2 Freie Schwingungen

"Eine Struktur führt eine freie Schwingung durch, wenn sie aus ihrem statischen Gleichgewicht gebracht wird, und anschliessend ohne jegliche externe dynamische Anregung schwingen kann"

2.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{2.1}$$

2.1.1 Formulierung 1: Amplitude und Phasenwinkel

- Ansatz:

$$u(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) \tag{2.2}$$

$$\ddot{u}(t) = -A\omega_n^2\cos(\omega_n t - \phi) \tag{2.3}$$

Durch einsetzen von (2.2) und (2.3) in (2.1):

$$A(-\omega_n^2 m + k)\cos(\omega_n t - \phi) = 0 \tag{2.4}$$

$$-\omega_n^2 m + k = 0 \tag{2.5}$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad \textbf{"Eigenkreisfrequenz"} \tag{2.6}$$

- Beziehungen

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \text{ [rad/s]: Drehwinkelgeschwindigkeit} \tag{2.7}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ [1/s], [Hz]: Anzahl Umdrehungen pro Zeit} \tag{2.8}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \text{ [s]: Benötigte Zeit pro Umdrehung} \tag{2.9}$$

- Umformung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \tag{2.10}$$

- Bestimmungen der Unbekannten A und ϕ:

  Statisches Gleichgewicht durch Anfangsauslenkung $u(0) = u_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u}(0) = v_0$ gestört:

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \tan\phi = \frac{v_0}{u_0\omega_n} \tag{2.11}$$

- Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

2.1.2 Formulierung 2: Trigonometrische Funktionen

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{2.12}$$

- Ansatz:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \tag{2.13}$$

$$\ddot{u}(t) = -A_1 \omega_n^2 \cos(\omega_n t) - A_2 \omega_n^2 \sin(\omega_n t) \tag{2.14}$$

Durch einsetzen von (2.13) und (2.14) in (2.12):

$$A_1(-\omega_n^2 m + k)\cos(\omega_n t) + A_2(-\omega_n^2 m + k)\sin(\omega_n t) = 0 \tag{2.15}$$

$$-\omega_n^2 m + k = 0 \tag{2.16}$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \text{ “Eigenkreisfrequenz”} \tag{2.17}$$

- Bestimmungen der Unbekannten A_1 und A_2:

Statisches Gleichgewicht durch Anfangsauslenkung $u(0) = u_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u}(0) = v_0$ gestört

$$A_1 = u_0 \ , \ A_2 = \frac{v_0}{\omega_n} \tag{2.18}$$

2.1.3 Formulierung 3: Exponentialfunktionen

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{2.19}$$

- Ansatz:

$$u(t) = e^{\lambda t} \tag{2.20}$$

$$\ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{2.21}$$

Durch einsetzen von (2.20) und (2.21) in (2.19):

$$m\lambda^2 + k = 0 \tag{2.22}$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \tag{2.23}$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_n \tag{2.24}$$

Die vollständige Lösung der DGL ist:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \tag{2.25}$$

und mit den Eulerschen Formeln

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \ , \ \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \tag{2.26}$$

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \ , \ e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \tag{2.27}$$

Kann Gleichung (2.25) wie folgt umgeformt werden:

$$u(t) = (C_1 + C_2)\cos(\omega_n t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega_n t) \quad (2.28)$$

$$u(t) = A_1\cos(\omega_n t) + A_2\sin(\omega_n t) \quad (2.29)$$

Gleichung (2.29) entspricht Gleichung (2.13)!

2.2 Gedämpfte Schwingungen

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.30)$$

- Schwingungen klingen in Wirklichkeit ab
- Dämpfung existiert
- Es ist praktisch unmöglich die Dämpfung exakt zu schätzen
- Viskose Dämpfung ist mathematisch einfach zu behandeln

Dämpfungskonstante: $c\left[N \cdot \frac{s}{m}\right]$ (2.31)

2.2.1 Formulierung 3: Exponentialfunktionen

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.32)$$

- Ansatz:

$$u(t) = e^{\lambda t}\ ,\ \dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t}\ ,\ \ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (2.33)$$

Durch einsetzen von (2.33) in (2.32):

$$(\lambda^2 m + \lambda c + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (2.34)$$

$$\lambda^2 m + \lambda c + k = 0 \quad (2.35)$$

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km} \quad (2.36)$$

- Kritische Dämpfung: wenn $c^2 - 4km = 0$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\omega_n m \qquad (2.37)$$

- Dämpfungsrate (Dämpfung)

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\omega_n m} \qquad (2.38)$$

- Umformung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \qquad (2.39)$$

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \qquad (2.40)$$

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \qquad (2.41)$$

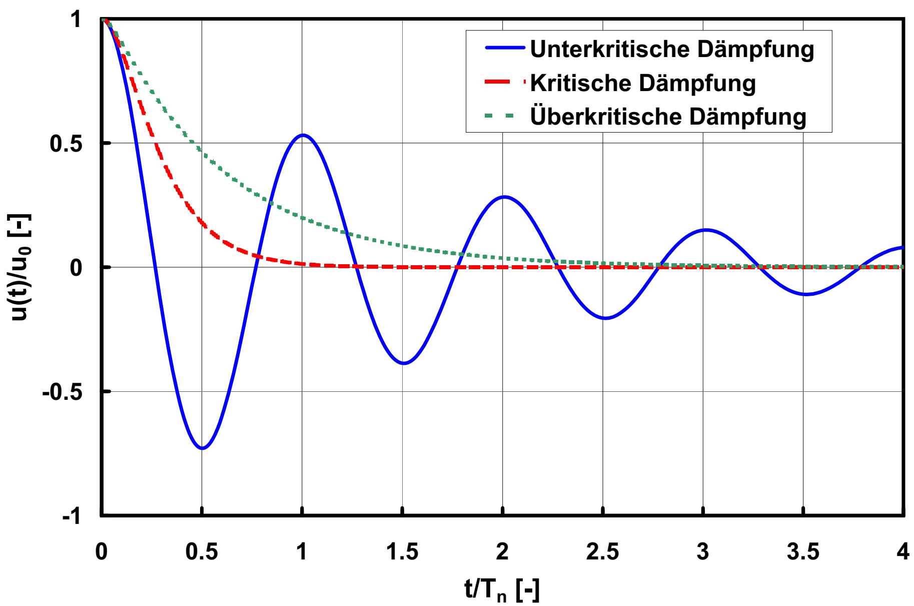
- Arten von Bewegungen:

$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} < 1$: Unterkritisch gedämpfte Bewegung

$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = 1$: Kritisch gedämpfte Bewegung

$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} > 1$: Überkritisch gedämpfte Bewegung

- Arten von Bewegungen



Unterkritische Dämpfung $\zeta < 1$

Durch einsetzen von:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\omega_n m} \text{ und } \omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{2.42}$$

In:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.43}$$

Es ergibt sich:

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\omega_n^2\zeta^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{2.44}$$

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2.45}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{“gedämpfte Eigenkreisfrequenz”} \tag{2.46}$$

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \tag{2.47}$$

Die vollständige Lösung der DGL ist:

$$u(t) = C_1 e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + C_2 e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t} \tag{2.48}$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) \tag{2.49}$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)) \tag{2.50}$$

Die Bestimmungen der Unbekannten A_1 und A_2 erfolgt wie gewohnt anhand der Bedingungen für Anfangsauslenkung $u(0) = u_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u}(0) = v_0$ und es ergibt sich:

$$A_1 = u_0 \ , \ A_2 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \tag{2.51}$$

2.2.2 Formulierung 1: Amplitude und Phasenwinkel

Gleichung (2.50) kann als “Amplitude und Phasenwinkel” umformuliert werden:

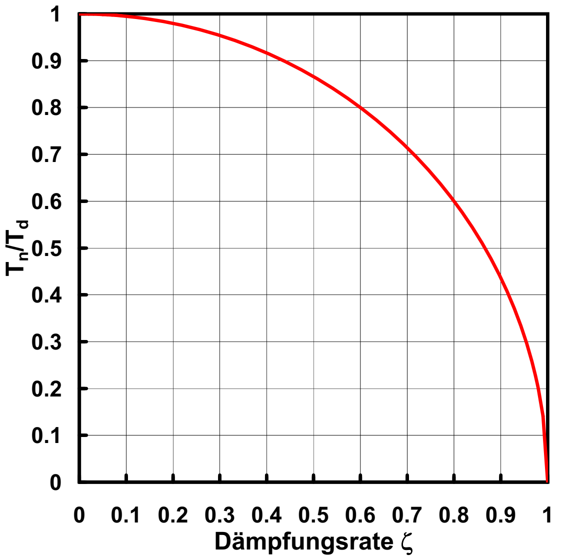
$$u(t) = A e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi) \tag{2.52}$$

mit

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} \ , \ \tan\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} \tag{2.53}$$

Die Bewegung ist eine sinusförmige Schwingung der Eigenkreisfrequenz ω_d mit abnehmender Amplitude $Ae^{-\zeta\omega_n t}$

- Bemerkungen:
  - Die Periode der gedämpften Schwingung ist länger, d.h. die Schwingung ist langsamer



$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

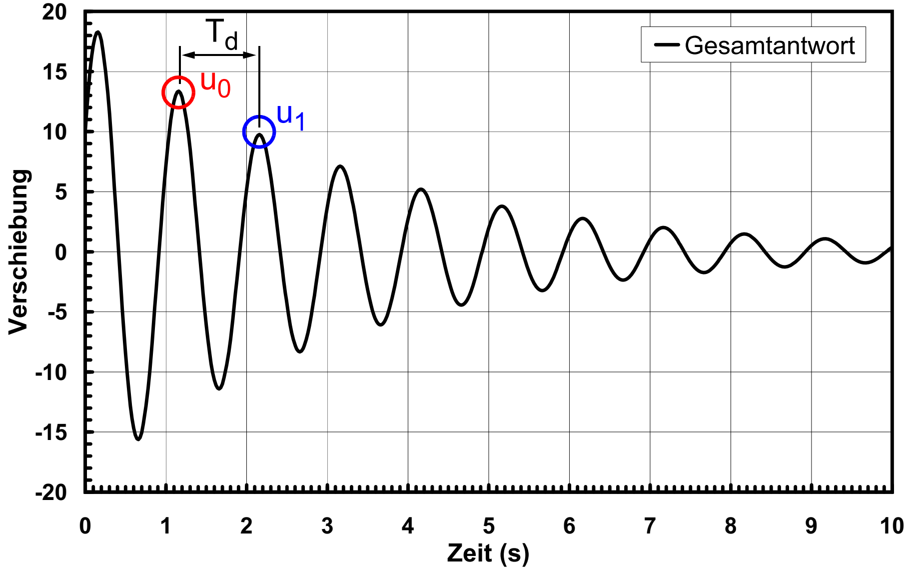
$$T_d = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

  - Die Umhüllende der Bewegung hat die Gleichung:

$$u(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{ mit } A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad (2.54)$$

  - Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

2.3 Das logarithmische Dekrement



- Amplitude zweier aufeinaderfolgender Zyklen

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n(t+T_d)}\cos(\omega_d(t+T_d) - \phi)} \qquad (2.55)$$

mit

$$e^{-\zeta\omega_n(t+T_d)} = e^{-\zeta\omega_n t}e^{-\zeta\omega_n T_d} \qquad (2.56)$$

$$\cos(\omega_d(t+T_d) - \phi) = \cos(\omega_d t + \omega_d T_d - \phi) = \cos(\omega_d t - \phi) \qquad (2.57)$$

gilt:

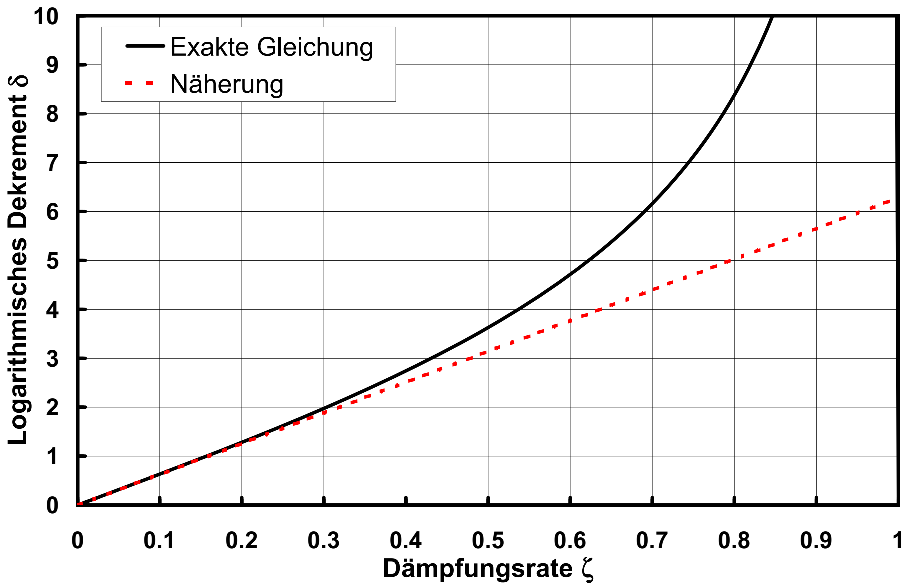
$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n T_d}} = e^{\zeta\omega_n T_d} \tag{2.58}$$

- Logarithmisches Dekrement δ

$$\delta = \ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) = \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta \text{ (wenn } \zeta \text{ klein)} \tag{2.59}$$

Die Dämpfungsrate (Dämpfung) wird:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} \cong \frac{\delta}{2\pi} \text{ (wenn } \zeta \text{ klein)} \tag{2.60}$$



- Auswertung über mehrere Zyklen

$$\frac{u_0}{u_N} = \frac{u_0}{u_1}\cdot\frac{u_1}{u_2}\cdot\ldots\cdot\frac{u_{N-1}}{u_N} = (e^{\zeta\omega_n T_d})^N = e^{N\zeta\omega_n T_d} \tag{2.61}$$

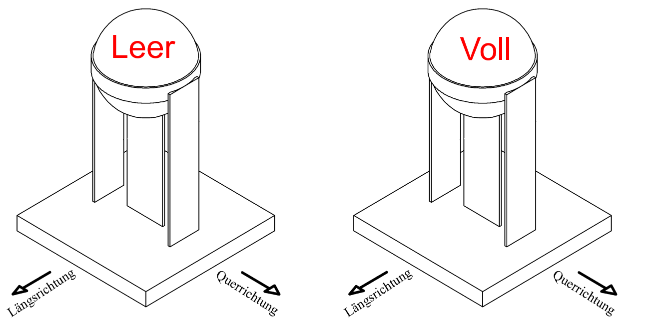
$$\delta = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{u_0}{u_N}\right) \tag{2.62}$$

- Halbierung der Amplitude

$$\zeta = \frac{\frac{1}{N}\ln\left(\frac{u_0}{u_N}\right)}{2\pi} = \frac{\frac{1}{N}\ln(2)}{2\pi} = \frac{1}{9N} \cong \frac{1}{10N} \tag{2.63}$$

Nützliche Formel für Schnellauswertung

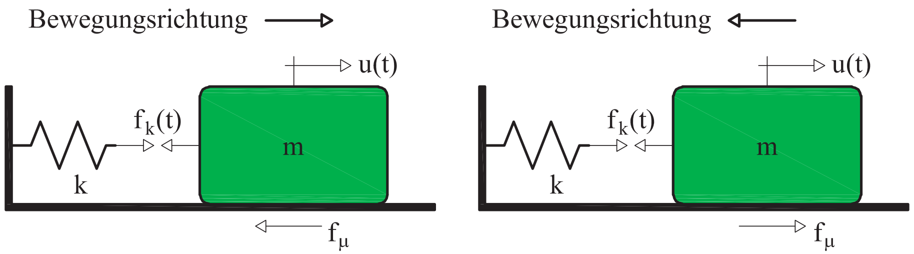
- Aufpassen: Dämpfungsrate vs. Dämpfungskonstante



m_1, k_1, c_1 $\qquad$ $m_2>m_1$, k_1, c_1

$$\zeta_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1 m_1}} \qquad \zeta_2 = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1 m_2}} < \zeta_1$$

2.4 Reibungsdämpfung



a)

$$-f_k(t) - f_\mu = m\ddot{u}(t)$$

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = -f_\mu$$

b)

$$-f_k(t) + f_\mu = m\ddot{u}(t)$$

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f_\mu$$

- Lösung von b)

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) + u_\mu \quad \text{mit } u_\mu = \frac{f_\mu}{k} \qquad (2.64)$$

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A_1 \sin(\omega_n t) + \omega_n A_2 \cos(\omega_n t) \qquad (2.65)$$

Mit den Anfangsbedingungen $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ bekommt man die Konstanten:

$$A_1 = u_0 - u_\mu \ , \ A_2 = v_0/\omega_n$$

- Lösung von a): Analog, mit $-u_\mu$ anstatt $+u_\mu$

- Freie Schwingung
  Es handelt sich um ein nichtlineares Problem!

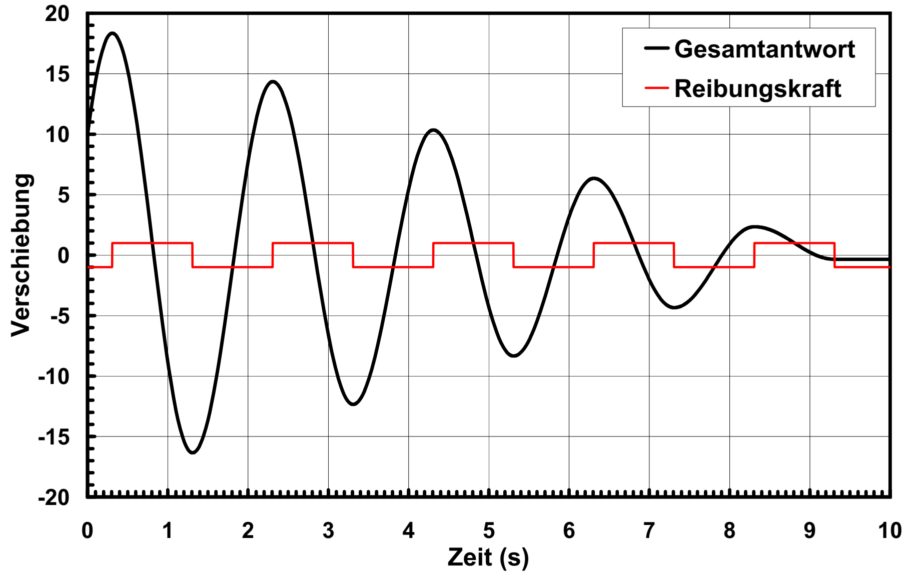


Bild: f=0.5 Hz , u_0=10 , v_0 = 50, u_f = 1

- Berechnungsbeispiel:
  - **Schritt 1:**

Anfangsbedingungen $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$

$$A_1 = u_0 - u_\mu \ , \ A_2 = 0 \qquad (2.66)$$

$$u(t) = [u_0 - u_\mu]\cos(\omega_n t) + u_\mu \qquad 0 \le t < \frac{\pi}{\omega_n} \qquad (2.67)$$

Verschiebung am Ende: $u\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = [u_0 - u_\mu](-1) + u_\mu = -u_0 + 2u_\mu$

- **Schritt 2:**

Anfangsbedingungen $u(0) = -u_0 + 2u_\mu \ , \ \dot{u}(0) = 0$

$$A_1 = u(0) + u_\mu = -u_0 + 2u_\mu + u_\mu = -u_0 + 3u_\mu \ , \ A_2 = 0 \quad (2.68)$$

$$u(t) = [-u_0 + 3u_\mu]\cos(\omega_n t) - u_\mu \qquad 0 \le t < \frac{\pi}{\omega_n} \quad (2.69)$$

Verschiebung am Ende: $u\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = [-u_0 + 3u_\mu](-1) - u_\mu = u_0 - 4u_\mu$

- **Schritt 3:**

Anfangsbedingungen ....

- Zu Bemerken: Iterieren bei der Geschwindigkeitsumkehr!

- Visualisierung der Lösung anhand der Excel Datei auf http://www.ibk.ethz.ch/da/education/TD/Downloads

- Eigenschaften der Reibungsdämpfung
  - Lineare Abnahme der Amplitude um $4u_\mu$ pro Zyklus
  - Die Periode des gedämpften Schwingers und des ungedämpften Schwingers ist die gleiche

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

- Vergleich “Viskose Dämpfung - Reibungsdämpfung”

Freie Schwingung: f=0.5 Hz , u_0=10 , v_0 = 50, u_f = 1

Logarithmisches Dekrement:

	U_0	U_N	N	δ	ζ [%]
1	18.35	14.35	1	0.245	3.91
2	18.35	10.35	2	0.286	4.56
3	18.35	6.35	3	0.354	5.63
4	18.35	2.35	4	0.514	8.18
Mittel					5.57

Vergleich: