunktion: $T_n=2s$, $F_0/k=2$, $\zeta=0$



- Sprungfunktion: $T_n=2s$, $F_0/k=2$, $\zeta=10\%$



5.4.2 Rechteckanregung



Die DGL eines ungedämpften EMS unter einer Rechteckanregung ist:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + ku = F_0 & \text{für } t \leq t_1 \\ m\ddot{u} + ku = 0 & \text{für } t > t_1 \end{cases} \quad (5.49)$$

Bis zur Zeit $t = t_1$ entspricht die Lösung der DGL Gleichung (5.48). Ab Zeit $t = t_1$ handelt es sich um eine freie Schwingung mit Anfangsbedingungen

$$u(t_1) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos(\omega_n t_1)] \quad (5.50)$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{F_0}{k}\omega_n \sin(\omega_n t_1) \quad (5.51)$$

Die freie Schwingung ist durch folgende Gleichung beschrieben:

$$u_h = A_1 \cos(\omega_n(t - t_1)) + A_2 \sin(\omega_n(t - t_1)) \quad (5.52)$$

und anhand der Anfangsbedingungen (5.50) und (5.51) können die Konstanten A_1 und A_2 bestimmt werden.

- Kurze Anregungsdauer (t_1/T_n ist klein)

Die Reihenentwicklung von Sinus und Cosinus ist:

$$\cos(\omega_n t_1) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_n} t_1\right) = 1 - \frac{(\omega_n t_1)^2}{2} + \dots \quad (5.53)$$

$$\sin(\omega_n t_1) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_n} t_1\right) = \omega_n t_1 + \frac{(\omega_n t_1)^3}{6} + \dots \quad (5.54)$$

und für kleine t_1/T_n vereinfachen sich die Ausdrücke zu:

$$\cos(\omega_n t_1) \cong 1, \quad \sin(\omega_n t_1) \cong \omega_n t_1 \quad (5.55)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (5.55) in Gleichungen (5.50) und (5.51) es ergibt sich:

$$u(t_1) = 0, \quad \dot{u}(t_1) = \frac{F_0}{k}\omega_n^2 t_1 = \frac{F_0 t_1}{m} \quad (5.56)$$

Gleichung (5.56) zeigt, dass eine kurze Anregung als eine freie Schwingung mit Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = I/m \quad (5.57)$$

interpretiert werden kann. I ist der Impuls, der von der Kraft F_0 während der Zeit t_1 erzeugt wird.

- Rechteckanregung: $I = F_0 t_1$
- Dreiecksanregung: $I = 0.5 F_0 t_1$
- Beliebige kurze Anregung: $I = \int_0^{t_1} F(t) dt$

Die Gleichung einer ungedämpften freien Schwingung ist:

$$u(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad \text{mit} \quad A = \sqrt{u_0 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan \phi = \frac{v_0}{\omega_n u_0} \quad (5.58)$$

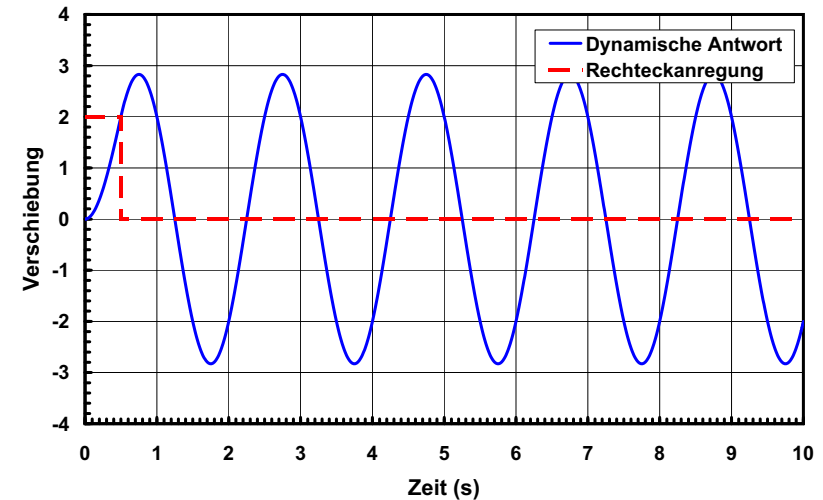
Deshalb beträgt die maximale Amplitude einer kurzen Anregung:

$$A = \frac{v_0}{\omega_n} \quad (5.59)$$

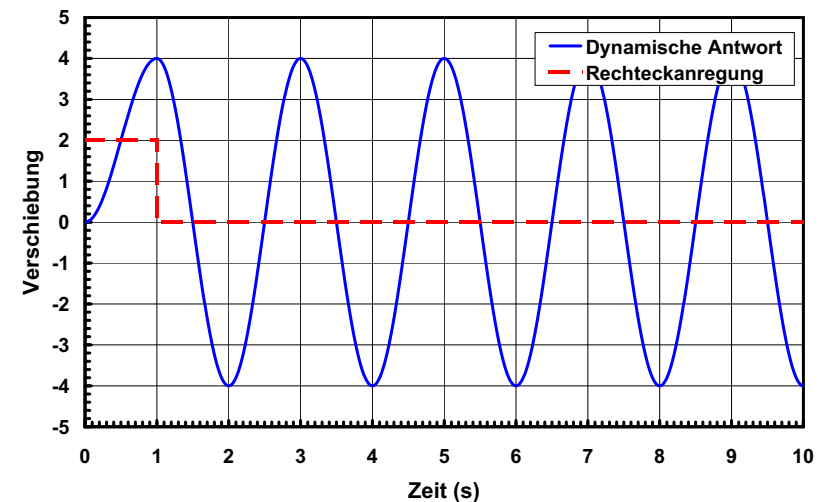
• Bemerkungen

- Der gedämpfte Fall kann genau gleich gelöst werden. Auf der Web Seite der Vorlesung gibt es eine Excel Datei zur Veranschaulichung dieser Anregung.
- Rechteckanregung: Wenn $t_1 > T_n/2$, beträgt die maximale Antwort des EMS zwei Mal die statischen Auslenkung $u_{st} = F_0/k$
- Rechteckanregung: Wenn $t_1 > T_n/2$, kann die maximale Amplitude des EMS für gewisse Verhältnisse von t_1/T_n (z.B.: 0.5, 1.5, ...) sogar $4F_0/k$ betragen.
- Rechteckanregung mit Dämpfung: selber ausprobieren anhand der angegebenen Excel-Tabelle.
- Kurze Anregung: Die Form der Anregung hat praktisch keinen Einfluss auf die maximale Antwort des EMS. Wichtig ist der Impuls.
- Kurze Anregung: Gleichung (5.59) stimmt nur für $t_1/T_n \rightarrow 0$ und $\zeta = 0$. Für alle andere Fälle handelt es sich erst um eine Näherung, die die tatsächliche maximale Auslenkung überschätzt.

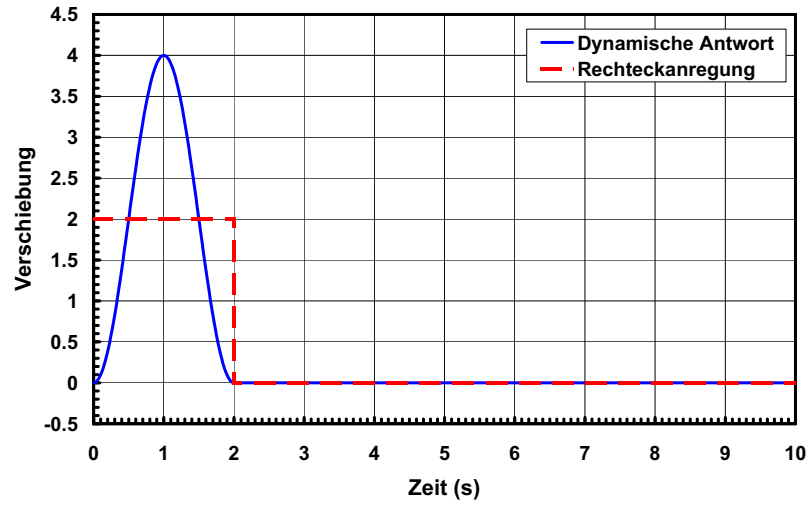
- Rechteckanregung: $T_n=2\text{s}$, $t_1=0.5\text{s}$ ($t_1/T_n=0.25$), $F_0/k=2$, $\zeta=0\%$



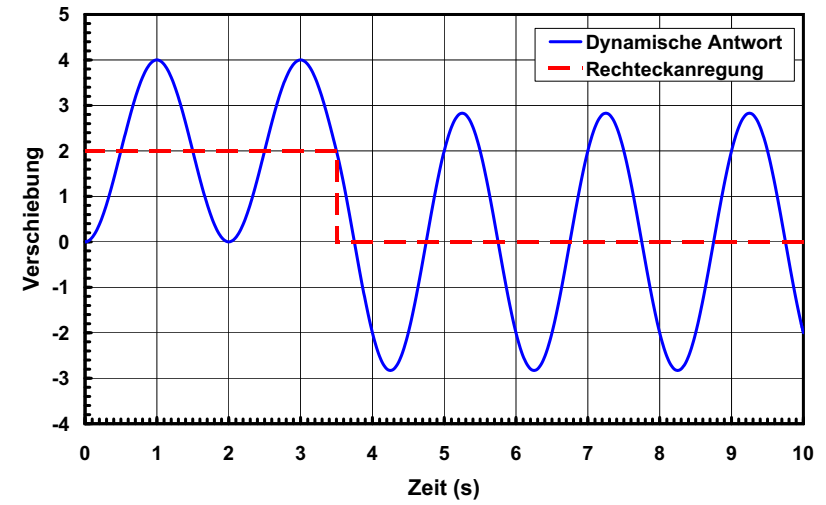
- Rechteckanregung: $T_n=2\text{s}$, $t_1=1\text{s}$ ($t_1/T_n=0.50$), $F_0/k=2$, $\zeta=0\%$



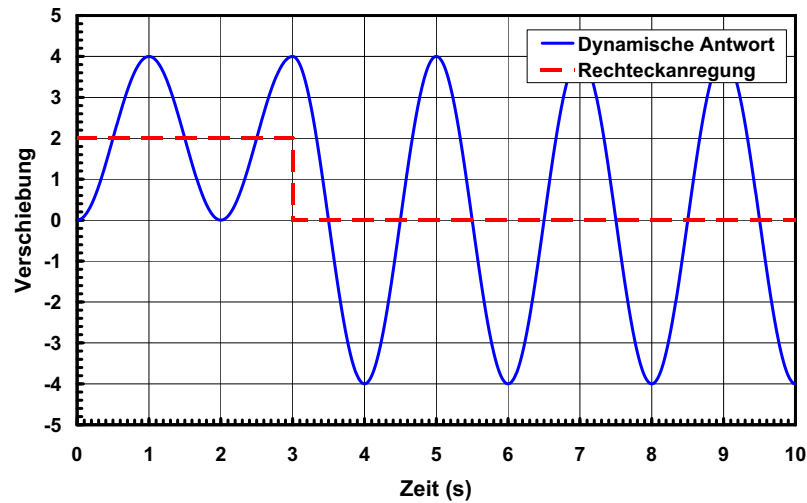
- Rechteckanregung: $T_n=2s$, $t_1=2s$ ($t_1/T_n=1.00$), $F_o/k=2$, $\zeta=0\%$



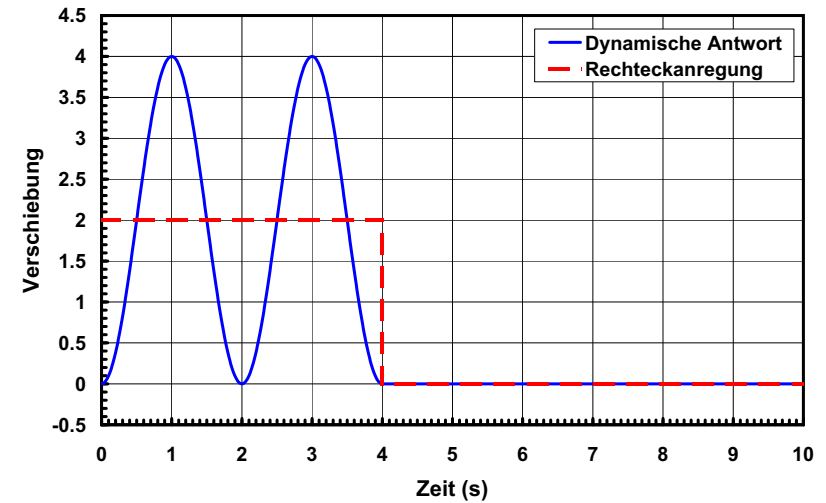
- Rechteckanregung: $T_n=2s$, $t_1=3.5s$ ($t_1/T_n=1.75$), $F_o/k=2$, $\zeta=0\%$



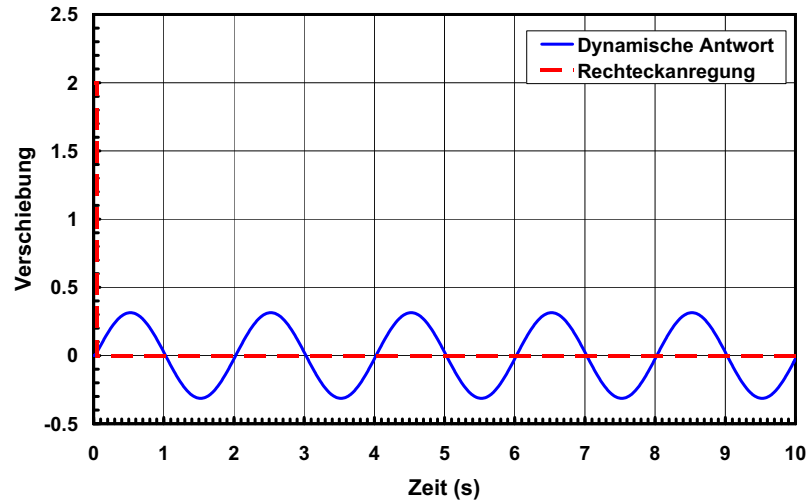
- Rechteckanregung: $T_n=2s$, $t_1=3s$ ($t_1/T_n=1.50$), $F_o/k=2$, $\zeta=0\%$



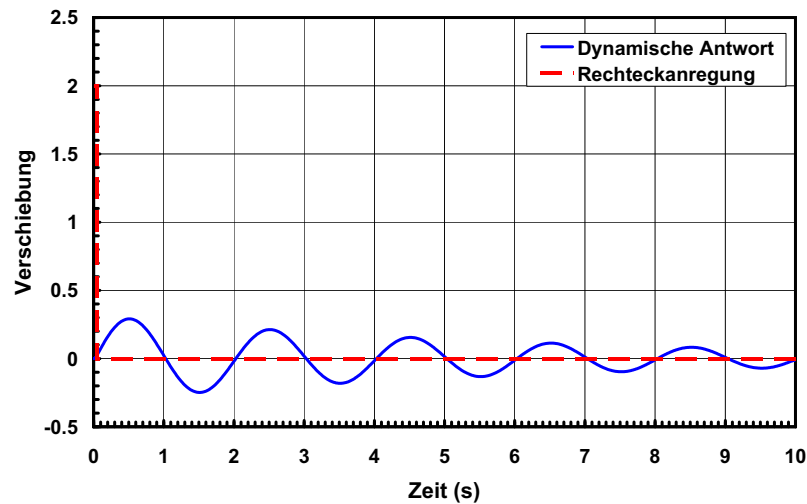
- Rechteckanregung: $T_n=2s$, $t_1=4s$ ($t_1/T_n=2.00$), $F_o/k=2$, $\zeta=0\%$



- Kurze Rechteckanregung: $T_n=2s$, $t_1=0.05s$, $F_0/k=2$, $\zeta=0\%$



- Kurze Rechteckanregung: $T_n=2s$, $t_1=0.05s$, $F_0/k=2$, $\zeta=5\%$



5.4.3 Beispiel "Sprengwirkung" (siehe Einführung)

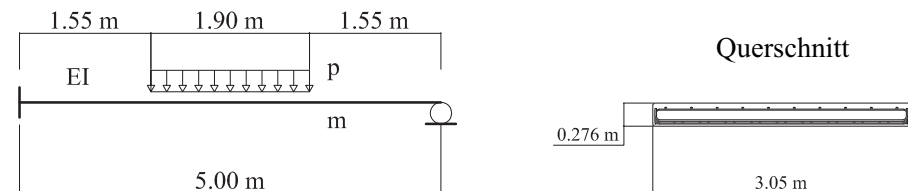
- Versuch



- Modellierung Variante 1

Im Rahmen einer vereinfachten Modellierung wird angenommen, dass die Platte während der Belastung elastisch bleibt. Gesucht ist die maximale Einsenkung der Platte infolge der Explosion.

- Vereinfachtes System



Masse: $m = 3.05 \cdot 0.276 \cdot 2.45 = 2.06t/m$

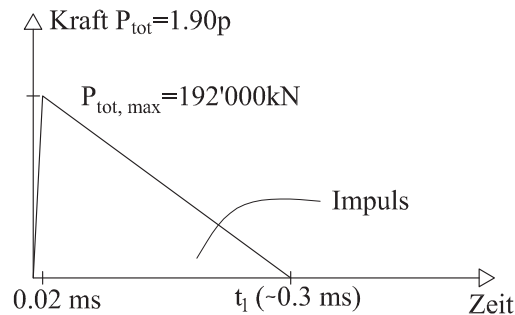
Beton: $f'_c = 41.4\text{MPa}$, $E_c = 5000 \cdot \sqrt{f'_c} = 32172\text{MPa}$

Steifigkeit: $I_o = (3050 \cdot 276^3)/12 = 5344 \times 10^6 \text{mm}^4$

$E_c I_o = 171.9\text{kNm}^2$

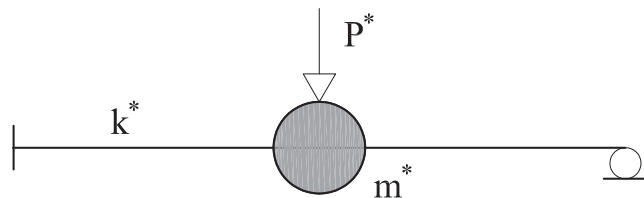
$E_c I = 0.30 E_c I_o = 52184\text{kNm}^2$ (wegen Rissebildung!)

- Einwirkung



$t_1 \approx 0.3\text{ms}$ ist sicher wesentlich kleiner als die Periode $T_n = 64\text{ms}$ der Platte (siehe Gleichung (5.71)). Deshalb kann die Anregung als "kurz" betrachtet werden.

- Äquivalenter modaler EMS (siehe Abschnitt "Modellbildung")



Ansatz für die Verformungsfigur:

$$\psi = C1 \cdot \sin(\beta x) + C2 \cdot \cos(\beta x) + C3 \cdot \sinh(\beta x) + C4 \cdot \cosh(\beta x) \tag{5.60}$$

Randbedingungen:

$$\psi(0) = 0 , \psi(L) = 0 , \psi'(0) = 0 , \psi'(L) = 0 \tag{5.61}$$

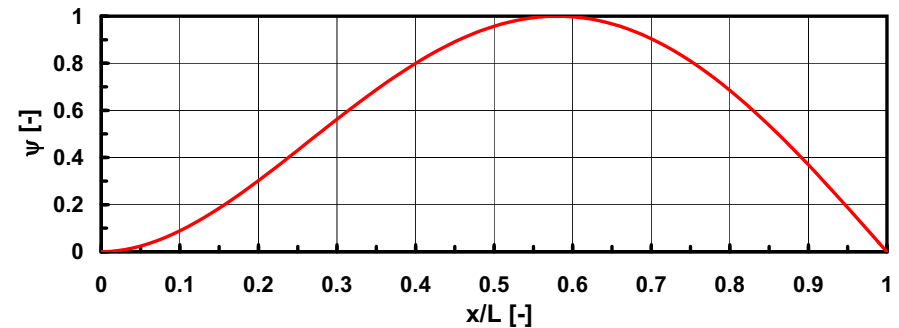
Mit dem Mathematikprogramm "Maple" kann Gleichung (5.60) für die Randbedingungen (5.61) gelöst werden und es ergibt sich:

$$1.508 \cdot \psi = \sin(\beta x) - \sinh(\beta x) + \frac{[\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)] \cdot [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)]}{-\cos(\beta L) - \cosh(\beta L)} \tag{5.62}$$

mit

$$\beta L = 3.927 \tag{5.63}$$

Der Verlauf der Funktion ψ ist:



Und mit den Gleichungen aus Kapitel "Modellbildung" können die modalen Eigenschaften des äquivalenten EMS bestimmt werden:

$$m^* = \int_0^L m \cdot \psi^2 \cdot dx = 0.439mL \tag{5.64}$$

$$k^* = \int_0^L (EI \cdot (\psi'')^2 \cdot dx) = 104.37 \cdot \frac{EI}{L^3} \quad (5.65)$$

$$P^* = \int_{L_1=1.55m}^{L_2=3.45m} (p \cdot \psi \cdot dx) = 0.888 \cdot P_{tot} \quad (5.66)$$

Für dieses Beispiel sind die modalen Grössen, die den äquivalenten modalen EMS charakterisieren:

$$m^* = 0.439 \cdot 2.06 \cdot 5 = 4.52t \quad (5.67)$$

$$k^* = 104.37 \cdot \frac{52184}{5^3} = 43571 \text{ kN/m} \quad (5.68)$$

$$P^* = 0.888 \cdot 192000 = 170496 \text{ kN} \quad (5.69)$$

$$\omega = \sqrt{k^*/m^*} = \sqrt{43571/4.52} = 98.18 \text{ rad/s} \quad (5.70)$$

$$T_n = 2\pi/\omega = 0.064s \quad (5.71)$$

Die maximale elastische Verformung des EMS kann anhand des modalen Impuls berechnet werden und zwar:

$$I^* = 0.5 \cdot P^* \cdot t_0 = 0.5 \cdot 170496 \cdot 0.3 \times 10^{-3} = 25.6 \text{ kNs} \quad (5.72)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit der freien Schwingung ist:

$$v_0 = \frac{I^*}{m^*} = \frac{25.6}{4.52} = 5.66 \text{ m/s} \quad (5.73)$$

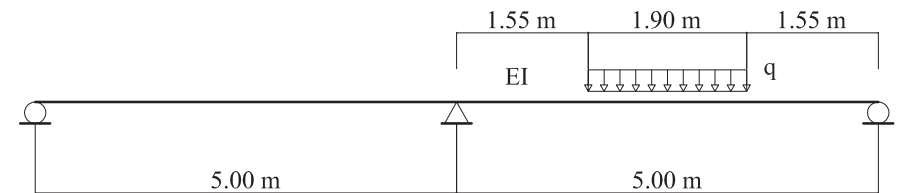
Die maximale elastische Auslenkung ist:

$$\Delta_{m,e} = v_0/\omega = 5.66/98.18 = 0.058 \text{ m} \quad (5.74)$$

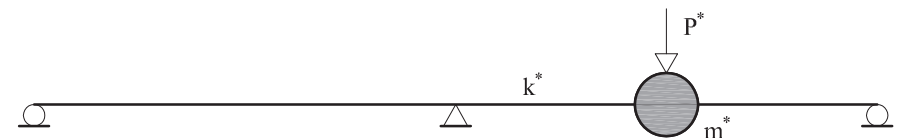
• Modellierung Variante 2

Im Rahmen einer vereinfachten Modellierung wird angenommen, dass die Platte während der Belastung elastisch bleibt. Gesucht ist die maximale Einsenkung der Platte infolge der Explosion.

- Vereinfachtes System



- Äquivalenter modaler EMS (siehe Abschnitt "Modellbildung")



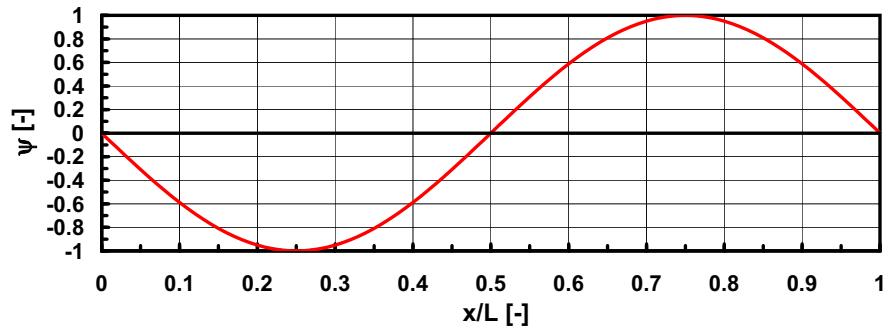
Ansatz für die Verformungsfigur:

$$\psi = -\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (5.75)$$

Randbedingungen:

$$\psi(0) = 0, \psi(L) = 0, \psi''(0) = 0, \psi''(L) = 0 \quad (5.76)$$

Der Verlauf der Funktion ψ ist:



Und mit den Gleichungen aus Kapitel "Modelbildung" können die modalen Eigenschaften des äquivalenten EMS bestimmt werden:

$$m^* = \int_0^L m \cdot \psi^2 \cdot dx = 0.5mL \quad (5.77)$$

$$k^* = \int_0^L (EI \cdot (\psi'')^2 \cdot dx) = 8\pi^4 \cdot \frac{EI}{L^3} = 779.27 \cdot \frac{EI}{L^3} \quad (5.78)$$

$$P^* = \int_{L_1=6.55m}^{L_2=8.45m} (p \cdot \psi \cdot dx) = 0.941 \cdot P_{tot} \quad (5.79)$$

Für dieses Beispiel sind die modalen Größen, die den äquivalenten modalen EMS charakterisieren:

$$m^* = 0.5 \cdot 2.06 \cdot 10 = 10.3t \quad (5.80)$$

$$k^* = 779.27 \cdot \frac{52184}{10^3} = 40666kN/m \quad (5.81)$$

$$P^* = 0.941 \cdot 192000 = 180672kN \quad (5.82)$$

$$\omega = \sqrt{k^*/m^*} = \sqrt{40666/10.3} = 62.83rad/s \quad (5.83)$$

$$T_n = 2\pi/\omega = 0.10s \quad (5.84)$$

Die maximale elastische Verformung des EMS kann anhand des modalen Impuls berechnet werden und zwar:

$$I^* = 0.5 \cdot P^* \cdot t_0 = 0.5 \cdot 180672 \cdot 0.3 \times 10^{-3} = 27.1kNs \quad (5.85)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit der freien Schwingung ist:

$$v_0 = \frac{I^*}{m^*} = \frac{27.1}{10.3} = 2.63m/s \quad (5.86)$$

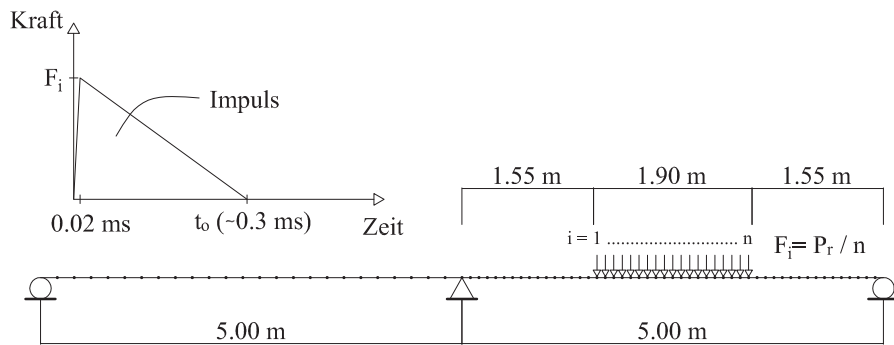
Die maximale elastische Auslenkung ist:

$$\Delta_{m,e} = v_0/\omega = 2.63/62.83 = 0.042m \quad (5.87)$$

• Modellierung Variante 3

Als dritte Variante wird die Platte mit finiten Elementen in SAP 2000 modelliert.

- Numerisches Model



Die verteilte Belastung q wird anhand von $n = 19$ konzentrierten Kräften F_i ersetzt:

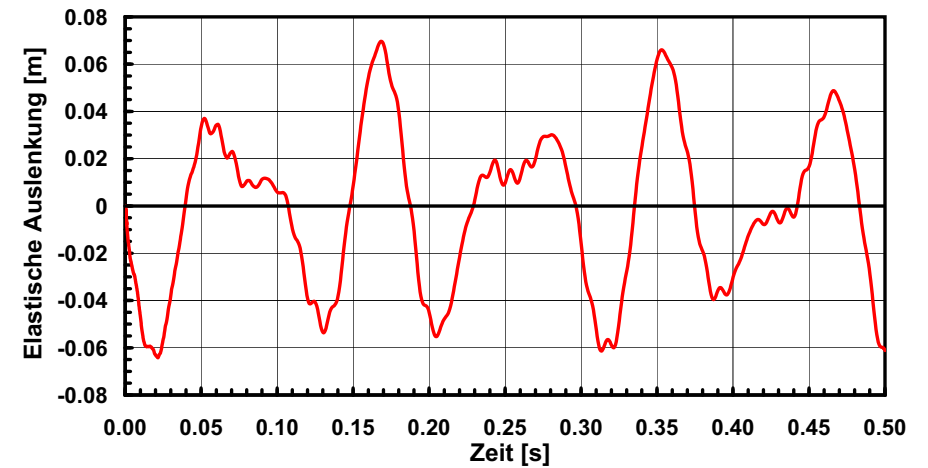
$$F_i = \frac{192000}{19} = 10105 \text{ kN} \quad (5.88)$$

Die erste Periode des Systems beträgt:

$$T_1 = 0.100 \text{ s} \quad (5.89)$$

was Gleichung (5.84) entspricht.

Und der Verlauf der elastische Auslenkung ist:



Der Einfluss der oberen Eigenschwingungen ist deutlich zu erkennen!

• Vergleich

System	m^* [t]	k^* [kN/m]	P^* [P]	T [s]	$\Delta_{m,e}$ [m]
	4.52	43571	0.888	0.064	0.058
	10.30	40666	0.941	0.100	0.042
	-	-	-	0.100	0.064