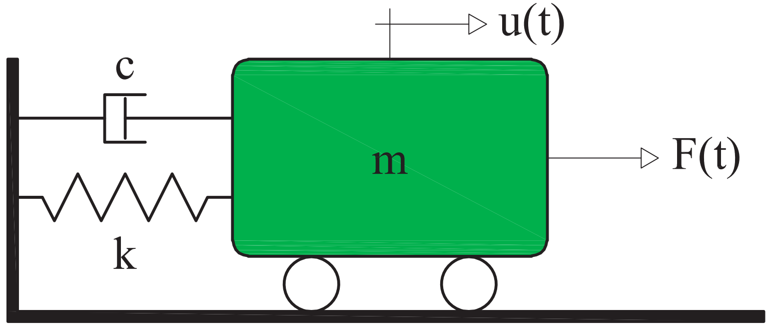
3 Harmonische Anregung



Bei einer harmonischen Anregung kann die Kraft $F(t)$ entweder eine Sinusfunktion (Gl. 3.1) oder eine Cosinusfunktion (Gl. 3.2) sein:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_o \sin(\omega t) \tag{3.1}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_o \cos(\omega t) \tag{3.2}$$

Hier wir Gleichung (3.2) weiter untersucht. Nach Umformung wird sie:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = f_o \cos(\omega t) \tag{3.3}$$

wobei: ω_n: **Eigenkreisfrequenz des EMS**

ω: **Anregungsfrequenz**

$f_o = F_o/m = (F_o/k) \cdot \omega_n^2$

Lineare inhomogene Differentialgleichung

- Partikuläre Lösung: u_p

$$\ddot{u}_p + 2\zeta\omega_n\dot{u}_p + \omega_n^2 u_p = f(t) \tag{3.4}$$

- Lösung der homogenen DGL: u_h

$$\ddot{u}_h + 2\zeta\omega_n\dot{u}_h + \omega_n^2 u_h = 0 \tag{3.5}$$

- Vollständige Lösung: $u = u_p + Cu_h$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = f_o \cos(\omega t) \tag{3.6}$$

- Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_o \quad , \quad \dot{u}(0) = v_o \tag{3.7}$$

3.1 Harmonische Anregung ohne Dämpfung

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = f_o \cos(\omega t) \tag{3.8}$$

- Ansatz für die partikuläre Lösung

$$u_p = A_o \cos(\omega t) \tag{3.9}$$

$$\ddot{u}_p = -A_o \omega^2 \cos(\omega t) \tag{3.10}$$

Durch einsetzen von (3.9) und (3.10) in (3.8):

$$-A_o \omega^2 \cos(\omega t) + A_o \omega_n^2 \cos(\omega t) = f_o \cos(\omega t) \tag{3.11}$$

$$A_o(-\omega^2 + \omega_n^2) = f_o \tag{3.12}$$

$$A_o = \frac{f_o}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{F_o}{k} \cdot \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{3.13}$$

$$u_p = \frac{f_o}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \tag{3.14}$$

- Ansatz für die Lösung der homogenen DGL (siehe Abschnitt für freie Schwingungen)

$$u_h = B_1 \cos(\omega_n t) + B_2 \sin(\omega_n t) \tag{3.15}$$

- Vollständige Lösung der DGL:

$$u = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) + \frac{f_o}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \tag{3.16}$$

Mit den Anfangsbedingungen aus Gleichung (3.7) können A_1 und A_2 bestimmt werden:

$$A_1 = u_o - \frac{f_o}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad , \quad A_2 = \frac{v_o}{\omega_n} \tag{3.17}$$

- Bezeichnungen:
  - Homogener Teil der Lösung: **“transient”**
  - Partikulärer Teil der Lösung: **“stationär”**
- Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

- Harmonische Schwingung mit Sinusanregung

$$u = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) + \frac{f_o}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

Mit den Anfangsbedingungen aus Gleichung (3.7) können A_1 und A_2 bestimmt werden:

$$A_1 = u_o \quad , \quad A_2 = \frac{v_o}{\omega_n} - \frac{f_o(\omega/\omega_n)}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

3.1.1 Deutung als Schwebung

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = f_o \cos(\omega t) \text{ mit } \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0 \tag{3.18}$$

Die Lösung ist:

$$u(t) = \frac{f_o}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)] \tag{3.19}$$

und mit der trigonometrischen Identität

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}t\right)\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}t\right) \tag{3.20}$$

bekommt man die Gleichung

$$u(t) = \frac{2f_o}{\omega^2 - \omega_n^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega - \omega_n}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega + \omega_n}{2}t\right) \tag{3.21}$$

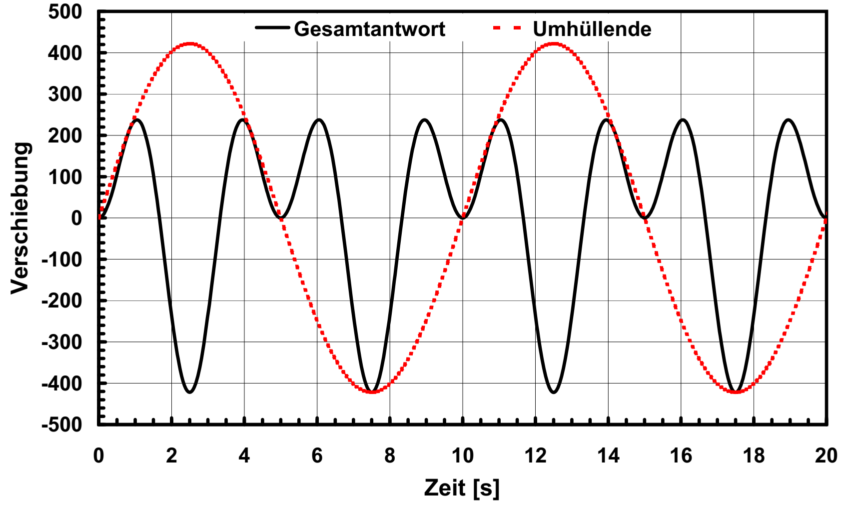
die eine Schwebung beschreibt mit:

Grundschwingung: $$f_G = \frac{f + f_n}{2} \tag{3.22}$$

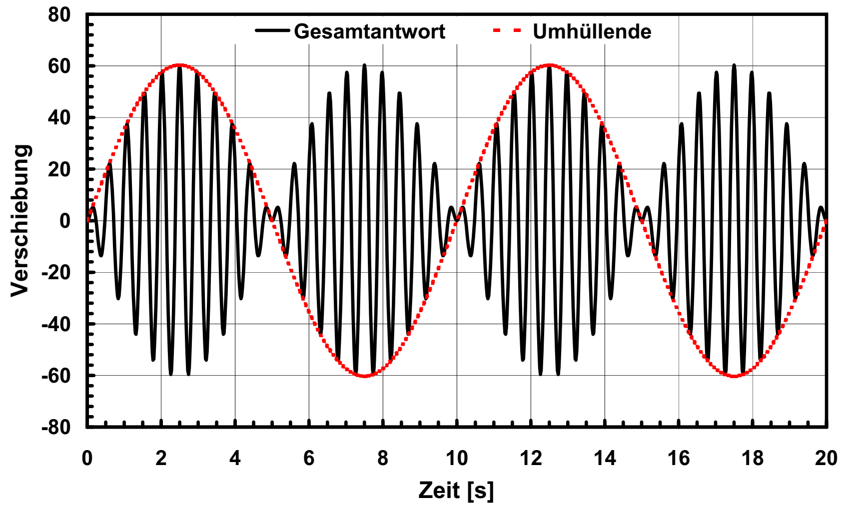
Umhüllende: $$f_U = \frac{f - f_n}{2} \tag{3.23}$$

Die Schwebung ist immer vorhanden, ist aber erst offensichtlich wenn die Eigenfrequenz f_n des Einmassenschwingers und die Anregungsfrequenz f in der Nähe liegen (siehe Bilder auf Seite 46)

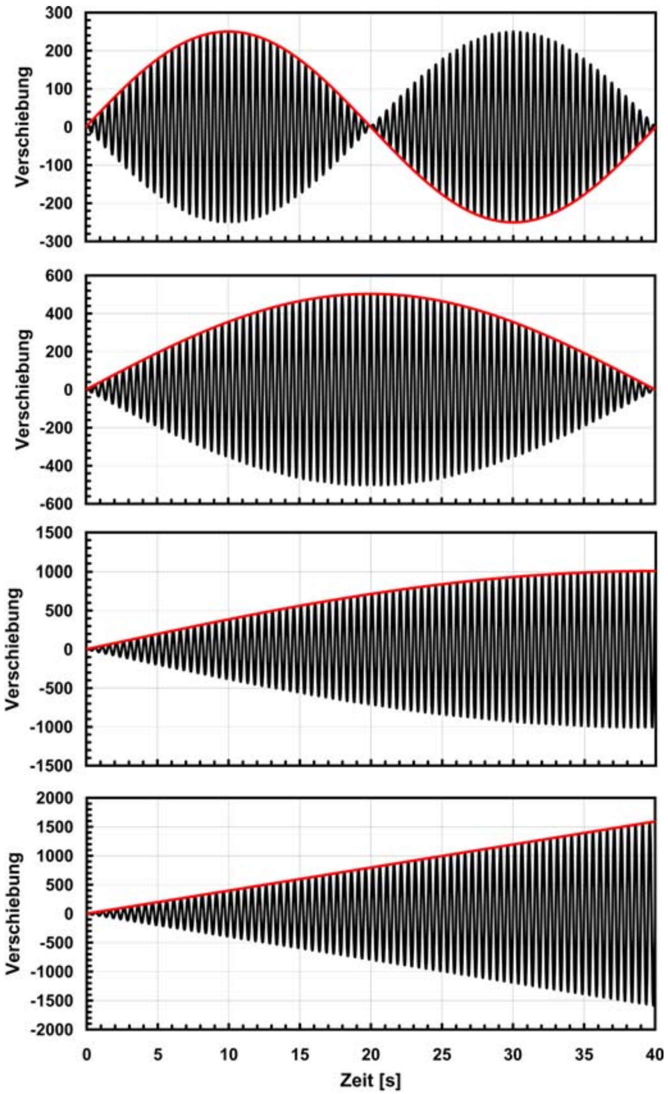
- Fall 1: Eigenfrequenz EMS 0.2 Hz, Anregungsfrequenz 0.4 Hz



- Fall 2: Eigenfrequenz EMS 2.0 Hz, Anregungsfrequenz 2.2 Hz



- Übergang zu $f = f_n$



$$\frac{f}{f_n} = \frac{2.0500}{2.0000}$$

$$\frac{f}{f_n} = \frac{2.0250}{2.0000}$$

$$\frac{f}{f_n} = \frac{2.0125}{2.0000}$$

$$\frac{f}{f_n} = \frac{2.0000}{2.0000}$$

Resonanz!

3.1.2 Resonanzanregung ($\omega = \omega_n$)

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = f_o \cos(\omega_n t) \tag{3.24}$$

- Ansatz für die partikuläre Lösung

$$u_p = A_o t \sin(\omega_n t) \tag{3.25}$$

$$\dot{u}_p = A_o \sin(\omega_n t) + A_o \omega_n t \cos(\omega_n t) \tag{3.26}$$

$$\ddot{u}_p = 2A_o \omega_n \cos(\omega_n t) - A_o \omega_n^2 t \sin(\omega_n t) \tag{3.27}$$

Durch einsetzen von (3.25) und (3.27) in (3.24):

$$2A_o \omega_n \cos(\omega_n t) - \cancel{A_o \omega_n^2 t \sin(\omega_n t)} + \cancel{A_o \omega_n^2 t \sin(\omega_n t)} = f_o \cos(\omega_n t) \tag{3.28}$$

$$2A_o \omega_n = f_o \tag{3.29}$$

$$A_o = \frac{f_o}{2\omega_n} = \frac{F_o}{k} \cdot \frac{\omega_n}{2} \tag{3.30}$$

$$u_p = \frac{f_o}{2\omega_n} t \sin(\omega_n t) \tag{3.31}$$

- Ansatz für die Lösung der homogenen DGL (siehe Abschnitt für freie Schwingungen)

$$u_h = B_1 \cos(\omega_n t) + B_2 \sin(\omega_n t) \tag{3.32}$$

- Vollständige Lösung der DGL:

$$u = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) + \frac{f_o}{2\omega_n} t \sin(\omega_n t) \tag{3.33}$$

Mit den Anfangsbedingungen aus Gleichung (3.7) können A_1 und A_2 bestimmt werden:

$$A_1 = u_o \quad , \quad A_2 = \frac{v_o}{\omega_n} \tag{3.34}$$

- Spezialfall $u_o = v_o = 0$
  (Der homogene Teil der Lösung fällt weg)

$$u = \frac{f_o}{2\omega_n} t \sin(\omega_n t) \tag{3.35}$$

Es handelt sich um eine Sinusschwingung mit der Amplitude:

$$A = \frac{f_o}{2\omega_n} t \tag{3.36}$$

- Die Amplitude wächst linear mit der Zeit (siehe letztes Bild der Deutung “Schwebung”);
- Es gilt $A \to \infty$ wenn $t \to \infty$, d.h. nach unendlich viel Zeit ist die Amplitude der Schwingung ebenfalls unendlich.

- Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf
  http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

3.2 Harmonische Anregung mit Dämpfung

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = f_o \cos(\omega t) \tag{3.37}$$

- Ansatz für die partikuläre Lösung

$$u_p = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \tag{3.38}$$

$$\dot{u}_p = -a_1 \omega \sin(\omega t) + a_2 \omega \cos(\omega t) \tag{3.39}$$

$$\ddot{u}_p = -a_1 \omega^2 \cos(\omega t) - a_2 \omega^2 \sin(\omega t) \tag{3.40}$$

Durch einsetzen von (3.38) bis (3.40) in (3.37):

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)a_1 + 2\zeta\omega_n\omega a_2]\cos(\omega t) + [-2\zeta\omega_n\omega a_1 + (\omega_n^2 - \omega^2)a_2]\sin(\omega t) = f_o \cos(\omega t) \tag{3.41}$$

Gleichung (3.41) soll für alle t und für alle Konstanten a_1 und a_2 gültig sein, deshalb können Gleichungen (3.42) und (3.43) geschrieben werden:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)a_1 + 2\zeta\omega_n\omega a_2 = f_o \tag{3.42}$$

$$-2\zeta\omega_n\omega a_1 + (\omega_n^2 - \omega^2)a_2 = 0 \tag{3.43}$$

Die Lösung des Gleichungssystems [(3.42), (3.43)] erlaubt die Berechnung der Konstanten a_1 und a_2 zu:

$$a_1 = f_o \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \; , \; a_2 = f_o \frac{2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \tag{3.44}$$

- Ansatz für die Lösung der homogenen DGL (siehe Abschnitt für freie Schwingungen)

$$u_h = e^{-\zeta\omega_n t}(B_1\cos(\omega_d t) + B_2\sin(\omega_d t)) \quad (3.45)$$

mit:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{“gedämpfte Eigenkreisfrequenz”} \quad (3.46)$$

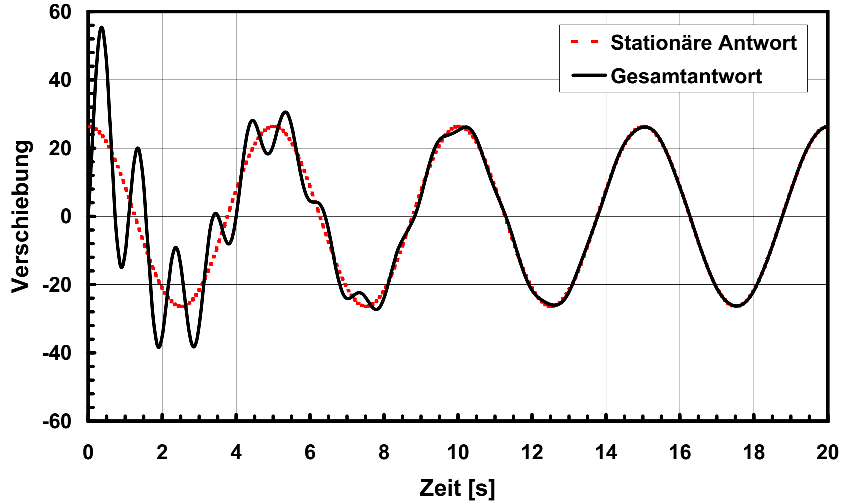
- Vollständige Lösung der DGL:

$$u = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1\cos(\omega_d t) + A_2\sin(\omega_d t)) + a_1\cos(\omega t) + a_2\sin(\omega t) \quad (3.47)$$

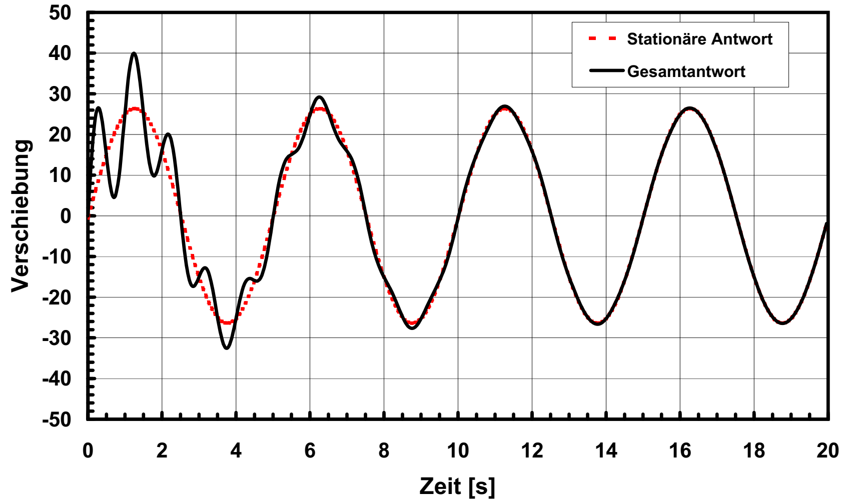
Mit den Anfangsbedingungen aus Gleichung (3.7) können A_1 und A_2 bestimmt werden. Die Berechnung ist umständlich und soll am Besten mit einem Mathematikprogramm (z. B. Maple) durchgeführt werden.

- Bezeichnungen:
  - Homogener Teil der Lösung: **“transient”**
  - Partikulärer Teil der Lösung: **“stationär”**
- Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

- Beispiel 1: f_n = 1Hz, f = 0.2Hz, ζ = 5%, f_o = 1000, u_o = 0, v_o = f_o/ω_n



- Beispiel 2: Wie Beispiel 1 aber mit F(t) = $F_o\sin(\omega t)$ anstatt $F_o\cos(\omega t)$



3.2.1 Resonanzanregung ($\omega = \omega_n$)

Durch Einsetzen von $\omega = \omega_n$ in der Gleichung (3.44) für die Konstanten a_1 und a_2 ergibt sich:

$$a_1 = 0, \, a_2 = \frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2} \tag{3.48}$$

d.h. wenn Dämpfung vorhanden ist, ist die Resonanzanregung kein Spezialfall mehr und die vollständige Lösung der DGL wird:

$$u = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)) + \frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2}\sin(\omega_n t) \tag{3.49}$$

- Spezialfall $u_o = v_o = 0$

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = -\frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{f_o}{2\zeta\omega_n\omega_d} \tag{3.50}$$

$$u = \frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2}\left(\sin(\omega_n t) - \frac{\sin(\omega_d t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\right) \tag{3.51}$$

  - Nach einer gewissen Zeit ist der homogene Teil der Lösung abgeklungen und es bleibt eine Sinusschwingung der Amplitude:

$$A = \frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2} \tag{3.52}$$

  - Die Amplitude ist begrenzt, d.h. die maximale Auslenkung des EMS beträgt:

$$u_{max} = \frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2} = \frac{F_o}{2\zeta k} = \frac{u_{st,max}}{2\zeta} \tag{3.53}$$

wobei $u_{st,max} = F_o/k$ = maximale statische Verschiebung

  - Für kleine Dämpfungen ($\zeta \le 0.2$) $\omega_d \approx \omega_n$ und $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ wird deshalb Gleichung (3.51):

$$u = \frac{f_o}{2\zeta\omega_n^2}(1 - e^{-\zeta\omega_n t})\sin(\omega_n t) = u_{max}(1 - e^{-\zeta\omega_n t})\sin(\omega_n t) \tag{3.54}$$

Es ist eine Sinusschwingung mit der Amplitude:

$$A = u_{max}(1 - e^{-\zeta\omega_n t}) \tag{3.55}$$

und der Betrag der Amplitude bei jeder Maxima j beträgt

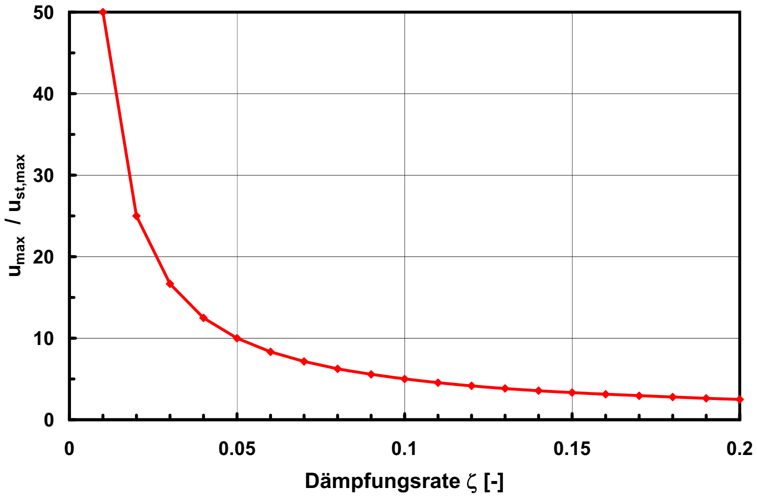
$$\frac{u_j}{u_{max}} = (1 - e^{-\zeta\omega_n t_j})\sin(\omega_n t_j) \tag{3.56}$$

Die Maxima treten auf wenn $\sin(\omega_n t) = -1$, d.h. wenn

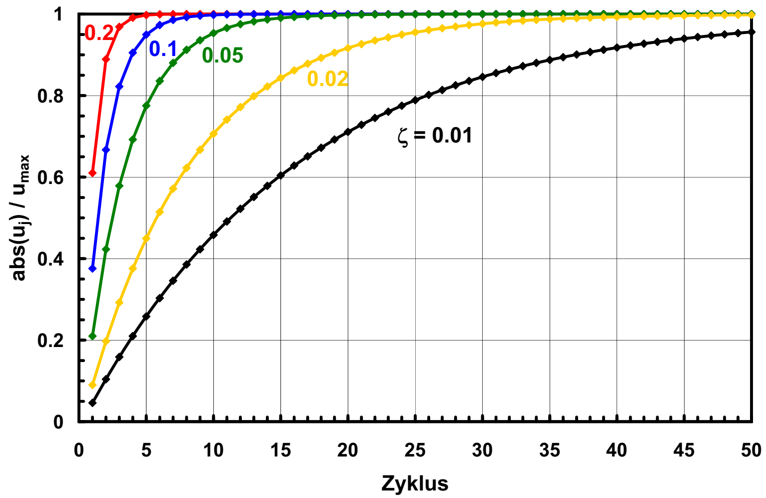
$$t_j = (4j - 1)\cdot\frac{T_n}{4}, \; j = 1\ldots\infty \tag{3.57}$$

$$\frac{|u_j|}{u_{max}} = 1 - e^{-\zeta\omega_n(4j-1)\cdot\frac{T_n}{4}} = 1 - e^{-\zeta(4j-1)\cdot\frac{\pi}{2}} \tag{3.58}$$

• Dynamische Amplifikation



• Betrag der Amplitude nach jedem Zyklus: $f(u_{max})$



• Betrag der Amplitude nach jedem Zyklus: $f(u_{st,max})$