4 Übertragungsfunktionen

4.1 Kraftanregung

Die stationäre Verschiebung eines Systems infolge harmonischer Anregung ist (siehe Kap. 3.2 über harmonische Anregung):

$$u_p = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \tag{4.1}$$

mit

$$a_1 = f_o \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}, \quad a_2 = f_o \frac{2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \tag{4.2}$$

Anhand der trigonometrischen Identität

$$a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\alpha - \phi) \text{ wobei } \tan\phi = \frac{b}{a} \tag{4.3}$$

kann Gleichung (4.1) wie folgt umgeformt werden:

$$u_p = u_{max} \cos(\omega t - \phi) \tag{4.4}$$

Es handelt sich dabei um eine Cosinusschwingung mit der maximalen dynamischen Amplitude u_{max}:

$$u_{max} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \tag{4.5}$$

und der Phasenwinkel ϕ aus:

$$\tan\phi = \frac{a_2}{a_1} \tag{4.6}$$

Die maximale dynamische Amplitude u_{max} aus Gleichung (4.5) kann umgeformt werden zu:

$$u_{max} = \sqrt{\left(f_o \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\right)^2 + \left(f_o \frac{2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\right)^2} \tag{4.7}$$

$$u_{max} = f_o \sqrt{\frac{\cancel{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2]^{\cancel{2}}}} \tag{4.8}$$

$$u_{max} = f_o \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \tag{4.9}$$

$$u_{max} = \frac{f_o}{\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \tag{4.10}$$

Mit der maximalen statischen Amplitude $u_o = F_o/k = f_o/\omega_n^2$ bekommt man den dynamischen Vergrösserungsfaktor $V(\omega)$:

$$V(\omega) = \frac{u_{max}}{u_o} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \tag{4.11}$$

Das Maximum des Vergrösserungsfaktors $V(\omega)$ tritt auf wenn seine Ableitung, die in Gleichung (4.12) angegeben ist, gleich null ist.

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{2\omega\omega_n^2[\omega^2 - \omega_n^2(1-2\zeta^2)]}{[\omega^4 - 2(1-2\zeta^2)\omega^2\omega_n^2 + \omega_n^4]^{(3/2)}} \quad (4.12)$$

$$\frac{dV}{d\omega} = 0 \text{ wenn: } \omega = 0 \text{ , } \omega = \pm\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (4.13)$$

Das Maximum des Vergrösserungsfaktors tritt auf wenn:

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \text{ für } \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71 \quad (4.14)$$

und es gilt:

$$\omega = \omega_n: \qquad V = \frac{1}{2\zeta} \quad (4.15)$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}: \qquad V = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.16)$$

Aus Gleichung (4.6) wird der Phasenwinkel ϕ:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \quad (4.17)$$

Der Phasenwinkel hat folgende interessante Eigenschaft:

$$\frac{d\phi}{d(\omega/\omega_n)} = \frac{2\zeta[1+(\omega/\omega_n)^2]}{1-2(\omega/\omega_n)^2 + (\omega/\omega_n)^4 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2} \quad (4.18)$$

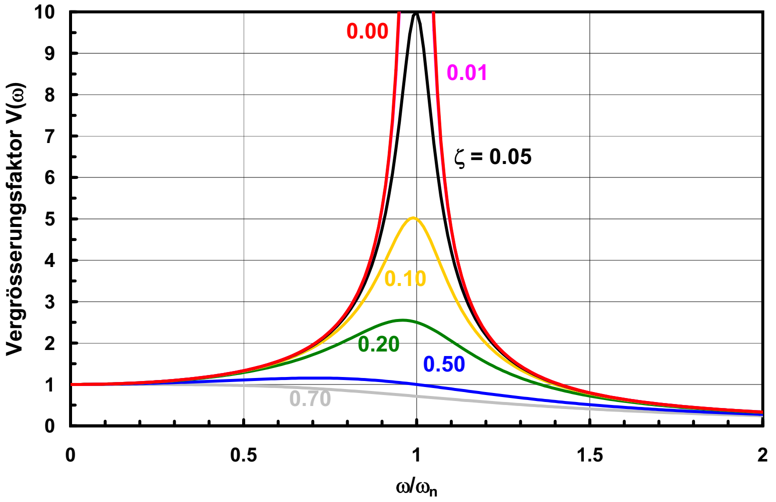
bei $\omega/\omega_n = 1$ gilt: $\frac{d\phi}{d(\omega/\omega_n)} = \frac{1}{\zeta}$ $\left(= \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{180}{\pi}\right.$ wenn ϕ in deg) (4.19)

4.1.1 Bemerkungen zum Vergrösserungsfaktor V

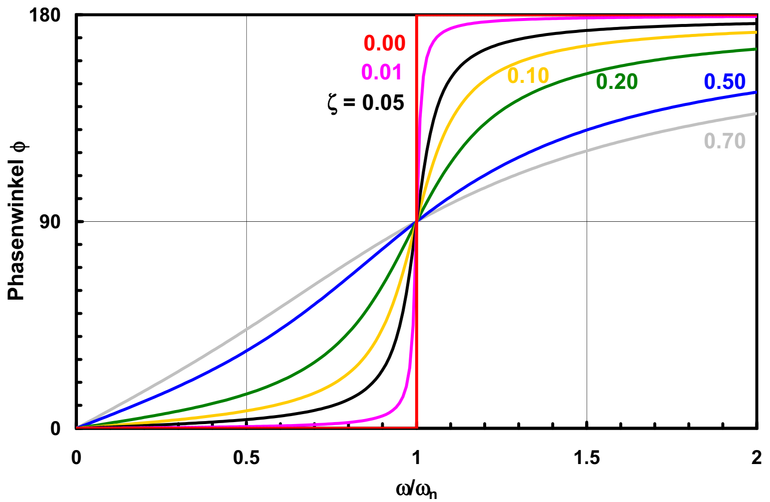
$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (4.20)$$

- $\omega/\omega_n \ll 1$: Anregungskraft variiert langsam (ζ unwichtig)
  - $V(\omega) \approx 1$ deshalb: $u_{max} \approx u_o$
  - $\phi \approx 0$: Bewegung und Anregungskraft sind in Phase
- $\omega/\omega_n \gg 1$: Anregungskraft Kraft variiert schnell (ζ unwichtig)
  - $V(\omega) \approx \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2$
  - $u_{max} \approx u_o \cdot \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 = F_o/(m\omega^2)$: Masse steuert das Verhalten
  - $\phi \approx 180$: Bewegung und Anregungskraft sind entgegengesetzt
- $(\omega/\omega_n) \approx 1$: ($\zeta$ sehr wichtig)
  - $V(\omega) \approx \frac{1}{2\zeta}$
  - $u_{max} \approx u_o/(2\zeta) = F_o/(c\omega_n)$: Dämpfung steuert das Verhalten
  - $\phi \approx 90$: Bewegung null wenn Anregungskraft maximal

- Vergrösserungsfaktor



- Phasenwinkel



- Beispiel:

Eine Anregung erzeugt die statische Bewegung

$$u_{st} = \frac{F_o \cos(\omega t)}{k} \tag{4.21}$$

und sein Maximum ist:

$$u_o = \frac{F_o}{k} \tag{4.22}$$

Die stationäre dynamische Antwort des Systems ist:

$$u_p = u_{max} \cos(\omega t - \phi) \tag{4.23}$$

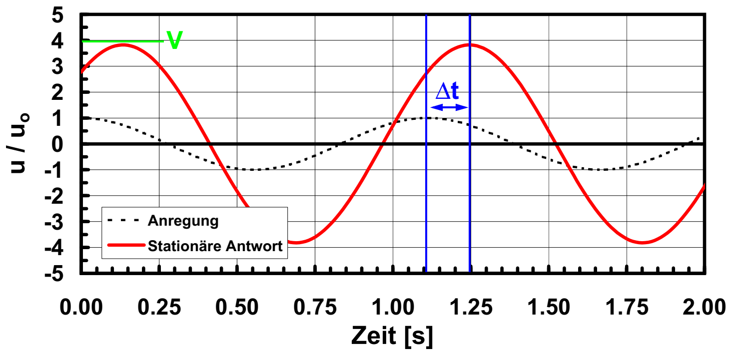
Deshalb:

$$\frac{u_{st}}{u_o} = \cos(\omega t) \qquad , \qquad \frac{u_p}{u_o} = V \cos(\omega t - \phi) \tag{4.24}$$

Im nächsten Diagramm werden Zeitverläufe von u_{st}/u_o und u_p/u_o dargestellt und verglichen.

Der Phasenwinkel ϕ ist immer positiv und wegen des Minus-Vorzeichens in Gleichung (4.24) zeigt er wieviel die Anwort der Anregung hintennach hinkt.

Frequenz der EMS f_n = 1Hz (ω_n = 6.28rad/s), Dämpfungsrate ζ = 0.1



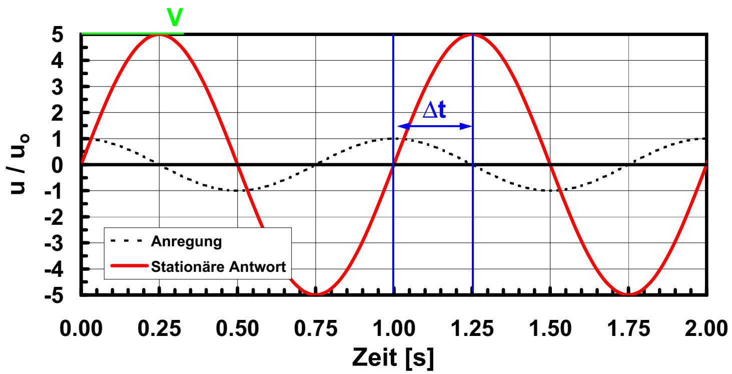
$\omega / \omega_n = 0.9$

$$\omega = 0.9 \cdot 6.28 = 5.65 \text{ rad/s}$$

$$V = 3.82$$

$$\phi = 43.45° = 0.76 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{0.76}{5.65} = 0.14 \text{ s}$$



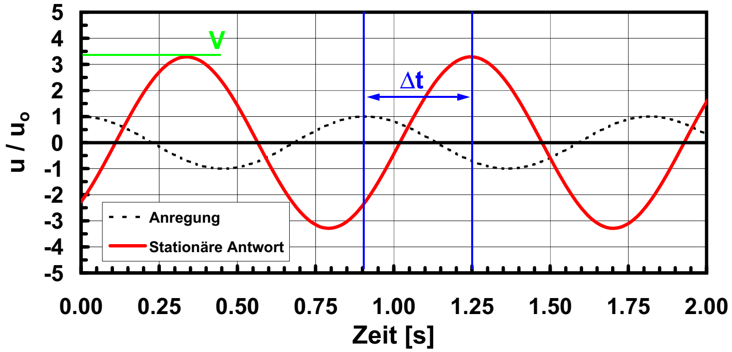
$\omega / \omega_n = 1.0$

$$\omega = 1.0 \cdot 6.28 = 6.28 \text{ rad/s}$$

$$V = 5.00$$

$$\phi = 90.00° = 1.57 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{1.57}{6.28} = 0.25 \text{ s}$$



$\omega / \omega_n = 1.1$

$$\omega = 1.1 \cdot 6.28 = 6.91 \text{ rad/s}$$

$$V = 3.28$$

$$\phi = 133.66° = 2.33 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{2.33}{6.91} = 0.34 \text{ s}$$

4.1.2 Stationäre Bewegungsgrösse

- Verschiebung: Entspricht Gleichung (4.4)

$$\frac{u_p}{F_o/k} = V(\omega)\cos(\omega t - \phi) \tag{4.25}$$

- Geschwindigkeit: Aus der Ableitung von Gleichung (4.25)

$$\frac{\dot{u}_p}{F_o/k} = -V(\omega)\omega\sin(\omega t - \phi) \tag{4.26}$$

$$\frac{\dot{u}_p}{(F_o/k)\omega_n} = -V(\omega)\frac{\omega}{\omega_n}\sin(\omega t - \phi) \tag{4.27}$$

$$\frac{\dot{u}_p}{F_o/\sqrt{km}} = -V_v(\omega)\sin(\omega t - \phi) \text{ mit } V_v(\omega) = \frac{\omega}{\omega_n}V(\omega) \tag{4.28}$$

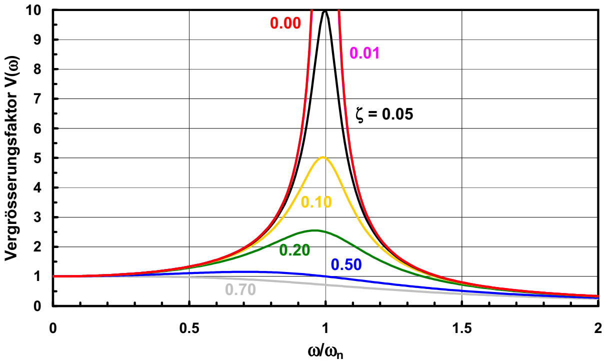
- Beschleunigung: Aus der Ableitung von Gleichung (4.26)

$$\frac{\ddot{u}_p}{F_o/k} = -V(\omega)\omega^2\cos(\omega t - \phi) \tag{4.29}$$

$$\frac{\ddot{u}_p}{(F_o/k)\omega_n^2} = -V(\omega)\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\cos(\omega t - \phi) \tag{4.30}$$

$$\frac{\ddot{u}_p}{F_o/m} = -V_a(\omega)\cos(\omega t - \phi) \text{ mit } V_a(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}V(\omega) \tag{4.31}$$

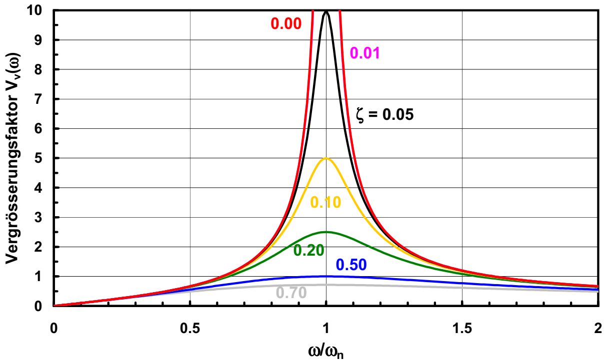
- Vergrösserungsfaktoren



Resonanz bei der Verschiebung

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

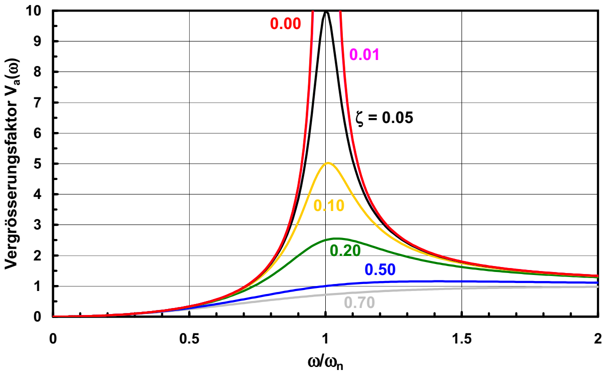
$$V = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta}}$$



Resonanz bei der Geschwindigkeit

$$\omega = \omega_n$$

$$V = \frac{1}{2\zeta}$$



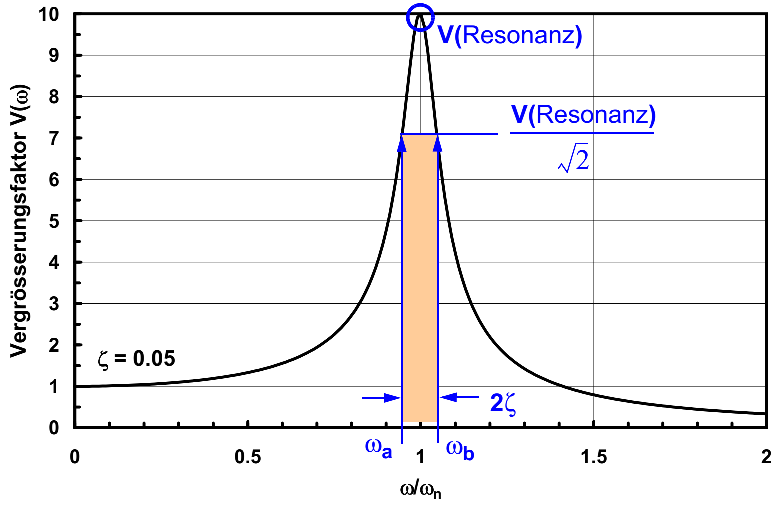
Resonanz bei der Beschleunigung

$$\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

$$V = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta}}$$

4.1.3 Eigenschaften von Einmassenschwinger aus harmonischen Schwingungen

- Halbwertbreite



Bedingung:

$$V(\omega) = \frac{V(\omega/\omega_n = \sqrt{1-2\zeta^2})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta}} \tag{4.32}$$

$$\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta}} \tag{4.33}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1-2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2(1-\zeta^2) = 0 \tag{4.34}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 1-2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \tag{4.35}$$

Für kleine Dämpfungen können die Terme mit ζ^2 vernachlässigt werden:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \approx \sqrt{1 \pm 2\zeta} \approx 1 \pm \zeta \qquad (4.36)$$

Daraus ergibt sich die Lösung für die Halbwertbreite:

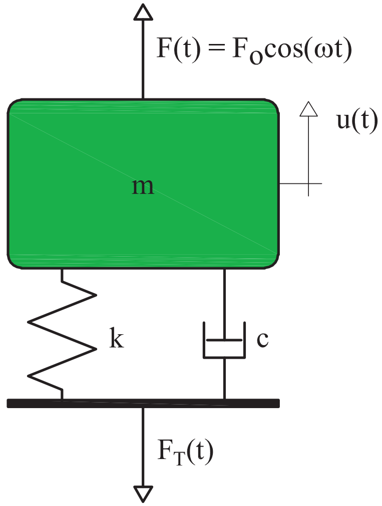
$$2\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} \qquad (4.37)$$

- Bemerkungen zur Frequenzganglinie
    - Die Eigenfrequenz des Systems kann aus der Resonanzantwort hergeleitet werden. Es ist aber manchmal problematisch die ganze Frequenzganglinie zu fahren, weil bei der Resonanzfrequenz Schäden am System entstehen könnten. Aus diesem Grund ist es oft besser, die Eigenschaften eines Systems anhand von Ausschwingversuchen zu bestimmen (siehe Abschnitt über freie Schwingungen).
    - Die Eigenfrequenz ω_n wird bestimmt indem die Anregung variiert wird bis eine Phasenverschiebung in der Antwort von $90°$ entsteht.
    - Die Dämpfung kann aus Gleichung (4.15) bestimmt werden:

    $$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_o}{u_{max}}$$

    Es ist aber manchmal schwierig die statische Auslenkung u_o zu bestimmen; deshalb wird die Definition der Halbwertbreite verwendet, um die Dämpfung zu schätzen.
    - Die Dämpfung kann auch aus der Neigung der Phasenwinkelkurve anhand von Gleichung (4.19) bestimmt werden.

4.2 Kraftübertragung (Schwingungsisolierung)



Das Masse-Feder-Dämpfer-System, hier rechts dargestellt, wird durch die harmonische Kraft

$$F(t) = F_o \cos(\omega t)$$

angeregt.

Wie gross ist die Reaktionskraft $F_T(t)$, die im Fundament eingeleitet wird?

Die Reaktionskraft $F_T(t)$ ergibt sich aus der Summe der Federkraft F_s und der Dämpferkraft F_c

$$F_T(t) = F_s(t) + F_c(t) = ku(t) + c\dot{u}(t) \qquad (4.38)$$

Die stationäre Verschiebung des Systems infolge der harmonischen Anregung $F(t)$ ist gemäss Gleichung (4.4):

$$u_p = u_{max}\cos(\omega t - \phi) \text{ mit } u_{max} = u_o V(\omega) = \frac{F_o}{k}V(\omega) \qquad (4.39)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.39) und ihrer Ableitung in Gleichung (4.38) bekommt man:

$$F_T(t) = \frac{F_o}{k}V(\omega)[k\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)] \qquad (4.40)$$

Mit der trigonometrischen Identität aus Gleichung (4.3):

$$F_T(t) = \frac{F_o}{k} V(\omega)[\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \cos(\omega t - \bar{\phi})] \tag{4.41}$$

Durch Einsetzen der Identität $c = (2\zeta k)/\omega_n$:

$$F_T(t) = F_o V(\omega) \sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos(\omega t - \bar{\phi}) \tag{4.42}$$

Die maximale Reaktionskraft beträgt:

$$\frac{F_{T,max}}{F_o} = TR(\omega) \tag{4.43}$$

wobei $TR(\omega)$ als Transmissibilität bezeichnet wird. Sie beträgt:

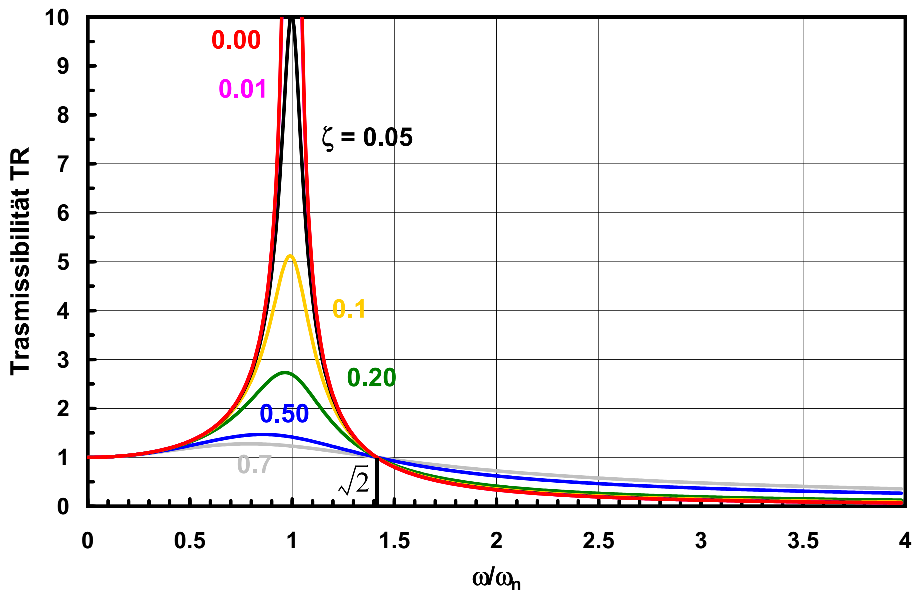
$$TR(\omega) = V(\omega) \sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{4.44}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

Spezialfall:

$$TR\left(\frac{\omega}{\omega_n} = 1\right) = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2}}{2\zeta} \tag{4.45}$$

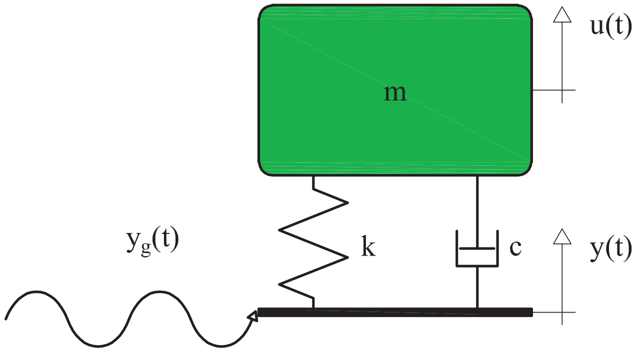
- Darstellung der Transmissibilität TR



- Wenn $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ dann $TR < 1$: Schwingungsisolierung
- Wenn $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ wirkt die Dämpfung versteifend
- Hochabstimmung (unterkritische Erregung)
- Tiefabstimmung (überkritische Erregung):
  Achtung Anlauf!

4.3 Fusspunktanregung (Schwingungsisolierung)

4.3.1 Verschiebungsanregung



Das Masse-Feder-Dämpfer-System, hier oben dargestellt, wird durch die harmonische vertikale Bodenverschiebung

$$y_g(t) = y_{go}\cos(\omega t) \tag{4.46}$$

angeregt. Wie gross ist die absolute vertikale Verschiebung $u(t)$ des Systems?

Die Differentialgleichung des Systems lautet:

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) = 0 \tag{4.47}$$

nach Umformung:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = ky + c\dot{y} \tag{4.48}$$

Die rechte Seite der DGL (4.48) kann als eine externe Anregungskraft $F(t) = ky + c\dot{y}$ interpretiert werden:

$$\begin{aligned} F(t) &= ky_{go}\cos(\omega t) - cy_{go}\omega\sin(\omega t) \\ &= ky_{go}\left[\cos(\omega t) - 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\sin(\omega t)\right] \\ &= ky_{go}\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Die externe Anregungskraft $F(t)$ ist harmonisch mit Amplitude:

$$F_o = ky_{go}\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{4.50}$$

Die maximale Verschiebung des Systems infolge so einer Kraft ist gemäss Gleichungen (4.10) und (4.11):

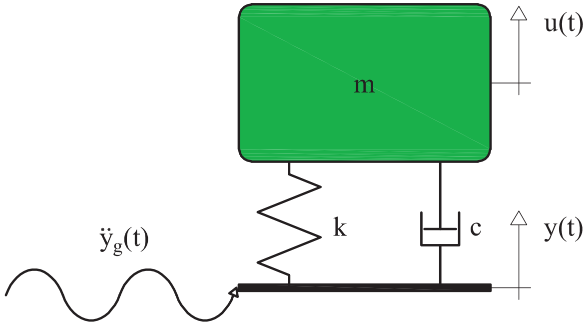
$$u_{max} = \frac{F_o}{k}V(\omega) = y_{go}\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}V(\omega) \tag{4.51}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.44):

$$\boxed{\frac{u_{max}}{y_{go}} = TR(\omega)} \tag{4.52}$$

wobei $TR(\omega)$ die Transmissibilität aus Gleichung (4.44) ist.

4.3.2 Beschleunigungsanregung



Aufpassen:

Bei dieser Fusspunktanregung, sowie bei der Anregung im Kap. 4.3.1, handelt es sich um eine **harmonische Anregung** und nicht um eine **beliebige Anregung** wie z.B. infolge eines Erdbebens (siehe Kap. 5.2).

Das Masse-Feder-Dämpfer-System, hier oben dargestellt, wird durch die harmonische vertikale Bodenbeschleunigung

$$\ddot{y}_g(t) = \ddot{y}_{go}\cos(\omega t) \tag{4.53}$$

angeregt. Wie gross ist die absolute vertikale Beschleunigung $\ddot{u}(t)$ des Systems?

Die Differentialgleichung des Systems lautet:

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) = 0 \tag{4.54}$$

nach Umformung:

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) - m\ddot{y} = -m\ddot{y} \tag{4.55}$$

$$m(\ddot{u} - \ddot{y}) + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) = -m\ddot{y} \tag{4.56}$$

$$m\ddot{u}_{rel} + c\dot{u}_{rel} + ku_{rel} = -m\ddot{y}_g \tag{4.57}$$

$$m\ddot{u}_{rel} + c\dot{u}_{rel} + ku_{rel} = -m\ddot{y}_{go}\cos(\omega t) \tag{4.58}$$

Die stationäre relative Verschiebung u_{rel} des Systems infolge der harmonischen Bodenbeschleunigung $\ddot{y}_g$ ergibt sich aus Gleichung (4.1):

$$u_{rel} = a_1\cos(\omega t) + a_2\sin(\omega t) \tag{4.59}$$

mit den Konstanten a_1 und a_2 gemäss Gleichung (4.2) und mit:

$$f_o = \frac{F_o}{m} = \frac{-m\ddot{y}_{go}}{m} = -\ddot{y}_{go} \tag{4.60}$$

Durch zweimaliges Ableiten der Gleichung (4.59) kann die relative Beschleunigung $\ddot{u}_{rel}$ berechnet werden:

$$\ddot{u}_{rel} = -a_1\omega^2\cos(\omega t) - a_2\omega^2\sin(\omega t) \tag{4.61}$$

Die gesuchte absolute Beschleunigung beträgt:

$$\ddot{u} = \ddot{u}_{rel} + \ddot{y}_g = -a_1\omega^2\cos(\omega t) - a_2\omega^2\sin(\omega t) + \ddot{y}_{go}\cos(\omega t) \tag{4.62}$$

Durch Einsetzen der Konstanten a_1, a_2 und f_o aus Gleichungen (4.2) und (4.60) und nach langer aber einfacher Umformung ergibt sich folgende Gleichung für die maximale absolute vertikale Beschleunigung des Systems:

$$\frac{\ddot{u}_{max}}{\ddot{y}_{go}} = TR(\omega) \tag{4.63}$$

wobei $TR(\omega)$ die Transmissibilität aus Gleichung (4.44) ist.

- Zusätzliche Herleitung:

Die maximale relative Verschiebung aus Gleichung (4.58) kann anhand von Gleichungen (4.10), (4.11) und (4.60) sehr einfach bestimmt werden:

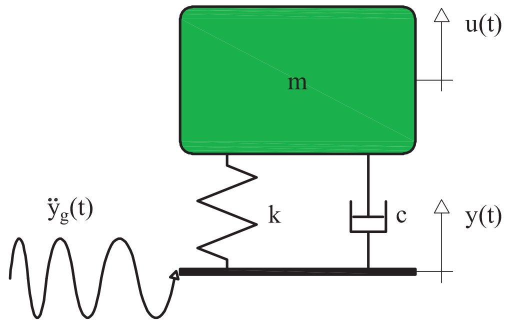
$$u_{rel,\,max} = \frac{f_o}{\omega_n^2} V(\omega) = \frac{|-\ddot{y}_{go}|}{\omega_n^2} V(\omega) \tag{4.64}$$

$$\frac{u_{rel,\,max}}{(\ddot{y}_{go}/\omega_n^2)} = V(\omega) \tag{4.65}$$

4.3.3 Beispiel Transmissibilität bei Fusspunktanregung

Vertikale Fusspunktanregung:

$$\ddot{y}_g(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

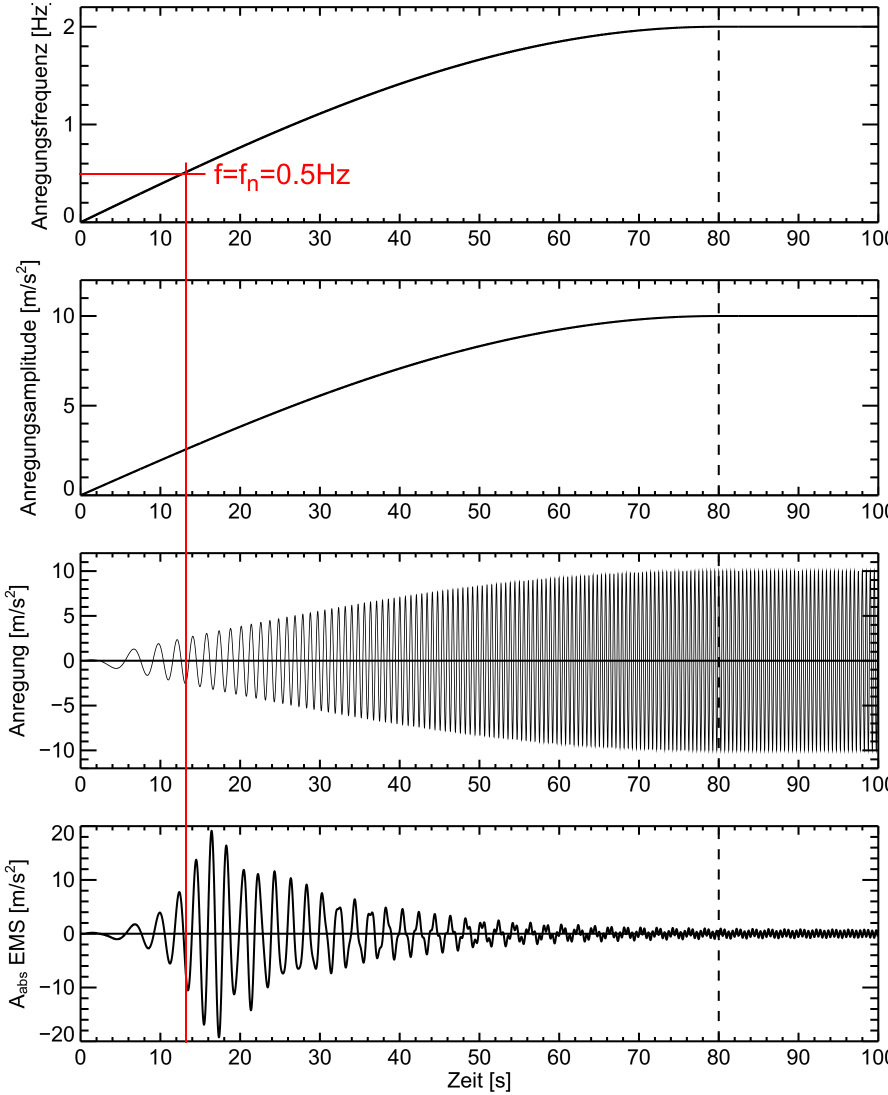


- Eigenfrequenz EMS: $f_n = 0.5\text{Hz}$
- Anregungsfrequenz: $f_0 = 2.0\text{Hz}$
- Anregungsamplitude: $A_0 = 10\text{m/s}^2$

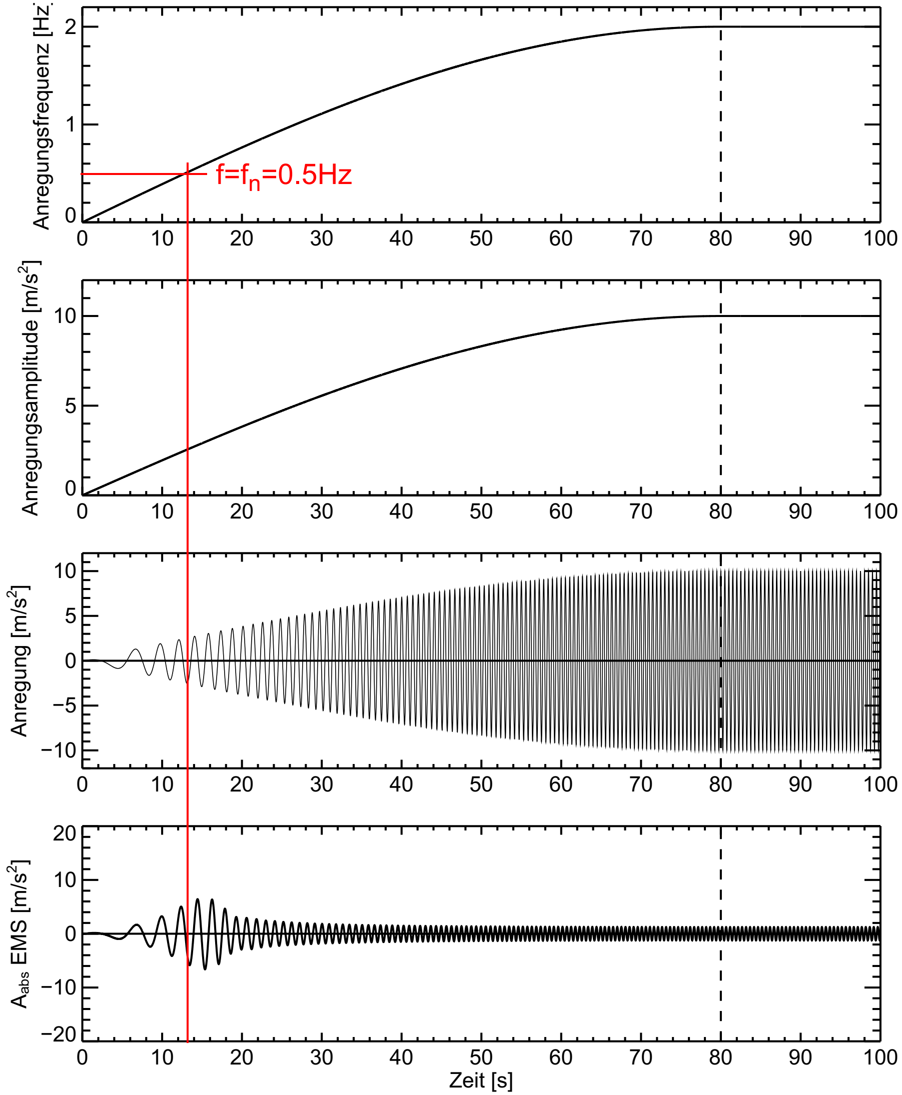
Gesucht ist die maximale Absolutbeschleunigung $\ddot{u}_{max}$ des EMS für $\zeta = 2\%$ und $\zeta = 20\%$.

- Die stationäre maximale Absolutbeschleunigung beträgt:
  - $\zeta = 2\%$, $\omega_0/\omega_n = 4$: $TR = 0.068$ und $\ddot{u}_{max} = 0.68\text{m/s}^2$
  - $\zeta = 20\%$, $\omega_0/\omega_n = 4$: $TR = 0.125$ und $\ddot{u}_{max} = 1.25\text{m/s}^2$
- Ist die stationäre maximale Absolutbeschleunigung wirklich die maximale Absolutbeschleunigung oder entstehen beim Anlaufen noch grössere Absolutbeschleunigungen?
  - Annahmen: Anlaufzeit $t_a = 80\text{s}$, sinusförmige Anlauffunktion für Anregungsfrequenz und Anregungsamplitude.
  - Berechnung mit Zeitschrittverfahren nach Newmark (siehe Kap. 5.2)

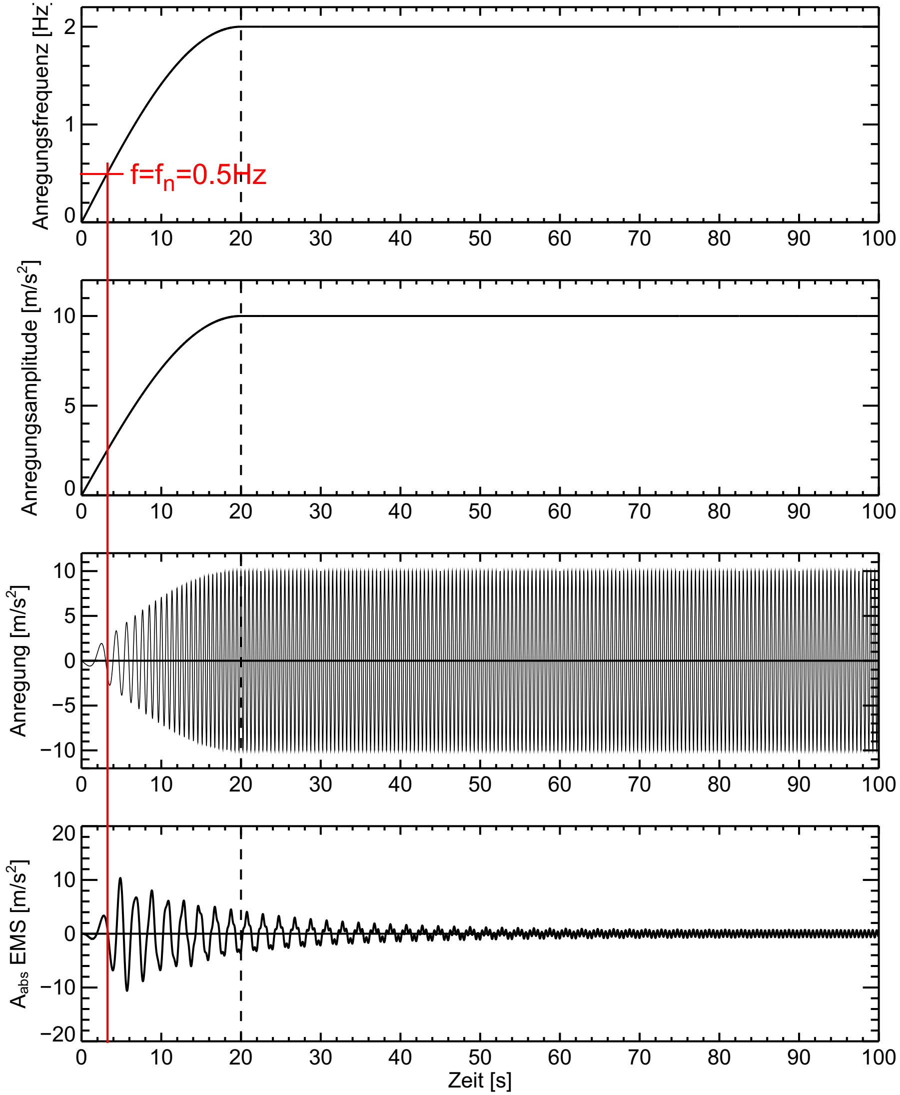
- Fall 1: Anfangssituation mit ζ = 2%



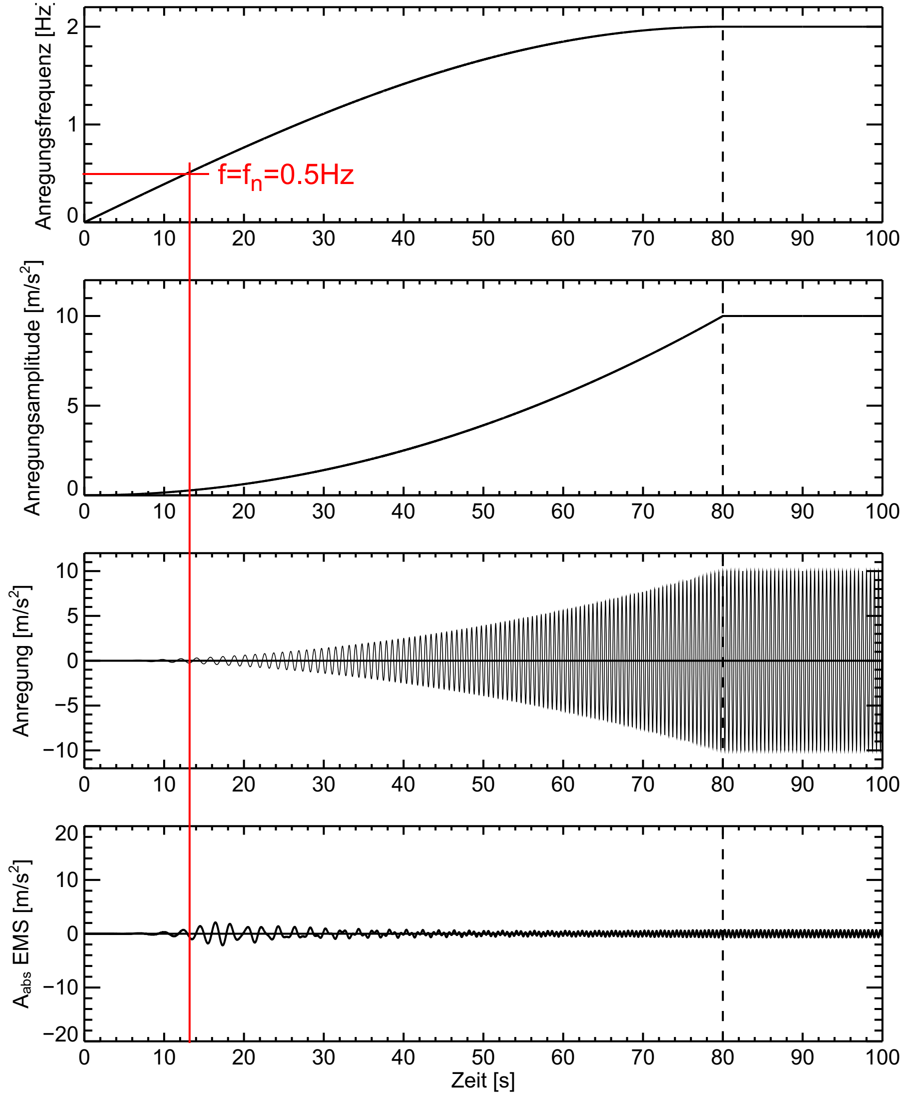
- Fall 2: Erhöhung der Dämpfungsrate von ζ = 2% nach ζ = 20%



• Fall 3: Reduktion der Anlaufzeit von t_a = 80s nach t_a = 20s (ζ = 2%)



• Fall 4: Änderung der Anlauffunktion für die Amplitude (ζ = 2%)



- Bemerkung

Die Anregungsfunktion in der Anlaufphase hat folgende Form:

$$\ddot{y}_g(t) = A(t)\cos(\Omega(t)\cdot t) \quad (4.66)$$

Die Anregungskreisfrequenz variiert mit der Zeit und beträgt:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}(\Omega(t)\cdot t) \quad (4.67)$$

- Lineare Variation der Anregungskreisfrequenz

$$\Omega(t) = \frac{\omega_0}{2t_a}\cdot t \;:\qquad \omega(t) = \omega_0\cdot\frac{t}{t_a}\quad (0\le t\le t_a) \quad (4.68)$$

- Parabolische Variation der Anregungskreisfrequenz

$$\Omega(t) = \frac{\omega_0}{3t_a^2}\cdot t^2 \;:\qquad \omega(t) = \omega_0\cdot\left(\frac{t}{t_a}\right)^2\quad (0\le t\le t_a) \quad (4.69)$$

- Sinusförmige Variation der Anregungskreisfrequenz

$$\Omega(t) = -\frac{2\omega_0 t_a}{\pi t}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{t_a}\right) : \omega(t) = \omega_0\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{t_a}\right)\quad (0\le t\le t_a) \quad (4.70)$$

- Doppel-Sinusförmige Variation der Anregungskreisfrequenz

$$\Omega(t) = \frac{\omega_0}{2}\left[1-\frac{\sin\left(\pi\cdot\frac{t}{t_a}\right)t_a}{\pi t}\right] : \omega(t) = \omega_0\left[1-\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{t_a}\right)\right] \quad (4.71)$$

- Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

4.4 Zusammenfassung Übertragungsfunktionen

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (4.72)$$

$$TR(\omega) = \sqrt{\frac{1+[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (4.73)$$

- Kraftanregung: $\frac{u_{max}}{u_o} = V(\omega)$
- Kraftübertragung: $\frac{F_{T,max}}{F_o} = TR(\omega)$
- Verschiebungsanregung: $\frac{u_{max}}{y_{go}} = TR(\omega)$
- Beschleunigungsanregung $\frac{\ddot{u}_{max}}{\ddot{y}_{go}} = TR(\omega)$

  $\frac{u_{rel,\,max}}{(\ddot{y}_{go}/\omega_n^2)} = V(\omega)$
- Für weitere Fälle siehe z. B. [Web02].